Общероссийский математический портал

А. Асанов, З. А. Каденова, Регуляризация и устойчивость систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 38, 11–14

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 08:24:47

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

Рассмотрены системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Построены регуляризующие системы уравнений в пространстве $L_2([a, b]; E_n)$ и получены оценки устойчивости для решений системы уравнений на разных семействах множеств корректности.

Рассмотрим систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода:

$$Ku \equiv \int_a^b K(t, s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

где

$$K(t, s) = \begin{cases} A(t, s), & a \leq s \leq t \leq b; \\ B(t, s), & a \leq t \leq s \leq b. \end{cases} \quad (2)$$

$$K(t, s) = (K_{ij}(t, s)), A(t, s) = (A_{ij}(t, s)), B(t, s) = (B_{ij}(t, s)) \in L_2([a, b] \times [a, b]; M), \\ u(t) = (u_i(t)), f(t) = (f_i(t)) \in L_2([a, b]; E_n).$$

Множество сильно измеримых [4] операторных функций $K(t, s)((t, s) \in (a, b) \times (a, b), -\infty < a < b < \infty)$ таких, что $K(t, s) \in M$ почти всюду и

$$\int_a^b \int_a^b \|K(t, s)\|^2 ds dt < \infty, \quad (3)$$

обозначим через $L_2([a, b] \times [a, b]; M)$. Определяя скалярное произведение элементов $K(t, s), F(t, s) \in L_2([a, b] \times [a, b]; M)$ формулой $[K(t, s), F(t, s)] = \int_a^b \int_a^b [K(t, s), F(t, s)] ds dt$, получаем гильбертово пространство. Это скалярное произведение приводит к определению нормы $\|K(t, s)\|$ элемента $K(t, s) \in L_2([a, b] \times [a, b]; M)$ согласно формуле

$$\|K(t, s)\| = \left(\int_a^b \int_a^b \|K(t, s)\|^2 ds dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Множество сильно измеримых векторных функций $u(t) \quad (t \in [a, b])$ таких, что $u(t) \in R^n$ почти всюду и

$$\int_a^b \|u(t)\|^2 dt < \infty \quad (4)$$

обозначим через $L_2([a, b]; E_n)$. Определяя скалярное произведение элементов $u(t), \vartheta(t) \in L_2([a, b])$ формулой

$$[u(t), \vartheta(t)] = \int_a^b [u(t), \vartheta(t)] dt,$$

получаем гильбертово пространство. Это скалярное произведение приводит к определению нормы $\|u(t)\|$ элемента $u(t) \in L_2[a, b]$ по формуле

$$\|u(t)\| = \left(\int_a^b \|u(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Различные вопросы для интегральных уравнений Вольтерра первого рода ранее изучались в [1, 2], где были доказаны теоремы единственности, устойчивости и регуляризации. Доказана теорема единственности решения системы уравнений (1) в пространстве $L_2([a, b]; E_n)$ в [3],

в настоящей работе рассматриваются вопросы о регуляризации решения и построения регуляризирующих уравнений в пространстве $L_2([a, b]; E_n)$.

В дальнейшем будем считать, что все собственные значения оператора $A = K + K^*$ положительны. В силу вполне непрерывности и самосопряженности оператора A , ортонормированная последовательность собственных вектор-функций $\{\varphi^{(v)}(t)\}$ полна в $L_2([a, b]; E_n)$.

Пусть последовательность соответствующих собственных значений $\{\lambda_v\}$ расположена в порядке убывания их модулей.

I. Семейство множеств корректности, зависящее от параметра α , выделим следующим образом:

$$M_\alpha = \left\{ u(t) \in L_2([a, b]; E_n) : \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{-\alpha} |u^{(v)}|^2 \leq c \right\},$$

где $c > 0$, $0 < \alpha < \infty$, $u^{(v)} = [u(t), \varphi^{(v)}(t)]_{L_2}$, $(v = 1, 2, \dots)$.

Так как

$$u^{(v)} = \int_a^b [u(t), \varphi^{(v)}(t)]_{L_2} dt, \quad (5)$$

то ясно, что если $u(t) \in M_\alpha$, имеем

$$\|u(t)\| \leq c \lambda_1^\alpha.$$

Будем предполагать, что $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда системы (1) имеет решение $u(t) \in M_\alpha$ и справедливо

$$\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v \left| \int_a^b [u(t), \varphi^{(v)}(t)]_{L_2} dt \right|^2 = \int_a^b [f(t), u(t)]_{L_2} dt.$$

Отсюда

$$\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v |u^{(v)}|^2 \leq \|f(t)\| \cdot \|u(t)\|. \quad (6)$$

С другой стороны,

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{|u^{(v)}|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_v^{\frac{2}{1+\alpha}}} \cdot \lambda_v^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} |u^{(v)}|^{\frac{2}{1+\alpha}} \leq \left(\sum_{v=1}^{\infty} \frac{|u^{(v)}|^2}{\lambda_v^\alpha} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v |u^{(v)}|^2 \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера при $p = 1 + \alpha$, $q = (1 + \alpha)/\alpha$. Учитывая $u(t) \in M_\alpha$, из последнего неравенства имеем

$$\|u(t)\| \leq c^{\frac{1}{1+\alpha}} \left[\|f(t)\| \|u(t)\| \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

откуда получим следующую оценку устойчивости:

$$\|u(t)\|_{L_2} \leq c^{\frac{1}{2+\alpha}} \cdot \|f(t)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \quad (7)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть оператор $A = K + K^*$ положительный. Тогда решение системы (1) в $L_2([a, b]; E_n)$ единственно. Кроме того, на множестве $K(M_\alpha)$ ($K(M_\alpha)$) — образ M_α при отображении оператором K) оператор K^{-1} , обратный к K , равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, то есть справедливо оценка (7).

Покажем, что решение системы уравнений

$$\varepsilon u(t, \varepsilon) + \int_a^b K(t, s) u(s, \varepsilon) ds = f(t), \quad t \in (a, b), \varepsilon > 0 \quad (8)$$

будет регуляризирующим для системы уравнений (1) на множестве M_α .

В самом деле, сделаем следующую подстановку в системе (8):

$$u(t, \varepsilon) = u(t) + \xi(t, \varepsilon),$$

где $u(t) \in M_\alpha$ — решение системы (1). В результате получим

$$\varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_a^b K(t, s) \xi(s, \varepsilon) ds = -\varepsilon u(t).$$

Отсюда

$$\varepsilon \|\xi(t, \varepsilon)\|^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |\xi_\nu(\varepsilon)|^2 \leq \varepsilon \sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)|, \quad (9)$$

где $\xi_\nu(\varepsilon)$ — коэффициенты Фурье для функции $\xi(t, \varepsilon)$, по ортонормированной системе $\{\varphi^{(\nu)}(t) = (\varphi_i^{(\nu)}(t))\}$. Применяя неравенство Гёльдера при $p = q = \frac{1}{2}$, из (9) находим

$$\|\xi(t, \varepsilon)\| \leq \|u(t)\|; \quad (10)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |\xi_\nu(\varepsilon)|^2 \leq \varepsilon \|u(t)\|^2 \leq \varepsilon c \lambda_1^\alpha, \varepsilon > 0. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\xi_\nu(\varepsilon)|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}} \cdot \lambda_\nu^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} |u^{(\nu)}|^{\frac{1}{1+\alpha}} |\xi_\nu(t, \varepsilon)|^{\frac{1}{1+\alpha}} |u^{(\nu)}|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда, после использования в правой части обобщенного неравенства Гёльдера значений $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q = 2(1+\alpha)$, $m = 2(1+\alpha)$, $n = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)| &\leq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu(\varepsilon)|^2 \lambda_\nu \right)^{\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|u^{(\nu)}|^2}{\lambda_\nu^\alpha} \right)^{\frac{1}{(1+\alpha)^2}} \|\xi(t, \varepsilon)\|^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} \|u(t)\|^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}; \\ \sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)| &\leq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu |\xi_\nu(\varepsilon)|^2 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|u^{(\nu)}|^2}{\lambda_\nu^\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} \|\xi(t, \varepsilon)\|^{\frac{1}{q}} \|u(t)\|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Далее, в силу $u(t) \in M_\alpha$ и соотношений (10) и (11), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)| &\leq (\varepsilon c \lambda_1^\alpha)^{\frac{1}{p}} c^{\frac{1}{q}} \|u(t)\|^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}}, \\ \sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)| &\leq (\varepsilon c \lambda_1^\alpha)^{\frac{1}{p}} c^{\frac{1}{q}} (c \lambda_1^\alpha)^{\frac{p+q}{2pq}}. \end{aligned}$$

Отсюда, подставляя $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q = 2(1+\alpha)$, находим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)| \leq c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} \cdot (c \lambda_1^\alpha)^{\frac{1}{4}} \cdot (\varepsilon c \lambda_1^\alpha)^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}, \quad (12)$$

то есть

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)| &\leq c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} \cdot c^{\frac{1}{4}} \cdot c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \cdot \lambda_1^{\frac{\alpha}{4}} \lambda_1^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}; \\ \sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}| |\xi_\nu(\varepsilon)| &\leq c^{\frac{3}{4}} \cdot \lambda_1^{\frac{\alpha(\alpha+3)}{4(1+\alpha)}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая (13), из (9) имеем

$$\|u(t, \varepsilon) - u(t)\|_{L_2} \leq c^{\frac{3}{8}} \cdot \lambda_1^{\frac{\alpha(\alpha+3)}{8(1+\alpha)}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \quad (14)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть оператор $A = K + K^*$ положительный и $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда справедлива оценка (14), где $u(t, \varepsilon)$ — решение системы (7), $u(t)$ — решение системы (1).

II. Семейство множеств корректностей $M_{\alpha\beta}$ выделим следующим образом:

$$M_{\alpha\beta} = \left\{ u(t) \in L_2([a, b]; E_n) : \|u(t)\|^\beta \leq c_0 \sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}|^2, \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^{-\alpha} |u^{(v)}|^2 \leq c \right\},$$

где $c_0 > 0, c > 0, 0 < \alpha < \infty, \frac{\alpha}{1+\alpha} < \beta < \infty, u^{(v)} = [u(t), \varphi^{(v)}(t)]_{L_2}, (v = 1, 2, \dots)$.

Так как

$$u^{(v)} = \int_a^b [u(t), \varphi^{(v)}(t)]_{L_2} dt.$$

Предположим, что $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда система (1) имеет решение $u(t) \in M_{\alpha\beta}$ и справедливо

$$\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v |u^{(v)}|^2 \leq \|f(t)\| \|u(t)\|. \quad (15)$$

С другой стороны,

$$\sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}|^2 \leq \left(\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v |u^{(v)}|^2 \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(\sum_{v=1}^{\infty} \frac{|u^{(v)}|^2}{\lambda_v^\alpha} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}; \quad (16)$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}|^2 \leq (\|f(t)\| \|u(t)\|)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} c^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (17)$$

Далее, учитывая (15), (17) и что $u(t) \in M_{\alpha\beta}$, получим

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^\beta &\leq c_0 \sum_{v=1}^{\infty} |u^{(v)}|^2, \\ \|u(t)\|^\beta &\leq c_0 c^{\frac{1}{1+\alpha}} (\|f(t)\| \|u(t)\|)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \\ \|u(t)\|^\beta &\leq c_0 c^{\frac{1}{1+\alpha}} \|f(t)\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \|u(t)\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \\ \|u(t)\|^{\frac{\beta+\beta\alpha-\alpha}{1+\alpha}} &\leq c_0 c^{\frac{1}{1+\alpha}} \|f(t)\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \left[c_0 c^{\frac{1}{1+\alpha}} \|f(t)\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right]^{\frac{1+\alpha}{\beta+\beta\alpha-\alpha}}, \\ \|u(t)\| &\leq \left[c_0 c^{\frac{1}{1+\alpha}} \right]^{\frac{1+\alpha}{\beta+\beta\alpha-\alpha}} \|f(t)\|^{\frac{\alpha}{\beta+\beta\alpha-\alpha}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть оператор $A = K + K^*$ положительный, $K(M_{\alpha\beta}) \subset L_2([a, b], E_n)$ — образ $M_{\alpha\beta}$ при отображении K . Тогда на множестве $K(M_{\alpha\beta})$ существует равномерно непрерывный оператор K^{-1} , обратный к K , т.е. справедлива оценка (19).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лаврентьев М.М. Регуляризация операторных уравнений типа Вольтера // Проблемы математической физики и вычислительной математики. Сб. науч. трудов. М: Наука, 1977. С. 199–205.
2. Асанов А. Об одном классе систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Функциональный анализ и его приложения, 1983. Т. 19, вып. 4. С. 73–74.
3. Асанов А, Каденова З.А. Об одном классе систем интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2002. Вып. 31. С. 172–182.
4. Талдыкин А.Т. Векторные функции и уравнения. Л.: ЛГУ, 1977. 242 с.

Поступила 25.05.2005 г.