Общероссийский математический портал

А. С. Ерёмин, Основные свойства смешанного матричного интеграла и смешанной матричной производной Римана–Лиувилля, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 38, 5–10

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu362>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:37:40

Дифференциальные уравнения

УДК 517.95

А. С. Еремин

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СМЕШАННОГО МАТРИЧНОГО ИНТЕГРАЛА И СМЕШАННОЙ МАТРИЧНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Вводится оператор смешанного матричного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля и изучаются его основные свойства. Находятся необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости двумерного матричного уравнения Абеля, доказывается свойство композиции смешанного матричного интеграла и смешанной матричной производной одного (матричного) порядка.

В различных отраслях науки и ее инженерных приложениях все чаще возникают дифференциальные уравнения дробного порядка [1,2]. Существует целый ряд обобщений оператора дробного интегро-дифференцирования (операторы типа Эрдейи-Кобера, Джбрашяна, дробные интегралы и производные Вейля и Чжэня, операторы со степенно-логарифмическим ядром, операторы М. Сайго и др.) [3]. В работах А. А. Андреева [4-6] операторы дробного интегро-дифференцирования обобщаются на случай матричного интегро-дифференцирования с помощью аппарата функции матриц [7]. В настоящей работе определение оператора матричного интегро-дифференцирования обобщается на случай смешанного интегро-дифференцирования.

Предварительно приведем три свойства функции матрицы [7].

1. Пусть $A \in M_n, f(z)$ — аналитическая функция с областью определения $D(f): A(A) \subset D(f)$. Тогда спектр $A(B)$ матрицы $B = f(A)$ состоит из чисел $\beta_i = f(\alpha_i)$, $\alpha_i \in A(A)$.

2. Если суперпозиция двух аналитических функций $g(z) = \varphi(f(z))$ определена на спектре матрицы G , то $g(G) = \varphi(f(G))$.

Пусть матрица $G \in M_2$, $f(G) = A$, тогда в силу свойств 1 и 2 матрица $\varphi(A) = \varphi(f(G))$ может быть записана в терминах матрицы G , ее собственных значений и собственных значений матрицы A :

$$\varphi(A) = \begin{cases} \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} \varphi(\alpha_1) + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} \varphi(\alpha_2), & \lambda_1 \neq \lambda_2, \alpha_1 = f(\lambda_1), \alpha_2 = f(\lambda_2); \\ E\varphi(\alpha_0) + (G - \lambda_0 E)\varphi'(\alpha_0)f'(\lambda_0), & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0, \alpha_0 = f(\lambda_0). \end{cases} \quad (1)$$

3. Пусть $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ — некоторые аналитические функции, определенные на спектре $A(G)$ матрицы G , и $\alpha(G) = A$, $\beta(G) = B$. Пусть $\varphi(z)$ — аналитическая функция с областью определения $D(\varphi): A(A) \cup A(B) \subset D(\varphi)$. Тогда матрицы $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ коммутативны и обе записываются в терминах матрицы G .

Пусть для определенности $f = f(x, y, z)$ — функция, аналитическая по каждой переменной, $\alpha(z), \beta(z)$ и $\gamma(z)$ — аналитические функции, определенные на спектре $A(G)$ матрицы $G \in M_2$, $A = \alpha(G)$, $B = \beta(G)$ и $C = \gamma(G)$. Тогда

$$f(A, B, C) = \begin{cases} \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} f(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), & \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ Ef(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) + (G - \lambda_0 E) \frac{df}{d\lambda}(\lambda_0), & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\frac{df}{d\lambda}(\lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \frac{d\alpha}{d\lambda}(\lambda_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \frac{d\beta}{d\lambda}(\lambda_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \frac{d\gamma}{d\lambda}(\lambda_0)$,

причем $f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ — определены для $i = 0, 1, 2$.

Итак, пусть $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ — некоторые аналитические функции, определенные на спектре $\Lambda(G)$ матрицы $G \in M_m$, и $\alpha(G) = A$, $\beta(G) = B$.

Для вектор-функции $\mathbf{f}(x) = (f_1; f_2; \dots; f_m)^T$ вектор $\mathbf{I}_{a+, c+}^{A, B} \mathbf{f}$ определяется по формуле:

$$\mathbf{I}_{a+, c+}^{A, B} \mathbf{f} \equiv \mathbf{D}_{a+, c+}^{-A, -B} \mathbf{f} = \sum_{k=1}^s \psi^k(G) \sum_{n=0}^{m_k-1} \frac{(G - \lambda_k E)^n}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\frac{I_{a+, c+}^{\alpha(\lambda), \beta(\lambda)} \mathbf{f}}{\psi^k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}, \quad (3)$$

где $\psi^k(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}$; $\psi(\lambda) = \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ — минимальный многочлен матрицы G ; $j = \overline{1, m_k}$;

$k = \overline{1, s}$, $I_{a+, c+}^{\alpha, \beta}$ — оператор смешанного дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля [3], а $\lambda_k \in \Lambda(G)$.

Из формулы (3) видно, что если $\Lambda(A) \cup \Lambda(B) \in \mathbb{C}^+$, то оператор $\mathbf{I}_{a+, c+}^{A, B}$ может ассоциироваться с дробным интегралом, а если $\Lambda(A) \cup \Lambda(B) \in \mathbb{C}^-$ — то с дробной производной.

Используя известные свойства функций $\psi^k(G)$ и матриц $(G - \lambda_k E)^n$, доказывается, что дробный интеграл $\mathbf{I}_{a+, c+}^{\alpha, \beta} \mathbf{f}$ может быть определен с помощью формулы

$$(\mathbf{I}_{a+, c+}^{\alpha, \beta} \mathbf{f})(x, y) = [\Gamma(A)\Gamma(B)]^{-1} \int_a^x \int_c^y (x-t)^{A-E} (y-s)^{B-E} \mathbf{f}(t, s) dt ds. \quad (4)$$

В дальнейшем $n_i = -[-\operatorname{Re} \alpha_i]$, $q_i = -[-\operatorname{Re} \beta_i]$, $k = \overline{1, s}$, $n = \max \{n_i\}$, $q = \max \{q_i\}$.

В силу тождества

$$D_{a+, c+}^{\alpha_i, \beta_i} \mathbf{f} = \frac{\partial^{n_i+q_i}}{\partial x^{n_i} \partial y^{q_i}} I_{a+, c+}^{n_i-\alpha_i, q_i-\beta_i} \mathbf{f} = \frac{\partial^{n_i+q_i}}{\partial x^{n_i} \partial y^{q_i}} \left\{ \frac{\partial^{n+q-n_i-q_i}}{\partial x^{n-n_i} \partial y^{q-q_i}} I_{a+, c+}^{n-n_i, q-q_i} \right\} I_{a+, c+}^{n_i-\alpha_i, q_i-\beta_i} \mathbf{f} = \frac{\partial^{n+q}}{\partial x^n \partial y^q} I_{a+, c+}^{n-\alpha_i, q-\beta_i} \mathbf{f}$$

определение дробной производной (3) можно записать через дробный интеграл

$$\mathbf{D}_{a+, c+}^{A, B} \mathbf{f} = \frac{\partial^{n+q}}{\partial x^n \partial y^q} \mathbf{I}_{a+, c+}^{nE-A, qE-B} \mathbf{f}. \quad (5)$$

В случае матриц второго порядка имеем:

$$\mathbf{I}_{a+, c+}^{A, B} \mathbf{f} = \begin{cases} \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} I_{a+, c+}^{\alpha_1, \beta_1} \mathbf{f} + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} I_{a+, c+}^{\alpha_1, \beta_1} \mathbf{f}, & \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ EI_{a+, c+}^{\alpha_0, \beta_0} \mathbf{f} + (G - \lambda_0 E) \frac{d}{d\lambda} I_{a+, c+}^{\alpha_0, \beta_0} \mathbf{f}, & \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda_0, \end{cases} \quad (6)$$

где $\frac{d}{d\lambda} I_{a+, c+}^{\alpha_0, \beta_0} \mathbf{f} = \frac{d\alpha}{d\lambda}(\lambda_0) \frac{\partial}{\partial \alpha} I_{a+, c+}^{\alpha_0, \beta_0} \mathbf{f} + \frac{d\beta}{d\lambda}(\lambda_0) \frac{\partial}{\partial \beta} I_{a+, c+}^{\alpha_0, \beta_0} \mathbf{f}$.

Непосредственным вычислением проверяется выполнение полугруппового свойства оператора матричного интегрирования. Пусть матрица $G \in M_m$, а $\alpha_1(z)$, $\beta_1(z)$, $\alpha_2(z)$, $\beta_2(z)$ — произвольные аналитические функции, определенные на спектре $\Lambda(G)$, $A_1 = \alpha_1(G)$, $A_2 = \alpha_2(G)$, $B_1 = \beta_1(G)$, $B_2 = \beta_2(G)$, спектры $\Lambda(A_1), \Lambda(B_1), \Lambda(A_2), \Lambda(B_2) \subset \mathbb{C}_+$. Тогда равенство

$$\mathbf{I}_{a+, c+}^{A_1, B_1} \mathbf{I}_{a+, c+}^{A_2, B_2} \mathbf{f} = \mathbf{I}_{a+, c+}^{A_1+A_2, B_1+B_2} \mathbf{f} \quad (7)$$

выполняется для любой вектор-функции $\mathbf{f}(x) \in L(\Omega)$.

Пусть матрицы $A, B \in M_m$, их спектры $\Lambda(A), \Lambda(B) \subset \mathbb{C}_+$. Систему интегральных уравнений

$$\mathbf{I}_{a+, c+}^{A, B} \varphi = \mathbf{f}(x, y), \quad (8)$$

где $(x, y) \in \Omega = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$, $\varphi(x, y)$ и $\mathbf{f}(x, y)$ — вектор-функции, будем называть *двумерным матричным уравнением Абеля*. Уравнение обобщает двумерное уравнение Абеля, решенное в работе [8].

Теорема 1. Пусть матрица $G \in M_m$, а $\alpha(z)$, $\beta(z)$ — произвольные аналитические функции, определенные на спектре $\Lambda(G)$, $A = \alpha(G)$, $B = \beta(G)$, и $\Lambda(A) \in \mathbb{C}_+$, $\Lambda(B) \in \mathbb{C}_+$.

Для того, чтобы уравнение (8) было разрешимо в $L(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \mathbf{f} \in AC^{n,q}(\overline{\Omega}), \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \mathbf{f} \right)(a, y) = 0 \quad (c < y < d, i = \overline{0, n-1}), \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial^k}{\partial y^k} \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \mathbf{f} \right)(x, c) = 0 \quad (a < x < b, k = \overline{0, q-1}), \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \mathbf{f} \right)(a, c) = 0 \quad (i = \overline{0, n-1}, k = \overline{0, q-1}). \quad (12)$$

При выполнении этих условий уравнение имеет единственное решение, определяемое формулой

$$\varphi(x, y) = \mathbf{D}_{a+,c+}^{A,B} \mathbf{f}. \quad (13)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (8) разрешимо в $L(\Omega)$, и $\varphi(x) \in L(\Omega)$ — его решение. Поскольку для спектров матриц $nE - A$ и $qE - B$ справедливы свойства $\Lambda(nE - A), \Lambda(qE - B) \subset C_+$, то $\mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B}$ — интегральный оператор.

Применим матричный оператор $\mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B}$ к обоим частям уравнения Абеля (8):

$$\mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \mathbf{I}_{a+,c+}^{A,B} \varphi = \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \mathbf{f}. \quad (14)$$

В силу формулы (7) имеем

$$\mathbf{I}_{a+,c+}^{nE,qE} \varphi = \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \mathbf{f}. \quad (15)$$

Поскольку $\varphi(x) \in L(\Omega)$, то из последнего равенства следует (9).

Дифференцируя (15) i раз по x ($i = \overline{0, n-1}$) и полагая $x = a$, получим (10). Дифференцируя (15) k раз по y ($k = \overline{0, q-1}$) и полагая $y = c$, получим (11). Наконец, дифференцируя (15) i раз по x ($i = \overline{0, n-1}$) и k раз по y ($k = \overline{0, q-1}$) и полагая $x = a$, $y = c$, получим (12). Необходимость доказана.

Дифференцируя (15) n раз по x и q раз по y , получим, что если решение $\varphi(x, y)$ существует, то оно необходимо имеет вид (13) и, следовательно, единственно.

Достаточность. Пусть выполняются условия (9)–(12). Тогда функция $\varphi(x, y)$, определяемая формулой (13), определена почти всюду и $\varphi(x, y) \in L(\Omega)$. Покажем, что $\varphi(x, y)$ — решение уравнения (8). Для этого подставим ее в левую часть (8) и обозначим результат через $\mathbf{g}(x, y)$:

$$\mathbf{g}(x, y) = \mathbf{I}_{a+,c+}^{A,B} \varphi. \quad (16)$$

Покажем, что почти всюду в Ω $\mathbf{g}(x, y) = \mathbf{f}(x, y)$, что и докажет теорему. Равенство (16) есть двумерное матричное уравнение Абеля относительно $\varphi(x, y)$. Оно заведомо разрешимо, поэтому, в силу уже доказанного,

$$\varphi(x, y) = \mathbf{D}_{a+,c+}^{A,B} \mathbf{g}. \quad (17)$$

Сравнивая (17) и (13), приходим к выводу, что почти всюду

$$\mathbf{D}_{a+,c+}^{A,B} \mathbf{g} = \mathbf{D}_{a+,c+}^{A,B} \mathbf{f}$$

или

$$\frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} (\mathbf{f} - \mathbf{g}) = 0. \quad (18)$$

Поскольку $\mathbf{I}_{a+,c+}^{n-A,q-B} \mathbf{f} \in AC^{n,m}(\overline{\Omega})$ по условию теоремы, а $\mathbf{I}_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} \mathbf{g} \in AC^{n,m}(\overline{\Omega})$ согласно формуле (16), то $\mathbf{I}_{a+,c+}^{n-\alpha,m-\beta} (\mathbf{f} - \mathbf{g}) \in AC^{n,m}(\overline{\Omega})$, и из теории абсолютно непрерывных в области функций [9] следует, что

$$\begin{aligned}
I_{a+,c+}^{n-A,q-B}(\mathbf{f}-\mathbf{g}) &= \frac{1}{(n-1)!(m-1)!} \int_a^x \int_c^y (x-t)^{n-1} (y-s)^{m-1} (\mathbf{f}_{n-A,q-B}^{(n,m)}(t,s) - \mathbf{g}_{n-A,q-B}^{(n,m)}(t,s)) dt ds + \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\mathbf{f}_{n-A,q-B}^{(i,0)}(a,y) - \mathbf{g}_{n-A,q-B}^{(i,0)}(a,y))}{i!} (x-a)^i + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\mathbf{f}_{n-A,q-B}^{(0,k)}(x,c) - \mathbf{g}_{n-A,q-B}^{(0,k)}(x,c))}{k!} (y-c)^k - \\
&- \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\mathbf{f}_{n-A,q-B}^{(i,k)}(a,c) - \mathbf{g}_{n-A,q-B}^{(i,k)}(a,c))}{i!k!} (x-a)^i (y-c)^k.
\end{aligned} \quad (19)$$

Согласно (18) $\mathbf{f}_{n-A,q-B}^{(n,m)}(t,s) - \mathbf{g}_{n-A,q-B}^{(n,m)}(t,s) = 0$. Из того, что (16) — разрешимое уравнение, следует,

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{n-A,q-B}^{(i,0)}(a,y) &= 0, \quad i = \overline{0, n-1}, \\
\mathbf{g}_{n-A,q-B}^{(0,k)}(x,c) &= 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \\
\mathbf{g}_{n-A,q-B}^{(i,k)}(a,c) &= 0, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad k = \overline{0, m-1}.
\end{aligned}$$

С учетом этих формул и формул (10)–(12), равенство (19) запишется в виде

$$I_{a+,c+}^{nE-A,qE-B}(\mathbf{f}-\mathbf{g}) = 0. \quad (20)$$

Последнее равенство является однородным уравнением Абеля. Очевидно, что это уравнение разрешимо (и имеет тривиальное решение $\mathbf{f}-\mathbf{g}=0$). С другой стороны, в силу уже доказанного, это тривиальное решение единственно. Поэтому почти всюду в Ω

$$\mathbf{f}(x,y) - \mathbf{g}(x,y) = 0.$$

Теорема доказана.

Обозначим через $AC^{A,B}(\overline{\Omega})$ класс вектор-функций $\mathbf{f}(x,y) \in L(\Omega)$ таких, что $I_{a+,c+}^{nE-A,qE-B}\mathbf{f} \in AC^{n,m}(\overline{\Omega})$:

$$AC^{A,B}(\overline{\Omega}) = \{\mathbf{f}(x,y) \in L(\Omega) : I_{a+,c+}^{nE-A,qE-B}\mathbf{f} \in AC^{n,m}(\overline{\Omega})\}.$$

В частном случае матриц A, B , когда $n=1, q=1$, из теоремы 1 имеем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть матрица $G \in M_m$, а $\alpha(z), \beta(z)$ — произвольные аналитические функции, определенные на спектре $\Lambda(G)$, такие, что $0 < \operatorname{Re} \alpha(\lambda_i) \leq 1, 0 < \operatorname{Re} \beta(\lambda_i) \leq 1, A = \alpha(G), B = \beta(G)$. Тогда для того чтобы уравнение (8) было разрешимо в $L(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{f}(x,y) \in AC^{A,B}(\overline{\Omega}) \quad (21)$$

и выполнялись равенства

$$(\mathbf{I}_{a+,c+}^{E-A,0}\mathbf{f})(a,y) = (\mathbf{I}_{a+,c+}^{0,E-B}\mathbf{f})(x,c) = 0. \quad (22)$$

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 3. Пусть все собственные числа λ_k ($k = \overline{1,s}$) матрицы $G \in M_m$ действительны, $\alpha(z), \beta(z)$ — произвольные аналитические функции, определенные на спектре $\Lambda(G)$, такие, что $\operatorname{Re} \alpha(\lambda_k) > 0, \operatorname{Re} \beta(\lambda_k) > 0$ ($k = \overline{1,s}$), $A = \alpha(G), B = \beta(G)$, T — матрица, приводящая матрицу G к Жордановой форме, и $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s\}^T = \mathbf{g} = T^{-1}\mathbf{f}$. Тогда условия (9)–(12) теоремы 1 эквивалентны условиям

$$\mathbf{I}_{a+,c+}^{n_k E - J_k(A), q_k E - J_k(B)} \mathbf{g}_k \in AC^{n_k, q_k}(\overline{\Omega}), \quad (k = \overline{1,s}), \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathbf{I}_{a+,c+}^{n_k E - J_k(A), q_k E - J_k(B)} \mathbf{g}_k \right)(a,y) = 0 \quad (c < y < d, k = \overline{1,s}, i = \overline{0, n_k - 1}), \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial^j}{\partial y^j} \mathbf{I}_{a+,c+}^{n_k E - J_k(A), q_k E - J_k(B)} \mathbf{g}_k \right)(x,c) = 0 \quad (a < x < b, k = \overline{1,s}, j = \overline{0, q_k - 1}), \quad (25)$$

$$\left(\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \mathbf{I}_{a+,c+}^{n_k E - J_k(A), q_k E - J_k(B)} \mathbf{g}_k \right)(a,c) = 0 \quad (k = \overline{1,s}, i = \overline{0, n_k - 1}, j = \overline{0, q_k - 1}), \quad (26)$$

где $n_k = -[-\operatorname{Re} \alpha(\lambda_k)], q_k = -[-\operatorname{Re} \beta(\lambda_k)]$.

Следующая теорема определяет формулы композиции оператора смешанного матричного интегрирования и дифференцирования одного порядка.

Теорема 4. Пусть матрица $G \in M_m$, а $\alpha(z)$, $\beta(z)$ — произвольные аналитические функции, определенные на спектре $\Lambda(G)$, $A = \alpha(G)$, $B = \beta(G)$, и $\Lambda(A) \in C_+$, $\Lambda(B) \in C_+$. Равенство

$$\mathbf{D}_{a+,c+}^{A,B} \mathbf{I}_{a+,c+}^{A,B} \mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y) \quad (27)$$

выполняется почти всюду для любой суммируемой функции, а равенство

$$\mathbf{I}_{a+,c+}^{A,B} \mathbf{D}_{a+,c+}^{A,B} \mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y), \quad (28)$$

— для функции $\mathbf{f}(x, y) \in \mathbf{I}_{a+,c+}^{A,B}(L_1)$. Для любой функции $\mathbf{f}(x, y) \in AC^{A,B}(\overline{\Omega})$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{a+,c+}^{A,B} \mathbf{D}_{a+,c+}^{A,B} \mathbf{f} &= \mathbf{f}(x, y) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{A-(i+1)E}}{\Gamma(A-iE)} \mathbf{f}_{nE-A,0}^{(n-i-1,0)}(a, y) - \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(y-c)^{B-(k+1)E}}{\Gamma(B-kE)} \mathbf{f}_{0,qE-B}^{(0,m-k-1)}(x, c) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(x-a)^{A-(i+1)E} (y-c)^{B-(k+1)E}}{\Gamma(A-iE) \Gamma(B-kE)} \mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(n-i-1,m-k-1)}(a, c), \end{aligned} \quad (29)$$

где $\mathbf{f}_{nE-A,qE-B}(x, y) = \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \mathbf{f}$, $n = \max\{n_i\}$, $q = \max\{q_i\}$ ($n_i = -[-\operatorname{Re} \alpha_i]$, $q_i = -[-\operatorname{Re} \beta_i]$, $k = \overline{1, s}$).

Доказательство проводится аналогично одномерному скалярному случаю [3]. Докажем здесь только формулу (29). Пусть теперь $\mathbf{f}(x, y) \in AC^{A,B}(\overline{\Omega})$, или $\mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \mathbf{f} \in AC^{n,m}(\overline{\Omega})$. Из теории абсолютно непрерывных в области функций [9] следует, что интеграл $\mathbf{f}_{nE-A,qE-B}(x, y) = \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \mathbf{f}$ представим в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \mathbf{f} &= I_{a+,c+}^{n,q} \mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(n,q)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(i,0)}(a, y)}{i!} (x-a)^i + \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(0,k)}(x, c)}{k!} (y-c)^k - \\ &- \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(i,k)}(a, c)}{i!k!} (x-a)^i (y-c)^k. \end{aligned} \quad (30)$$

В силу полугруппового свойства имеем

$$I_{a+,c+}^{n,q} \mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(n,q)} = \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \mathbf{I}_{a+,c+}^{A,B} \mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(n,m)} = \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} (\mathbf{I}_{a+,c+}^{A,B} \mathbf{D}_{a+,c+}^{A,B} \mathbf{f}). \quad (31)$$

Непосредственно проверяется справедливость равенства

$$\mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \left(\frac{(x-a)^{(i-n)E+A}}{\Gamma((i-n+1)E+A)} \mathbf{f}_{nE-A,0}^{(i,0)}(a, y) \right) = \frac{\mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(i,0)}(a, y)}{i!} (x-a)^i.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(i,0)}(a, y)}{i!} (x-a)^i \in \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B}(L_1),$$

и, в силу уже доказанного,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(i,0)}(a, y)}{i!} (x-a)^i &= \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \mathbf{D}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \frac{\mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(i,0)}(a, y)}{i!} (x-a)^i = \\ &= \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \left(\frac{(x-a)^{(i-n)E+A}}{\Gamma((1+i-n)+A)} \mathbf{f}_{nE-A,0}^{(i,0)}(a, y) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(i,0)}(a, y)}{i!} (x-a)^i = \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{(i-n)E+A}}{\Gamma((1+i-n)+A)} \mathbf{f}_{nE-A,0}^{(i,0)}(a, y) \right). \quad (33)$$

Откуда, переобозначая индекс суммирования, получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(i,0)}(a, y)}{i!} (x-a)^i = \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{A-(i+1)E}}{\Gamma(A-iE)} \mathbf{f}_{nE-A,0}^{(n-i-1,0)}(a, y) \right). \quad (34)$$

Аналогично получается равенство

$$\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathbf{f}_{nE-A,qE-B}^{(0,k)}(x, c)}{k!} (y-c)^k = \mathbf{I}_{a+,c+}^{nE-A,qE-B} \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{(y-c)^{B-(k+1)E}}{\Gamma(B-kE)} \mathbf{f}_{0,qE-B}^{(0,m-k-1)}(x, c) \right). \quad (35)$$

Непосредственным вычислением получается, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathbf{f}_{nE-A, qE-B}^{(i,k)}(a, c)}{i!k!} (x-a)^i (y-c)^k = \mathbf{I}_{a+, c+}^{nE-A, qE-B} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(x-a)^{A-(i+1)E} (y-c)^{B-(k+1)E}}{\Gamma(A-iE)\Gamma(B-kE)} \mathbf{f}_{nE-A, qE-B}^{(n-i-1, m-k-1)}(a, c) \right). \quad (36)$$

С учетом (31), (34)–(36) равенство (30) запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{a+, c+}^{nE-A, qE-B} \mathbf{f} &= \mathbf{I}_{a+, c+}^{nE-A, qE-B} \mathbf{I}_{a+, c+}^{A, B} \mathbf{D}_{a+, c+}^{A, B} \mathbf{f} + \mathbf{I}_{a+, c+}^{nE-A, qE-B} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{A-(i+1)E}}{\Gamma(A-iE)} \mathbf{f}_{nE-A, 0}^{(n-i-1, 0)}(a, y) \right) + \\ &+ \mathbf{I}_{a+, c+}^{nE-A, qE-B} \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{(y-c)^{B-(k+1)E}}{\Gamma(B-kE)} \mathbf{f}_{0, qE-B}^{(0, m-k-1)}(x, c) \right) - \\ &- \mathbf{I}_{a+, c+}^{nE-A, qE-B} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(x-a)^{A-(i+1)E} (y-c)^{B-(k+1)E}}{\Gamma(A-iE)\Gamma(B-kE)} \mathbf{f}_{nE-A, qE-B}^{(n-i-1, m-k-1)}(a, c) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Получаем однородное двумерное матричное уравнение Абеля

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{a+, c+}^{nE-A, qE-B} \left(\mathbf{f} - \mathbf{I}_{a+, c+}^{A, B} \mathbf{D}_{a+, c+}^{A, B} \mathbf{f} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{A-(i+1)E}}{\Gamma(A-iE)} \mathbf{f}_{nE-A, 0}^{(n-i-1, 0)}(a, y) - \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(y-c)^{B-(k+1)E}}{\Gamma(B-kE)} \mathbf{f}_{0, qE-B}^{(0, m-k-1)}(x, c) + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(x-a)^{A-(i+1)E} (y-c)^{B-(k+1)E}}{\Gamma(A-iE)\Gamma(B-kE)} \mathbf{f}_{nE-A, qE-B}^{(n-i-1, m-k-1)}(a, c) \right) = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

которое, как было показано в ходе доказательства теоремы 1, имеет единственное тривиальное решение

$$\begin{aligned} \mathbf{f} - \mathbf{I}_{a+, c+}^{A, B} \mathbf{D}_{a+, c+}^{A, B} \mathbf{f} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{A-(i+1)E}}{\Gamma(A-iE)} \mathbf{f}_{nE-A, 0}^{(n-i-1, 0)}(a, y) - \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(y-c)^{B-(k+1)E}}{\Gamma(B-kE)} \mathbf{f}_{0, qE-B}^{(0, m-k-1)}(x, c) + \\ + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(x-a)^{A-(i+1)E} (y-c)^{B-(k+1)E}}{\Gamma(A-iE)\Gamma(B-kE)} \mathbf{f}_{nE-A, qE-B}^{(n-i-1, m-k-1)}(a, c) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Podlubny I. Fractional differential equations// Mathematics in Sciences and Engineering. 1999. Vol. 198. P. 1–89.
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Fractional differential equations: An emergent field in applied and mathematical sciences// Factorization, Singular Operators and Related Problems. Proceedings of the Conference in Honour of Professor Georgii Litvinchuk / Ed. by S. Samko, A. Lebre, A. Santos; Kluwer. Dordrecht-Boston-London: 2003. P. 151–173.
3. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
4. Андреев А. А. Об одном обобщении операторов дробного интегро-дифференцирования и его приложениях// Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики. Матер. всесоюзной конф. Владивосток: 1990. С. 91.
5. Андреев А. А., Огородников Е. Н. Матричные интегро-дифференциальные операторы и их применение // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 1999. № 7. С. 27–37.
6. Еремин А. С., Андреев А. А. Краевая задача для уравнения с матричным интегро-дифференциальным оператором // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2004. № 26. 2004. С. 5–11.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 670 с.
8. Vasilache S. Asupra unei ecuatii integrale de tip abel cu doua variabile// Comun. Acad. R. P. Romane. 1953. Vol. 3, No. 3-4. P. 109–113.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: ОГИЗ, Т. 5. 1947. 584 с.

Поступила 3.07.2005 г.