Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Ваенский, Геометрические методы теплопроводности, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2000, выпуск 9, 115–123

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu37>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:19:54

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассматриваются новые подходы к приемам изображений и суперпозиции, позволяющие значительно расширить возможности метода источников при расчетах нестационарной теплопроводности.

Под геометрическими методами теплопроводности понимаются такие методы расчета температур, которые предусматривают те или иные геометрические построения. В частности, к этим методам относятся широко известные метод изображений и метод суперпозиции.

1. Традиционно при использовании метода изображений искомое ограниченное тело путем построения отраженных источников достраивают до неограниченного тела, т.е. расчет температур в ограниченном теле сводят к более простым расчетам в неограниченном теле. Однако ограниченное тело, например клин, таким же образом, т.е. путем построения отраженных источников, можно достроить до другого ограниченного тела, для которого известно температурное распределение, например, до клина с углом раствора $\theta_0 = 2\pi$. Это существенно расширяет возможности метода изображений. Так, например, при переходе к неограниченному телу удастся рассчитать температуры в клиньях с углом раствора π/n при адиабатических и изотермических ($T_0 = 0$) условиях на границах и в клиньях с углом раствора $\pi/2n$ при смешанных граничных условиях. Здесь n - числа 2, 3, 4, 5 и т.д. При переходе к клину $\theta_0 = 2\pi$ можно рассчитать температуры в клиньях с углом раствора $\theta_0 = 2\pi/n$ при одинаковых условиях на границах и в клиньях $\theta_0 = \pi/n$ при смешанных граничных условиях. Построение отраженных источников при переходе от клина $\theta_0 = 2\pi/3$ к клину $\theta_0 = 2\pi$ показано на рис. 1. Здесь и далее адиабатические границы условно будем обозначать знаком "+", а изотермические ($T_0 = 0$) - знаком "-".

Температурное распределение в клине $\theta_0 = 2\pi$ с адиабатическими и изотермическими ($T_0 = 0$) границами имеет простой и явный вид [1].

2. Вместо изображений источников можно использовать изображения точки поиска, т.е. точки, для которой осуществляется расчет температур. В этом случае искомую температуру получают суперпозицией температур от действительного источника в действительной и отраженных точках поиска. Правила построения последних аналогичны известным правилам построения отраженных источников, причем знаки температур в отраженных точках поиска выбирают так, чтобы при перенесении действительной точки поиска на границу суперпозиция температур в действительной и отраженных точках поиска обеспечивала бы заданные условия на границе

искомого тела. Такой подход получил название метода изображения точки поиска.

Р и с. 1. Построение отраженных источников при переходе от клина $\theta_0 = 2\pi/3$ к клину с $\theta_0 = 2\pi$

Р и с. 2. Переход от полуограниченного тела (а) к неограниченному методом изображения точки поиска (б) и получение температурного распределения полуограниченного тела перегибом неограниченного (в)

Проиллюстрируем метод на простейшем примере. Температура в точке 1 полуограниченного тела с адиабатической границей и нулевой начальной температурой от линейного источника l (рис. 2, а) может быть определена как сумма температур в действительной точке 1' и отраженной точке 2' неограниченного тела с таким же источником (рис.2, б). В случае нулевых условий на границе полуограниченного тела температуру в точке 2' следует взять с обратным знаком.

Физический смысл изображений точки поиска состоит в том, что температурное поле какого-либо тела может быть получено перегибами температурного распределения другого, большего по размерам тела, для которого известно решение температурной задачи, и наложением образованных перегибами частей поля друг на друга с условием соблюдения заданных граничных и начальных условий. При этом действительная и отраженные точки поиска накладываются друг на друга. Простейший пример перегиба показан на рис. 2, в. Таким образом, метод изображения точки поиска и метод перегиба, который иногда применяется в расчетах распространения волн [2], - это однозначные методы, однако первый более удобен в графическом исполнении.

Как известно, метод изображения источников не может быть использован в задачах с источниками заданной температуры, поскольку последние не могут находиться внутри тела [3]. Метод изображения точки поиска не зависит от типа источника и может быть использован в задачах как с заданными тепловыми потоками, так и с заданными температурами.

Рассмотрим решения некоторых задач с источниками заданной температуры методом изображения точки поиска.

Температурное распределение в неограниченной пластине толщиной l с температурой T_0 на поверхности $x=0$ и нулевой начальной температурой легко может быть получено из температурного поля для полуограниченного тела с такими же граничными и начальными условиями. Для этого достаточно просуммировать температуры в действительной и отраженных точках поиска с учетом знаков, которые определяются условиями на второй границе пластины. При нулевых условиях на второй границе пластины знаки в отраженных точках чередуются (рис.3, а). Таким образом, температура T в любой точке 1 пластины может быть определена как сумма температур в точках 1, 2, 3 ... для полуограниченного тела:

$$T_a = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + \dots + T_n - \dots \quad (1)$$

Р и с. 3. Построение отраженных точек поиска при переходе от пластины толщиной l к неограниченному телу при изотермической ($T_0=0$) границе при $x=l$ (а) и адиабатической (б)

Р и с.4.Изображения точек поиска при переходе к полуограниченному телу от клина $\theta_0=\pi/3$ с температурой T_0 на границах и нулевой начальной температурой

Поскольку $T_n = T_0 \operatorname{erfc} x_n / (2\sqrt{at})$, то

$$T_a = T_0 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{erfc} \frac{2ml + x}{2\sqrt{at}} - \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{erfc} \frac{2ml - x}{2\sqrt{at}} \right]. \quad (2)$$

В случае адиабатических условий на второй границе пластины знаки температур в точках 1, 2, 3... будут чередоваться попарно. Тогда

$$T_{\theta} = T_0 \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \operatorname{erfc} \frac{2ml + x}{2\sqrt{at}} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \operatorname{erfc} \frac{2ml - x}{2\sqrt{at}} \right]. \quad (3)$$

Из того же температурного распределения для полуограниченного тела можно получить решение для неограниченного клина с углом раствора $\theta_0 = \pi/n$, где $n = 3, 5, 7$ и т.д. с начальной температурой, равной нулю, и температурой T_0 на границах. Изображения точек поиска для клина $\theta_0 = \pi/3$ показаны на рис. 4. В общем случае

$$T = T_0 \left[\sum_{m=0}^{(n-1)/2} \operatorname{erfc} \frac{R \sin(2m\theta_0 + \theta)}{2\sqrt{at}} - \sum_{m=1}^{(n-1)/2} \operatorname{erfc} \frac{R \sin(2m\theta_0 - \theta)}{2\sqrt{at}} \right]. \quad (4)$$

Используя в качестве исходного температурное распределение для клина с углом раствора $\theta_0 = \pi/2$, получим решения для клиньев с $\theta_0 = \pi/2n$, где n также равно 3, 5, 7 и т.д. В частности, для клина с нулевой начальной температурой и температурой T_0 на границах получим (рис. 5,а)

$$T = T_0 \sum_{m=0}^{(n-1)/2} \left[1 - \operatorname{erf} \frac{R \sin(2m\theta_0 + \theta)}{2\sqrt{at}} \operatorname{erf} \frac{R \cos(2m\theta_0 + \theta)}{2\sqrt{at}} \right] - \sum_{m=1}^{(n-1)/2} \left[1 - \operatorname{erf} \frac{R \sin(2m\theta_0 - \theta)}{2\sqrt{at}} \operatorname{erf} \frac{R \cos(2m\theta_0 - \theta)}{2\sqrt{at}} \right]. \quad (5)$$

Р и с.5. Изображения точек поиска при переходе к клину $\theta_0 = \pi/2$ от клина $\theta_0 = \pi/6$ с условиями на границе $\theta = \theta_0$, соответствующими температуре T_0 (а) и тепловой изоляции (б)

Р и с.6. Тепловые лучи при контакте полуограниченных тел с различными начальными температурами

Для клиньев с $\theta_0 = \pi/2n$ со смешанными граничными условиями, а именно для случая, когда граница $\theta = \theta_0$ адиабатическая (рис.5,б), а на второй границе температура равна T_0 , используя соответственно в качестве исходного тела клин $\theta_0 = \pi/2$ с такими же граничными и начальными условиями, получим

$$T = T_0 \left[\sum_{m=0}^{(n-1)/2} (-1)^m \operatorname{erfc} \frac{R \sin(2m\theta_0 + \theta)}{2\sqrt{at}} - \sum_{m=1}^{(n-1)/2} (-1)^m \operatorname{erfc} \frac{R \sin(2m\theta_0 - \theta)}{2\sqrt{at}} \right]. \quad (6)$$

Методом изображения точки поиска можно получить также решения для задач с заданной начальной температурой. Например, для неограниченного клина $\theta_0 = \pi/n$ с начальной температурой T_0 и нулевой температурой на границах имеем

$$T = T_0 \left[\sum_{m=0}^{(n-1)/2} \operatorname{erf} \frac{R \sin(2m\theta_0 + \theta)}{2\sqrt{at}} - \sum_{m=1}^{(n-1)/2} \operatorname{erf} \frac{R \sin(2m\theta_0 - \theta)}{2\sqrt{at}} \right]. \quad (7)$$

3. Большие возможности перед методом источников открывает лучевой метод расчета температур. В его основу положено свойство тепловых потоков (лучей) подчиняться некоторым законам геометрической оптики. От адиабатической границы тепловой луч отражается без изменения знака и коэффициента мощности, от изотермической - с изменением знака на обратный. Угол падения луча равен углу отражения. Для одномерных задач выявлены законы прохождения и отражения лучей для контактных задач, в том числе с граничным тепловым сопротивлением, и законы отражения тепловых лучей от границ третьего рода [4, 5].

Рассмотрим контакт двух полуограниченных тел с теплофизическими коэффициентами λ_1, a_1 , и λ_2, a_2 . Начальная температура первого тела $T_{01}=T_0$, второго - равна нулю ($T_{02}=0$). Процесс теплообмена представим действием тепловых лучей: положительных лучей от контактной границы в тело 2 (рис.6), вызывающих в нем температуру T_2 , и отрицательных - в тело 1, вызывающих в нем понижение температуры. Тогда температурные распределения в телах 1 и 2 можно представить следующим образом:

$$T_2 = \frac{\lambda_1 \sqrt{a_2}}{\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}} T_0 \Phi^* \frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}, \quad (8)$$

$$T_1 = T_0 \frac{\lambda_2 \sqrt{a_1}}{\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}} T_0 \Phi^* \frac{|x|}{2\sqrt{a_1 t}}. \quad (9)$$

В случае контакта ограниченных тел следует учесть действие лучей, отраженных от внешних границ, и особенности прохождения отраженных лучей и лучей от источников через границу контакта. Луч, падающий на границу контакта объектов с различными теплофизическими свойствами, делится на два луча: проходящий и отраженный. Мощность проходящего луча следует умножить на коэффициент мощности m_{12} , представляющий собой частное от деления двух коэффициентов тепловой активности первого тела на сумму коэффициентов тепловой активности первого и второго, если луч направлен из тела 1 в тело 2 (рис.7):

$$m_{12} = \frac{2\lambda_1 \sqrt{a_2}}{\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}} = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad (10)$$

где ε_1 и ε_2 - коэффициенты тепловой активности.

При обратном направлении луча коэффициент мощности соответственно равен m_{21} и определяется соотношением

$$m_{21} = \frac{2\lambda_2 \sqrt{a_1}}{\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (11)$$

Р и с. 7. Схема тепловых лучей при контакте полуограниченных тел

Р и с. 8. Ход тепловых лучей при контакте пластины с полуограниченным телом

Это следует из решения контактной задачи для двух полуограниченных тел.

Очевидно, что тепловое действие на границу контакта падающего и отраженного лучей в сумме равно тепловому действию проходящего луча. Отсюда коэффициенты мощности отраженных лучей $n = m - 1$ имеют следующие выражения:

$$n_{12} = \frac{\lambda_1 \sqrt{a_2} - \lambda_2 \sqrt{a_1}}{\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}; \quad (12)$$

$$n_{21} = \frac{\lambda_2 \sqrt{a_1} - \lambda_1 \sqrt{a_2}}{\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \quad (13)$$

Пользуясь изложенным, легко практически сразу записать решения для широкого круга задач подобного рода. Например, при контакте пластины с начальной температурой T_0 с коэф-

фициентами λ_1 и a_1 и адиабатической границей, с полуограниченным телом с теплофизическими свойствами λ_2 и a_2 и нулевой начальной температурой получим (рис.8)

$$T_2 = T_0 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left\{ \Phi^* \frac{x \sqrt{a_1}}{2\sqrt{a_2}t} + (-1)^n \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{n-1} \Phi^* \frac{2nl + x \sqrt{a_1}}{2\sqrt{a_2}t} \right\}; \quad (14)$$

$$T_1 = T_0 \frac{\varepsilon_2 T_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left\{ \Phi^* \frac{x}{2\sqrt{a_1}t} + (-1)^n \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{n-1} \left[\Phi^* \frac{2nl + x}{2\sqrt{a_1}t} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \Phi^* \frac{2nl - x}{2\sqrt{a_1}t} \right] \right\}. \quad (15)$$

Необходимо заметить, что для лучевого метода количество находящихся в контакте тел с различными теплофизическими свойствами и различными температурами, количество источников как заданного потока, так и заданной температуры не имеет значения.

Решая методом преобразования Лапласа контактные задачи для полуограниченных тел с контактным термическим сопротивлением с различного рода источниками, нетрудно установить, что любой луч, падая на границу контакта, образует три луча: один проходящий и два

отраженных (рис.9).

Р и с. 9. Схема тепловых лучей при контакте
го
полуограниченных тел с контактным
термическим сопротивлением $1/h$
ков

Р и с. 10 Схема тепловых лучей от линейно-
источника в полуограниченном теле (а), в
клине $\pi/2$ (б) и в клине $\pi/3$ (в) от источни-
ков
заданной температуры

Мощность одного отраженного луча равна мощности падающего. Такой луч можно назвать адиабатическим. Мощность второго отраженного луча в теле с теплофизическими коэффициентами λ_1 и a_1 и мощность проходящего в это тело луча из тела с коэффициентами λ_2 и a_2 необходимо умножить на коэффициент i_{21} , а мощность второго отраженного луча в теле с коэффициентами λ_2 и a_2 и мощность проходящего в это тело луча из тела с коэффициентами λ_1 и a_1 необходимо умножить на i_{12} ,

$$\text{где} \quad i_{12} = \frac{2Hk}{\lambda_2(g_1 + h_1)}; \quad i_{21} = \frac{2H}{\lambda_1(g_2 + h_2)}$$

(16)

$$q_1 = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a_1}}; \quad q_2 = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a_2}}; \quad k = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}; \quad (17)$$

$$h_1 = \frac{H(\lambda_1 \sqrt{a_2 + \lambda_2 \sqrt{a_1}})}{\lambda_1 \lambda_2 \sqrt{a_1}}; \quad h_2 = \frac{H(\lambda_1 \sqrt{a_2 + \lambda_2 \sqrt{a_1}})}{\lambda_1 \lambda_2 \sqrt{a_2}}. \quad (18)$$

Причем речь здесь идет о выражениях для температур в пространстве изображений по Лапласу.

Пользуясь изложенным и уже известными законами отражения лучей от границ, можно сразу в пространстве изображений записать температурные решения для любых задач рассматриваемого класса.

Так, например, решение для составного тела с нулевой начальной температурой, которое при $0 < x < l$ имеет теплофизические коэффициенты λ_1 и a_1 , а при $x > l$ - коэффициенты λ_2 и a_2 при действии на уровне $x = 0$ плоского мгновенного источника единичной мощности, контактом термическом сопротивлении $1/H$ и адиабатических условиях на границе после действия источника будет иметь в области изображений следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 = & \frac{1}{a_1 q_1} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \exp[-q_1(2ml + x_1)] + \sum_{m=1}^{\infty} \exp[-q_1(2ml - x_1)] + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2H}{\lambda_1(q_1 + h_1)} \right]^n (n-1)^n \sum_{m=n}^{\infty} (m-n+1) \exp[-q_1(2ml - x)] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2H}{\lambda_1(q_1 + h_1)} \right]^n (-1)^n \sum_{m=n}^{\infty} (m-n+1) \exp[-q_1(2ml + x_1)] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_2 = & \frac{2H}{\lambda_2(q_2 + h_2)} \frac{k}{a_2 q_2} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \exp\{-q_2[(2m-1)kl + x_2 - l]\} + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2H}{\lambda_1 k(q_2 + h_2)} \right]^n (-1)^n \sum_{m=n+1}^{\infty} (m-n) \exp\{-q_2[2m-1)kl + x_2 - l]\} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Переход к оригиналу представляет известные трудности, однако часто с достаточной для практики точностью, особенно при небольших значениях t , можно ограничиться табличными значениями оригиналов. В частности, для T_1 получим:

$$\begin{aligned} T_1 \approx & \frac{1}{\sqrt{\pi a_1 t}} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{(2ml + x_1)^2}{4a_1 t}\right] - \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{2H}{\lambda_1} \exp[h_1(2ml + x_1) + a_1 h_1^2 t] \Phi^* \left[\frac{2ml + x_1}{2\sqrt{a_1 t}} + h_1 \sqrt{a_1 t} \right] - \right. \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{2H}{\lambda_1} \exp[h_1(2ml - x_1) + a_1 h_1^2 t] \Phi^* \left[\frac{2ml - x_1}{2\sqrt{a_1 t}} + h_1 \sqrt{a_1 t} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

При аналогичном исследовании поведения тепловых потоков (лучей) на границе третьего рода установлено, что каждое n -ное отражение, например, луча типа

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} \exp\left[-\frac{(x - x')^2}{4at}\right],$$

т.е. теплового потока, вызывающего в неограниченном теле такую температуру, приводит к образованию отраженных адиабатического луча и луча, который в пространстве изображений по Лапласу отличается от падающего на границу только коэффициентом мощности и определяется выражением

$$(-1)^n \frac{2^{n-1} h^n}{a q (q + h)^n} \exp[-q(x + x')],$$

или изотермического луча и луча типа

$$\frac{2^{n-1} h^{n-1}}{a (q + h)^n} \exp[-q(x + x')],$$

где n - номер отражения от границ третьего рода.

Лучевой метод в определенных условиях, а именно в тех случаях, для которых применим метод изображений источников или точки поиска, может быть использован для решения двумерных и трехмерных задач. На рис. 10 показаны схемы лучей в полуограниченном теле и в клине $\pi/2$ от линейного источника и в клине $\pi/3$ от источников заданной температуры.

Казалось бы простая задача определения температурного распределения в клине $\pi/2$ с температурой T_0 на одной границе и температурой, равной нулю, - на другой изложенными мето-

дами не разрешима. В [1] есть решение с применением функций Бесселя, которое трудно осуществить даже с использованием мощных быстродействующих ЭВМ.

Оказалось, что эта задача и другие ей подобные легко решаются с помощью лучей, которые были названы косыми лучами. Схема решения показана на рис. 11, а соответствующая формула имеет вид

$$T = T_0 \left[\operatorname{erfc} \frac{L_1}{2\sqrt{at}} - \cos \alpha \cdot \operatorname{erfc} \frac{L_2}{\sqrt{2at}} \right], \quad (22)$$

где L_1 - длина прямого луча 1, а L_2 - длина косого отраженного луча 2.

Решение удовлетворяет уравнению теплопроводности, граничным и начальным условиям. Тем не менее была проведена проверка метода численными расчетами. Для этого было использовано известное температурное распределение в клине $\pi/3$ с нулевой начальной температурой и температурой T_0 на границах. Оказалось, что отраженный луч 3 (рис.12) может быть заменен на два косых луча 4 и 5.

Р и с. 11. Прямой луч 1 и косой луч 2 в клине $\pi/2$

Р и с. 12. Схема косых лучей в клине $\pi/3$ (а) (показан пунктиром) и в развертке клина в полуограниченное тело по методу изображения точки поиска (б)

Наложив друг на друга температурные распределения, как это показано на рис. 13, получим решение для клина $\pi/2$ с нулевой начальной температурой и температурой T_0 на границах.

Р и с. 13. Суперпозиция температурных распределений клиньев $\pi/2$

Р и с. 14. Граничная суперпозиция двух полуограниченных тел

4. Определенный интерес представляет прием, получивший название метода граничной суперпозиции. При наложении температурных распределений одинаковых по форме тел, по расположению и мощности источников на участке, где на адиабатическую границу накладывается граница с нулевой температурой, границы тела на этом участке исчезают, а тело должно быть построено симметрично исчезнувшей границе. Причем в первой части тела температурное распределение равно полусумме температурных распределений накладываемых тел, а в достроенной - полуразности. Действительно, если наложить температурные распределения полуограниченных тел с адиабатической границей и границей с нулевой температурой, получим температурное распределение неограниченного тела (рис. 14). Правильность полученного решения легко проверяется методом перегиба.

5. Отметим еще один прием суперпозиции, получивший название метода перелистывания. Представим полуограниченное тело с нулевой начальной температурой и нулевой температурой на границе в трехлистном исполнении, как это показано на рис. 18а. Температура на листах 2 и

3 определяется лучами 1 и 2. На листе 1 действуют такие же лучи, но с обратными знаками.

Р и с. 18. Пример суперпозиции перелистыванием

Перекинем температурное распределение листа 2 направо, а температурное распределение листа 3 - налево (рис. 18, б). Сложив температурные распределения и поделив на 2, получим решение для тела, показанного на рис. 18, в. Температура в точке А определяется действием лучей 1 и 2, а в точке Б - лучей 3, 4 и 5:

$$T_A = 0,5T_0 \cos \alpha \cdot \operatorname{erfc} \frac{L_1}{2\sqrt{at}} - 0,5T_0 \cos \beta \cdot \operatorname{erfc} \frac{L_2}{2\sqrt{at}} ; \quad (23)$$

$$T_B = T_0 \operatorname{erfc} \frac{L_5}{2\sqrt{at}} - 0,5T_0 \cos \gamma \cdot \operatorname{erfc} \frac{L_3}{2\sqrt{at}} - 0,5T_0 \cos \delta \cdot \operatorname{erfc} \frac{L_y}{2\sqrt{at}} . \quad (24)$$

Таким образом, изложенные геометрические методы расчета температур позволяют сравнительно простыми приемами находить температурные распределения для широкого класса задач, в том числе для таких, решение которых известными методами связано со значительными математическими трудностями даже с использованием современных электронных вычислительных машин.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 412с.
2. Харкевич А.А. Неустановившиеся волновые явления. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 160с.
3. Пехович А.И., Жидких В.М. Расчеты теплового режима твердых тел. Л.: Энергия, 1968. С.44-51.
4. Ваенский В.Н. Применение лучевого метода к контактным задачам теплопроводности и к задачам для составных объектов // Теплофизика и оптимизация тепловых процессов: Сб. науч. тр. Куйбыш. Авиац. ин-т, 1978. С.13-18.
5. Ваенский В.Н. Применение лучевого метода к тепловым задачам для составных тел с контактным термическим сопротивлением // Физика и химия обработки материалов. 1984. №1. С.36-42.