Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Х. Алтынбаев, Численное интегрирование уравнений движения небесных объектов методом разложения в ряд Тейлора с учетом релятивистских эффектов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 34, 202–204

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 06:13:54

Руководствуясь гипотезой плоских продольных сечений, появляется возможность создания математических моделей или, точнее, расчетных методик прогнозирования поверхности излома при различных видах многоциклового нагружения деталей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Navier*. Resume des lecons, donnees a l'Ecole des Ponts Chaussees sur l'application de la mecanique a l'etablissement des constructions et des machines. Premier partie contenant les lecons sur la resistance des materiaux. Paris. 1864.
2. *Гуле Ж.* Сопротивление материалов: Пер. с франц. А.С.Кравчука. М.: Высш.шк., 1985. 192с.
3. *Колыун Ю.И.* Механика концентрации напряжений в окрестности фронта нераспространяющейся усталостной трещины // Вестник Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. Вып. 30. 2004. С.41-54.
4. *Колыун Ю.И.* Локальный теоретический коэффициент концентрации напряжений при прогнозировании предела выносливости по первой макротрещине // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте : Труды VI Международной научно-технической конференции / Под ред. С.В.Елизарова. СПб.: ПГУПС, 2004. С.181-190.
5. *Ильюшин А.А., Ленский В.С.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1959. 371с.

Поступила 21.12.2004 г.

Астрометрия и небесная механика

УДК 521.1

Ф.Х. Алтынбаев

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ОБЪЕКТОВ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ТЕЙЛОРА С УЧЕТОМ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭФФЕКТОВ

Разработан алгоритм и составлена программа численного интегрирования уравнений движения небесных объектов методом Тейлора с учетом релятивистских членов, обусловленных Солнцем. На конечный момент времени для планеты Меркурий проведено сопоставление элементов орбит, полученных разными методами.

Раздел теоретической астрономии, изучающий движение небесных тел, можно считать основным разделом астрономических наук. Это изучение началось с открытия различного рода периодичностей в видимом движении небесных тел. После открытия закона всемирного тяготения и выявления его доминирующего значения основной задачей, ставшей перед астрономической дисциплиной, стал вывод всех следствий этого закона.

Основным содержанием небесной механики является задача n -тел, т.е. изучение движения n материальных точек, притягивающихся друг к другу по закону Ньютона. Эта задача полностью решена аналитически только в случае $n=2$. При $n \geq 3$ точного аналитического решения не найдено. Задача трёх и более тел аналитическими методами решается путём разложения в степенные ряды по малым параметрам элементов орбит (эксцентриситет, наклонение). Однако это не позволяет моделировать движение с необходимой точностью на интервалах времени более ста лет.

В настоящее время при создании теории движения небесных объектов широко используются численные методы интегрирования уравнений движения. Одним из высокоточных численных методов является метод, основанный на построении решения на следующем шаге, если оно известно на предыдущем, в виде ряда Тейлора. В современной численной теории движения небесных объектов, помимо гравитационных сил в уравнении учитываются релятивистские члены, которые, как известно, позволяют описать дополнительное смещение перигелия Меркурия, равное 43 с дуги за столетие.

В данной работе приведены формулы для учета релятивистских членов в методе численного интегрирования, основанном на представлении решения рядом Тейлора. По данному алгоритму проведено совместное интегрирование движения девяти больших планет (Меркурий-Плутон), и результаты интегрирования сопоставлены с результатами численного решения этой же задачи методом Эверхарта [1].

Интегрирование уравнений движения возмущаемого тела методом Тейлора. Уравнения движения возмущаемого тела в прямоугольных координатах с началом в центре Солнца могут быть приведены к одному уравнению матричного вида [2]:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{X}{r^3} + \sum_i k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i^3} - \frac{X_i}{r_i^3} \right), \quad (1)$$

где X – матрица-столбец с элементами x, y, z ; X_i – матрица столбец с элементами x_i, y_i, z_i ; m, x, y, z – масса и гелиоцентрические координаты возмущаемого тела; m_i, x_i, y_i, z_i – массы и гелиоцентрические координаты больших планет; r, Δ_i, r_i – расстояния, вычисляемые по формулам: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\Delta_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$, $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$.

Уравнение (1) характеризует движение, основываясь только на гравитационных составляющих. Если же учитывать релятивистские эффекты, формула примет более сложный вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} = & -k^2(1+m)\frac{X}{r^3} + \sum_i k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i^3} - \frac{X_i}{r_i^3} \right) + \\ & + \frac{k^2}{c^2} \left[(4-2\alpha)\frac{k^2}{r^4} X - (1+\alpha)\frac{\dot{r}^2}{r^3} X + 3\alpha\frac{(X\dot{X})^2}{r^5} X + (4-2\alpha)\frac{(X\dot{X})}{r^3} \dot{X} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение как уравнения (1), так и уравнения (2) в точке $X(t_0+t)$, если оно известно в точке $X(t_0)$, на основании метода Тейлора находится по формулам [4]:

$$X(t_0 + t) = X(t_0) + \frac{dX(t_0)}{dt}t + \frac{1}{2!} \frac{d^2 X(t_0)}{dt^2} t^2 + \dots; \quad (3)$$

$$\frac{dX(t_0 + t)}{dt} = \frac{dX(t_0)}{dt} + \frac{d^2 X(t_0)}{dt^2} t + \frac{1}{2!} \frac{d^3 X(t_0)}{dt^3} t^2 + \dots \quad (4)$$

Полагая в уравнении (2) $-k^2(1+m) = A$, $k^2 m_i = B_i$, $\frac{1}{r_i^3} = R_i^3$, $\frac{1}{\Delta_i^3} = S_i$, $\frac{1}{r^3} = R^3$,

$\frac{1}{r^4} = R^4$, $\frac{1}{r^5} = R^5$, $\dot{r}^2 = \dot{R}^2$, $\frac{k^2}{c^2} = K$, $K(4-2\alpha)k^2 = K_1$, $-K(1+\alpha) = K_2$, $K3\alpha = K_3$ и

$K(4-2\alpha) = K_4$, запишем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} = & AXR^3 + \sum_i B_i \left((X_i - X)S_i - X_i R_i^3 \right) + \\ & + K_1 R^4 X + K_2 \dot{R}^2 R^3 X + K_3 R^5 (X\dot{X})^2 X + K_4 R^3 (X\dot{X})\dot{X}. \end{aligned} \quad (5)$$

Дифференцируя соотношение (5), для вычисления производных можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+2} X}{dt^{n+2}} = & A \frac{d^n (XR^3)}{dt^n} + \sum_i B_i \left(\frac{d^n ((X_i - X)S_i)}{dt^n} - \frac{d^n (X_i R_i^3)}{dt^n} \right) + \\ & + K_1 \frac{d^n (R^4 X)}{dt^n} + K_2 \frac{d^n (\dot{R}^2 R^3 X)}{dt^n} + K_3 \frac{d^n (R^5 (X\dot{X})^2 X)}{dt^n} + K_4 \frac{d^n (R^3 (X\dot{X})\dot{X})}{dt^n} \end{aligned} \quad (6)$$

или, применяя формулу Лейбница, –

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+2} X}{dt^{n+2}} = & A \sum_{j=0}^n C_n^j \frac{d^{n-j} X}{dt^{n-j}} \frac{d^j R^3}{dt^j} + \sum_i B_i \left(\sum_{j=0}^n C_n^j \frac{d^{n-j} (X_i - X)}{dt^{n-j}} \frac{d^j S_i}{dt^j} - \sum_{j=0}^n C_n^j \frac{d^{n-j} X_i}{dt^{n-j}} \frac{d^j R_i^3}{dt^j} \right) + \\ & + K_1 \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{d^{n-i} (R^4)}{dt^{n-i}} \frac{d^i X}{dt^i} + K_2 \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{d^{n-i} (\dot{R}^2)}{dt^{n-i}} \sum_{j=0}^i C_i^j \frac{d^{i-j} (R^3)}{dt^{i-j}} \frac{d^j X}{dt^j} + \\ & + K_3 \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{d^{n-i} (R^5)}{dt^{n-i}} \sum_{j=0}^i C_i^j \frac{d^{i-j} ((X\dot{X})^2)}{dt^{i-j}} \frac{d^j X}{dt^j} + K_4 \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{d^{n-i} (R^3)}{dt^{n-i}} \sum_{j=0}^i C_i^j \frac{d^{i-j} (X\dot{X})}{dt^{i-j}} \frac{d^j \dot{X}}{dt^j}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для нахождения производных от степенных функций, входящих в (7), можно воспользоваться формулой [4]:

$$\frac{d^i P^m}{dt^i} = mP^{m-1} \frac{d^i P}{dt^i} + m(m-1)P^{m-2} \frac{d^{i-1} P}{dt^{i-1}} \frac{dP}{dt} + m(m-1)(m-2)P^{m-3} \frac{d^{i-2} P}{dt^{i-2}} \left(\frac{dP}{dt} \right)^2 + \dots + m(m-1)(m-2)\dots(m-i+1)P^{m-i} \left(\frac{dP}{dt} \right)^i. \quad (8)$$

Таким образом, задача вычисления координат и скоростей возмущаемого тела с учетом релятивистских эффектов решена. Используя (8), по формулам (7) последовательно вычисляются производные высоких порядков, и после подстановки полученных значений в соотношения (3) и (4) находятся координаты и скорости возмущаемого тела на следующем шаге.

Программа численного интегрирования уравнений движения больших планет методом Тейлора с учетом релятивистских эффектов. По изложенному алгоритму на языке C++ составлена программа численного интегрирования и проведено совместное численное интегрирование девяти больших планет на интервале времени 4808 дней. Уравнение (2) решалось как с учетом релятивистских эффектов, так и без их учета (как обычная задача n -тел). Начальные данные координат и скоростей совпадали с данными DE405 [5,6]. Результаты вклада релятивистских эффектов для планеты Меркурий показаны в таблице. Отдельно приведены элементы орбит, полученные с учетом (строка A1) и без учета (строка A2) релятивистских эффектов, а так же разность результатов (Δ), полученных методом Тейлора и методом Эверхарта[1]. Релятивистские члены в уравнении (2) при разложении в ряд Тейлора учитывались с точностью до второй производной.

Элементы орбит планеты Меркурий, вычисленные методом Тейлора и Эверхарта с учетом и без учета релятивистских эффектов

	M	ω	Ω	i	E	a
метод Тейлора						
A1	163.711985	29.0319101	48.3923593832	7.0017750553	0.2056290681	0.3870990495
A2	163.728064	29.0303657	48.3923594330	7.0017750511	0.2056289741	0.3870987288
Δ	0.016078	-0.0015443	0.0000000498	-0.0000000042	-0.0000000939	-0.0000003207
метод Эверхарта						
A1	163.726414	29.0319405	48.3923593861	7.0017750463	0.2056289723	0.3870987362
A2	163.728054	29.0303657	48.3923594493	7.0017750501	0.2056289743	0.3870987289
Δ	0.001640	-0.0015748	0.0000000632	0.0000000038	0.0000000020	-0.0000000073

Как видно из данных таблицы, элементы орбит Меркурия даже на незначительном интервале изменяются существенно. Поэтому при создании банка данных координат больших планет на интервале времени свыше 100 лет учет релятивистских эффектов необходим. Также можно сделать вывод, что явные методы менее устойчивы по сравнению с неявными, при этом даже небольшие погрешности в начальных данных могут привести к значительным погрешностям на конце интервала исследования, и при использовании явных методов численного интегрирования необходимо учитывать в ряде Тейлора производные более высокого порядка при учете релятивистских эффектов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Заусаев А.Ф., Заусаев А.А., Ольхин А.Г. Численное интегрирование уравнений движения больших планет (Меркурий–Плутон) и Луны с учетом радиолокационных наблюдений. //Вестн. Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. Вып.26. 2004. С.43–47
2. Бордовщина Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136с.
3. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972, 383с.
4. Алтынбаев Ф.Х. Численное интегрирование уравнений движения небесных объектов методом Тейлора с использованием банка данных координат и скоростей больших планет //Вестн. Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. Вып.19. 2003. С.42–47
5. Standish E.M., Newhall X.X., Williams J.G. and Folkner W.E. JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE403/LE403 // JPL IOM, 314, 1995, P10-127
6. Standish E.M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE405/LE405 // JPL IOM, 312, 1998, P1-18.

Поступила 12.01.2005 г.