Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Ковырягин, Управление колебаниями упругой некруговой пластины, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 38, 45–51

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 09:21:43

Из вычислений видно, что при уменьшении размера малой полуоси B угол $\theta_{\max}$ несколько увеличивается, а $\theta_{\text{эф}}$ уменьшается более существенно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудрявцев П. И. Нераспространяющиеся трещины усталости. М.: Машиностроение, 1982. 171 с.
2. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М. Л.: Гостехиздат, 1947. 423 с.

Поступила 25.02.2005 г.

УДК 539.3

М. А. Ковырягин

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ УПРУГОЙ НЕКРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассматривается задача определения внешней управляющей нагрузки, которая переводит некруговую упругую пластину из заданного начального состояния как можно ближе к другому заданному конечному состоянию за фиксированное время. Задача для некруговой пластинки с использованием метода малого параметра сводится к задачам для круговых пластинок.

Некруговые пластины являются широко применяемым элементом строительных и машиностроительных конструкций. Очень широкий класс некруговых контуров может быть описан уравнениями вида [1]

$$x = r(\cos \vartheta + \varepsilon \cos m\vartheta); \quad y = r(\sin \vartheta - \varepsilon \sin m\vartheta), \quad (1)$$

где ϑ — параметр контура; r, ε — радиус приведенной окружности и величина отклонения контура от кругового (малый параметр) соответственно.

Пластины именно с такими контурами будут рассматриваться в данной работе. Под состоянием пластины будем понимать отклонение от положения равновесия срединной поверхности и распределение скоростей точек этой поверхности. Управление зависит только от времени, а положение его по поверхности пластины фиксировано. Например, управляющие силы могут быть приложены в определенных точках поверхности пластины. Управление подчинено интегральным ограничениям, которые связаны с условиями ограниченности потребляемой энергии.

Рассматриваемая задача является более общей, чем задача точного перевода системы из одного заданного начального состояния в другое заданное конечное.

Используемая методика основана на обобщении метода моментов с использованием теории двойственности в задачах оптимального управления. Этот метод имеет преимущество по объему и по времени счета по сравнению с другими методами оптимального управления, например градиентными, которые применимы для более общих задач оптимального управления. Это связано со спецификой задачи, а именно: линейностью управления, квадратичностью функционала качества. Для решения поставленной задачи необходим метод, который сочетался бы с методом разложения по собственным формам колебаний. Это сочетание дает метод, который предполагает известными (заранее вычисленными) параметры собственных колебаний пластины. Эти характеристики системы являются независимыми от процесса оптимизации, который в системе автоматического управления с обратной связью является оперативным, многоразовым. Вычисление их выделяется в отдельную разовую (не входящую в контур обратной связи) вычислительную процедуру. Отметим, что системы автоматического управления с обратной связью требуют работы в реальном масштабе времени, а это налагает на вычислительный процесс, кроме точности, определенные, зачастую довольно жесткие, ограничения на время счета. Например, для адаптивной лазерной системы это время может быть долями секунд. Следовательно, этот фактор необходимо учитывать при выборе, разработке и реализации математических методов. Здесь оптимальное управление вычисляется в виде ряда по собственным гармоническим функциям и состоит в последовательном решении систем линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим поперечные малые отклонения изотропной пластинки в рамках классической теории тонких пластин. Предположения, соответствующие этой упрощенной модели, таковы:

- 1) справедлив закон Гука;
- 2) угол наклона отклоненной пластины в любом направлении достаточно мал, так что его квадрат по сравнению с единицей довольно мал и им можно пренебречь;
- 3) срединная поверхность отклоненной пластины является нейтральной, то есть действие нормальных напряжений на срединную поверхность не учитывается;
- 4) компонентами нормальных напряжений в пластине, перпендикулярными к ее срединной поверхности, можно пренебречь;
- 5) нормаль к срединной поверхности недеформированной пластины остается нормалью к срединной поверхности отклоненной пластины.

Динамический прогиб пластинки удовлетворяет уравнению [2]:

$$D \cdot \nabla^2 \nabla^2 W + \gamma h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = F, \quad (2)$$

где $D = \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)}$, E — модуль упругости первого рода, ν — коэффициент Пуассона, γ — плотность, h_0 — толщина, t — время, F — функция нагрузки и управления.

Решение ищется при следующих начальных и граничных условиях [2]:

$$w(t_0, r, \theta) = \varphi^0(r, \theta), \quad w_1(t_0, r, \theta) = \varphi^1(r, \theta), \quad (3)$$

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0. \quad (4)$$

Здесь φ — заданная функция, n — нормаль к контуру.

Используя метод возмущений [3], представим функции W , F в виде рядов по степеням параметра ε :

$$W = \sum_{k=0}^1 \varepsilon^k w_k, \quad F = \sum_{k=0}^1 \varepsilon^k F_k. \quad (5)$$

Преобразование граничных условий с некругового контура в условия, которые имеют место на окружности радиуса $r = R$, выполнено в работе [3]:

$$w_k = -\sum_{n=0}^k \Delta_n w_{k-n}, \quad \frac{\partial w_k}{\partial r} = -\left\{ \sum_{n=0}^2 \beta_n \left[\lambda_n \frac{\partial w_{k-n}}{\partial r} + \sum_{i=1}^{k-n} \Delta_i \frac{\partial w_{k-n-i}}{\partial r} \right] + \right. \\ \left. + \gamma_0 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w_{k-1}}{\partial \theta} + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_{k-n-i}}{\partial \theta} \right) \right] \right\} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = (1-s) \cos \gamma_2 \vartheta$, $\beta_2 = -s$, $\gamma_0 = \gamma_2 \sin \gamma_2 \vartheta$; $\Delta_1 = \cos \gamma_2 \theta \cdot R_2 \frac{\partial}{\partial r} - \sin \gamma_2 \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r}$, $\gamma_2 = s + 1$; $\lambda_n = 0$, $\lambda_n = 1$ при $n \geq 1$.

Таким образом, задача об интегрировании уравнений (2) для области с некруговым контуром сведена к ряду задач для кольцевых пластин, прогиб которых описывается уравнениями вида

$$D \cdot \sum_{k=0}^1 \varepsilon^k \nabla^4 w_k + \gamma h_0 \sum_{k=0}^1 \varepsilon^k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} = \sum_{k=0}^1 \varepsilon^k F_k. \quad (7)$$

Задача решается последовательно в нулевом и первом приближениях.

В нулевом приближении искомая функция прогиба разыскивается в виде

$$w = W_0(r) + f_0(r),$$

где $W_0(r) = \frac{F_0 r^4}{64D}$, $f_0(r) = A_0 r^2 \ln r + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0$.

В нулевом приближении к поверхности пластины кроме нагрузки приложены m управляющих воздействий $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ с соответствующим распределением по поверхности $d(r, \theta) = (d_1(r, \theta), \dots, d_m(r, \theta))$, $(r, \theta) \in \Omega = (r_0, R) \times [0, 2\pi)$.

Тогда функцию $F_0 = F_0(t, r, \theta)$ в правой части уравнений (2) можно записать в виде

$$F_0 = F_0(t, r, \theta) = \sum_{i=1}^m d_i(t, r, \theta) u_i(t) + q_0(t, r, \theta), \quad (8)$$

где $F_0(t, r, \theta)$ — известная функция, задающая плотность некоторой внешней нагрузки. В частности, $d_i(r, \theta)$, $i = 1, 2, \dots, m$ могут представляться в виде дельта-функций $d_i(r, \theta) = \delta(r - r_i, \theta - \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, где (r, θ) , $i = 1, 2, \dots, m$ — точки приложения управляющих воздействий.

Задача управления состоит в том, чтобы при заданном начальном состоянии

$$w(t_0, r, \theta) = \varphi^0(r, \theta), \quad w_1(t_0, r, \theta) = \varphi^1(r, \theta) \quad (9)$$

найти управление $u(t)$, которое переводило бы пластину к моменту времени $t = T$ как можно ближе к некоторому заданному конечному состоянию $y = (y^0(r, \theta), y^1(r, \theta))$. Управления подчинены ограничениям

$$U = \left\{ u \in H : \int_{t_0}^T [u_i(t)]^2 dt \leq \chi_i^2, 0 \leq \chi_i \leq \infty, i = 1, 2, \dots, m \right\}, H = L_2^m(t_0, T). \quad (10)$$

Если $\chi_i = \infty$, то это означает, что ограничение на данное управление отсутствует. Условие близости к состоянию $y = (y^0(r, \theta), y^1(r, \theta))$ можно сформулировать в виде задачи минимизации функционала

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left(|w(T, r, \theta) - y^0(r, \theta)|^2 + |w_1(T, r, \theta) - y^1(r, \theta)|^2 \right) r dr d\theta. \quad (11)$$

В случае $y^0(r, \theta) = y^1(r, \theta)$ поставленная задача превращается в задачу гашения (демпфирования) колебаний, а в осесимметричном случае точечное распределение переходит в управление по окружностям $d_i(r, \theta) = \delta(r - r_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Обозначим решения задачи (7)–(11) при $k = 0$

$$J^* = \inf_{u \in U} J(u), \quad U^* = \{ u \in U : J(u) = J^* \},$$

$u^{**} \in U$ — нормальное решение, то есть $\|u^{**}\|_H = \min_{u \in U^*} \|u\|$.

В [4] данная задача согласно общей теории обобщенного метода моментов сведена к обобщенной проблеме моментов.

При фиксированном управлении $u(t)$ всякое решение поставленной краевой задачи можно представить в виде суммы

$$w(t, r, \theta) = w_0(t, r, \theta) + w_1(t, r, \theta),$$

где w_0 — решение этой задачи при $\varphi^0(r, \theta) \equiv \varphi^1(r, \theta) \equiv 0$ и $q_0(t, r, \theta) \equiv 0$, а w_1 — решение при $u(t) = 0$.

Обозначим $W = L_{2r}(\Omega) \times L_{2r}(\Omega)$ и введем линейный ограниченный оператор $A : H \rightarrow W$, $Au = (w_0(T, r, \theta), w_{0r}(T, r, \theta))$. Для осесимметричного случая $W = L_{2r}(R, r_0) \times L_{2r}(R, r_0)$, где $L_{2r}(\Omega)$ и $L_{2r}(R, r_0)$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями соответственно

$$\langle \varphi, g \rangle_{L_{2r}(\Omega)} = \iint_{\Omega} \varphi(r, \theta) g(r, \theta) r dr d\theta, \quad \langle \varphi, g \rangle_{L_{2r}(R, r_0)} = \int_{r_0}^R \varphi(r) g(r) r dr.$$

Тогда функционал (11) принимает вид

$$J(u) = \|w_0(T, \cdot) - y_0(\cdot)\|_{L_{2r}}^2 + \|w_{0r}(T, \cdot) - y_1(\cdot)\|_{L_{2r}}^2 = \|Au - \bar{y}\|_W^2,$$

где $\bar{y} = (y_0, y_1)$, $y_0(\cdot) = y^0(\cdot) - w_1(T, \cdot)$, $y_1(\cdot) = y^1(\cdot) - w_{1r}(T, \cdot)$.

Пусть $e_1(\cdot), e_2(\cdot), \dots$ — некоторый ортонормированный базис в W . В частности, если $\bar{e}_1(r, \theta), \bar{e}_2(r, \theta), \dots$ — ортонормированный базис в L_{2r} , то система

$$e_{k,0} = (\bar{e}_k, 0), \quad e_{k,1} = (0, \bar{e}_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

образует ортонормированный базис в w . Преобразуем функционал, используя равенство Парсенваля

$$\begin{aligned} J(u) &= \|Au - \bar{y}\|_w^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Au - \bar{y}, e_k \rangle_w|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle u, A^* e_k \rangle_H - \langle \bar{y}, e_k \rangle_w \right|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle u, \varphi_k \rangle_H - a_k \right|^2, \quad \varphi_k = A^* e_k, \quad a_k = \langle \bar{y}, e_k \rangle_w. \end{aligned}$$

Для ортонормированной системы (12) получим

$$\begin{aligned} J(u) &= \|Au - \bar{y}\|_w^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle Au - \bar{y}, e_{k,0} \rangle_w \right|^2 + \left| \langle Au - \bar{y}, e_{k,1} \rangle_w \right|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle u, A^* e_{k,0} \rangle_H - \langle \bar{y}, e_{k,0} \rangle_w \right|^2 + \left| \langle u, A^* e_{k,1} \rangle_H - \langle \bar{y}, e_{k,1} \rangle_w \right|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle u, \varphi_{k,0} \rangle_H - a_{k,0} \right|^2 + \left| \langle u, \varphi_{k,1} \rangle_H - a_{k,1} \right|^2, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\varphi_{k,0} = A^* e_{k,0}, \quad \varphi_{k,1} = A^* e_{k,1}, \quad a_k = \langle \bar{y}, e_{k,0} \rangle_w = \langle y, \bar{e}_k \rangle_{L_2}, \quad a_{k,1} = \langle y_1, e_{k,1} \rangle_w = \langle y_1, e_{k,1} \rangle_w, \quad k=1, 2, \dots$$

Таким образом, исходная задача (7)–(11) при $k=0$ сводится к следующей эквивалентной обобщенной проблеме моментов:

$$J(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle u, \varphi_{k,0} \rangle_H - a_{k,0} \right|^2 + \left| \langle u, \varphi_{k,1} \rangle_H - a_{k,1} \right|^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U. \quad (13)$$

Для описания сопряженного оператора A^* вводится сопряженная краевая задача

$$\rho \psi_{t1} + D \Delta^2 \psi = 0, \quad (t, r, \theta) = (t_0, T) \times \Omega, \quad (14)$$

$$\psi(t, r_0, \theta) = \psi_r(t, r_0, \theta) = 0, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (15)$$

$$\psi(T, r) = \tilde{z}(r, \theta), \quad \psi_1(T, r) = -\bar{z}(r, \theta), \quad r \in (R, r_0), \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (16)$$

Согласно [5]

$$A^* z = \iint_{\Omega} d(r, \theta) \psi(t, r, \theta) r dr d\theta \in H = L_2^m(t_0, T), \quad \forall_z = (\bar{z}, \tilde{z}),$$

где ψ — решение (14)–(15). Поэтому $\varphi_k = \iint_{\Omega} d(r, \theta) \psi_k(t, r) r dr d\theta \in H = L_2^m(t_0, T)$, где ψ_k — решения (14)–(15), соответствующие $z(r, \theta) = e_k(r, \theta)$.

В дальнейшем имеет смысл рассматривать только случай с ортонормированным базисом (12).

В [2] для осесимметричного случая в качестве ортонормированной системы $\bar{e}_k, k=1, 2, \dots$ взята система собственных функций краевой задачи $\Delta^2 z_k = \lambda_k z_k, z(r_0) = 0$.

Для осесимметричных колебаний собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} z_k(r) &= \alpha_k^{-1} \sigma_k(r), \quad k=1, 2, \dots, \\ \sigma_k(r) &= I_0(\sqrt[4]{\lambda_k} r_0) J_0(\sqrt[4]{\lambda_k} r) - J_0(\sqrt[4]{\lambda_k} r_0) I_0(\sqrt[4]{\lambda_k} r), \end{aligned}$$

где α_k — нормирующий множитель: $\alpha_k = \left(\int_{r_0}^R \sigma_k^2(r) r dr \right)^{1/2}$, а I_0, J_0 — функции Бесселя нулевого

порядка. Собственные значения $\lambda_k, k=1, 2, \dots$ являются корнями уравнения

$$J_0(\sqrt[4]{\lambda_k} r_0) I_0'(\sqrt[4]{\lambda_k} r_0) - I_0(\sqrt[4]{\lambda_k} r_0) J_0'(\sqrt[4]{\lambda_k} r_0) = 0.$$

В этом случае решениями сопряженной системы являются функции

$$\psi_{k,0}(t, r) = \lambda_k^{-1/2} \cos[\omega_k(T-t)] z_k(r), \quad \psi_{k,1}(t, r) = -\omega_k^{-1} \sin[\omega_k(T-t)] z_k(r); \quad \omega_k = (\lambda_k D / \rho)^{1/2}, \quad k=1, 2, \dots$$

Векторы d_k, d_{ik} определяются в виде $d_k = (d_{1k}, \dots, d_{mk})$, $d_{ik} = z_k(r_i), i=1, 2, \dots, m$.

В частности, в случае точечного распределения по окружностям $\delta(r - r_i), i=1, 2, \dots, m$ и $d_{ik} = z_k(r_i), k=1, 2, \dots, m$, элементы $\varphi_{k,0}$ и $\varphi_{k,1}, k=1, 2, \dots$ имеют вид

$$\varphi_{k,0} = \lambda_k^{-1/2} \cos[\omega_k(T-t)] z_k(r_i), \quad i=1, 2, \dots, m; \quad \varphi_{k,1}(t, r) = -\omega_k^{-1} \sin[\omega_k(T-t)] z_k(r). \quad (17)$$

Далее исходной задаче (7)–(11) при $k=0$ ставится в соответствие аппроксимация, получаемая с помощью усечения бесконечного ряда в обобщенной проблеме моментов (13):

$$J_N(u) = \sum_{k=1}^N \left| \langle u, \varphi_{k,0} \rangle_H - a_{k,0} \right|^2 + \left| \langle u, \varphi_{k,1} \rangle_H - a_{k,1} \right|^2 \rightarrow \inf, u \in U. \quad (18)$$

Для этой задачи вводятся соответствующие функции Лагранжа

$$L_N(u, \gamma) = J_N(u) + \sum_{i=1}^m \gamma_i g_i(u), u \in H, \gamma \in \Lambda = \{\gamma_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m\} \text{ и двойственные двумерные задачи } \chi_N(\gamma) = \inf_{u \in H} L_N(u, \gamma) \rightarrow \sup, \gamma \in \Lambda.$$

Тогда для регуляризованных задач (16)–(18)

$$T_N(u) = J_N(u) + \alpha_N g(u) \rightarrow \inf, u \in U, g(u) = \sum_{i=1}^m g_i(u), a_N > 0, N=1, 2, \dots, \alpha_N \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

функции Лагранжа и двойственные задачи получаются заменой множеств Λ на $\Lambda_N = \{\gamma_i \geq \alpha_N, i=1, 2, \dots, m\}$:

$$L_N(u, \gamma) = J_N(u) + \sum_{i=1}^m \gamma_i g_i(u), u \in H, \gamma \in \Lambda_N; \quad (19)$$

$$\chi_N(\gamma) = \inf_{u \in H} L_N(u, \gamma) \rightarrow \sup, \gamma \in \Lambda_N. \quad (20)$$

Так как функция Лагранжа сильно выпукла при фиксированном $\gamma \in \Lambda_N$, то существует единственный элемент $u_N(\gamma) \in U$ такой, что $\inf_{u \in H} L_N(u, \gamma) = L_N(u_N(\gamma), \gamma)$. Из равенства нулю

$$\text{градиента функции Лагранжа } J'_N(u) + 2 \begin{pmatrix} \gamma_1 u_1 \\ \dots \\ \gamma_m u_m \end{pmatrix} = 0 \text{ получим систему для определения этих эле-}$$

ментов:

$$\sum_{k=1}^N \left(\langle u, \varphi_{k,0} \rangle_H - a_{k,0} \right) \varphi_{k,0}^i + \left(\langle u, \varphi_{k,1} \rangle_H - a_{k,1} \right) \varphi_{k,1}^i + \gamma_i u_i = 0.$$

Если ввести дополнительные переменные

$$\bar{\psi}_{k,0} = \langle u, \varphi_{k,0} \rangle_H - a_{k,0}, \bar{\psi}_{k,1} = \langle u, \varphi_{k,1} \rangle_H - a_{k,1},$$

то приходим к эквивалентной системе относительно управлений $u_i(t)$ и чисел $\bar{\psi}_{k,0}, \bar{\psi}_{k,1}, k=1, 2, \dots, N$:

$$\sum_{k=1}^N \bar{\psi}_{k,0} \varphi_{k,0}^i + \bar{\psi}_{k,1} \varphi_{k,1}^i + \gamma_i u_i = 0, i=1, 2, \dots, m; \quad (21)$$

$$\langle u, \varphi_{k,0} \rangle_H - \bar{\psi}_{k,0} = a_{k,0}, k=1, 2, \dots, N; \quad (22)$$

$$\langle u, \varphi_{k,1} \rangle_H - \bar{\psi}_{k,1} = a_{k,1}, k=1, 2, \dots, N. \quad (23)$$

Решения этой системы $u_N(t; \gamma)$ имеют вид $u_N(t; \gamma) = \sum_{k=1}^N u_{k,0} \varphi_{k,0}(t) + u_{k,1} \varphi_{k,1}(t)$. Подставив эту сумму в (21)–(23), получим

$$\sum_{k=1}^N (\bar{\psi}_{k,0} + \gamma_i u_{k,0}) \varphi_{k,0}^i + (\bar{\psi}_{k,1} + \gamma_i u_{k,1}) \varphi_{k,1}^i = 0, i=1, 2, \dots, m; \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^N u_{k,0} \langle \varphi_{k,0}, \varphi_{i,0} \rangle_H + u_{k,1} \langle \varphi_{k,1}, \varphi_{i,0} \rangle_H - \bar{\psi}_{k,0} = a_{k,0}, i=1, 2, \dots, N; \quad (25)$$

$$\sum_{k=1}^N u_{k,0} \langle \varphi_{k,0}, \varphi_{i,1} \rangle_H + u_{k,1} \langle \varphi_{k,1}, \varphi_{i,1} \rangle_H - \bar{\psi}_{k,0} = a_{k,1}, i=1, 2, \dots, N. \quad (26)$$

Воспользовавшись видом системы (17) рассмотрим множество индексов $I_1 = \{k=1, 2, \dots, N: d_k \neq 0\}$. Так как подсистема $\varphi_{k,0}, \varphi_{k,1}, k \in I_1$ линейно независима, то система (24)–(26) эквивалентна следующей системе:

$$\bar{\psi}_{k,0} + \gamma_i u_{k,0} = 0, \bar{\psi}_{k,1} + \gamma_i u_{k,1} = 0, k \in I_1, i=1, 2, \dots, m; \quad (27)$$

$$\sum_{k \in I_1} u_{k,0} \langle \varphi_{k,0}, \varphi_{i,0} \rangle_H + u_{k,1} \langle \varphi_{k,1}, \varphi_{i,0} \rangle_H - \bar{\psi}_{k,0} = a_{k,0}, \quad i \in I_1; \quad (28)$$

$$\sum_{k \in I_1} u_{k,0} \langle \varphi_{k,0}, \varphi_{i,1} \rangle_H + u_{k,1} \langle \varphi_{k,1}, \varphi_{i,1} \rangle_H - \bar{\psi}_{k,0} = a_{k,1}, \quad i \in I_1; \quad (29)$$

$$\bar{\psi}_{k,0} = a_{k,0}, \bar{\psi}_{k,1} = a_{k,1}, \quad i \notin I_1. \quad (30)$$

При $\gamma \in A_N$ система (27)–(30) является линейной относительно $2(S+N)$ неизвестных, где S — число элементов в множестве I_1 .

Двойственная задача (19), (20) решается приближенно, например с помощью метода проекции градиента [6]. В этой двойственной задаче целевая функция двух переменных $\chi_N(\gamma)$, $\gamma \in A_N$ вогнута и непрерывно дифференцируема, причем $\chi'_N(\gamma) = g(u_N(\gamma))$.

Пусть произвольно взята точка $\gamma_N^0 \in \Lambda_N$. Другие точки γ_N^k , $k=1, 2, \dots, M(N)$ определяются из равенств $\gamma_N^{k+1} = \gamma_N^k + \beta_N^k p_N^k$, $p_N^k = P_N(\gamma_N^k + g(u_N(\gamma_N^k))) - \gamma_N^k$, где P_k — оператор проектирования на множество $\Lambda_H : P_N \gamma = \max \{\alpha_N; \gamma\}$, а $\beta_N^k \in (0, 1]$ — шаг по направлению p_N^k . Этот процесс сходящийся, и через некоторое число шагов $M(N)$ приводит к равенству

$$\|\gamma_N^M - P_N(\gamma_N^M + g(u_N(\gamma_N^M)))\| \leq \varepsilon_N,$$

где последовательность ε_N такова, что $\varepsilon_N < 0$, $\varepsilon_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Положим $\gamma_N = \gamma_N^{M(N)}$. При переходе к следующей $(N+1)$ -ой итерации имеет смысл положить $\gamma_{N+1}^0 = \gamma_N$.

Получив решение в нулевом приближении (фактически решив задачу для круговой пластинки с отверстием, что является новым результатом), перейдем к решению в первом приближении, для которого граничные условия на некруговом контуре (6) принимают следующий вид

$$W_1 = -\cos \gamma_s \theta \cdot R_2 \frac{\partial w_0}{\partial r} + \sin \gamma_s \theta \cdot \frac{\partial w_0}{\partial \theta};$$

$$w \frac{\partial W_1}{\partial r} = - \left[\beta_1 \frac{\partial w_0}{\partial r} + \gamma_0 \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \cos \gamma_i \theta \cdot R \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - \sin \gamma_i \theta \frac{\partial^2 w_0}{\partial r \partial \theta} \right], \quad (31)$$

где $\beta_1 = (1-s)\cos(s+1)\theta$, $\gamma_0 = (1+s)\sin(s+1)\theta$, $\gamma_s = s+1$.

Частоты колебаний некруговой пластинки с жестко зашпеленным контуром определяются в первом приближении по формуле

$$\omega_k = f_{0n} + \varepsilon \omega_1, \quad \text{где } \omega_1^2 = \frac{D}{\gamma h_0} \lambda_1^4.$$

Величина λ_1^4 определится из выражения [3]

$$\lambda_1^4 = \frac{1}{\iint_F w_0^2 dF} \cdot \int_{\ell} \left(w_0 \cdot \frac{\partial \nabla^2 W_1}{\partial r} - \nabla^2 W_1 \cdot \frac{\partial w_0}{\partial r} - W_1 \cdot \frac{\partial \nabla^2 w_0}{\partial r} + \nabla^2 w_0 \cdot \frac{\partial W_1}{\partial r} \right) ds.$$

При этом искомая функция прогиба разыскивается в виде суммы [3]

$$w = W_0(r) + f_0(r) + \varepsilon \varphi_{11}(r) \cos \gamma_s \theta, \quad (32)$$

где $W_0(r) = \frac{F_0 r^4}{64D}$, $f_0(r) = A_0 r^2 \ln r + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0$, $\varphi_{11}(r) = E_{11} r + K_{11} r^{-1} + M_{11} r^3 + N_{11} r^{-3}$.

Произвольные постоянные $A_0, B_0, C_0, D_0, E_{11}, K_{11}, M_{11}, N_{11}$ определяются из граничных условий (31).

Данной функции w соответствуют следующие формулы для изгибающих и крутящих моментов, а также перерезывающих сил:

$$S_i = S_i^{(0)}(r) + \varepsilon S_i^{(11)}(r) \cos \gamma_s \theta, \quad i=1, 2, 4; \quad S_i = \varepsilon S_i^{(11)}(r) \sin \gamma_s \theta, \quad i=3, 5,$$

где

$$M_r = S_1, \quad M_\theta = S_2, \quad H_{r\theta} = S_3, \quad N_r = S_4, \quad N_\theta = S_5;$$

$$S_1^{(0)} = -D \left\{ A_0 [3 + \nu + 2(1 + \nu) \ln r] + 2(1 + \nu) B_0 + C_0 (\nu - 1) r^{-2} + 4(3 + \nu) \frac{q_0}{64D} \right\};$$

$$\begin{aligned}
S_1^{(11)} &= -D \left\{ E_{11} \gamma_s (\gamma_s - 1) (1 - \nu) r^{\gamma_s - 2} + K_{11} \gamma_s (\gamma_s + 1) (1 - \nu) r^{-(\gamma_s - 2)} + \right. \\
&\quad \left. + M_{11} [(\gamma_s + 2)(\gamma_s + 1 + \nu) - \gamma_s^2 \nu] r^{\gamma_s} + N_{11} [(2 - \gamma_s)(1 + \nu - \gamma_s) - \gamma_s^2 \nu] \right\}; \\
S_2^{(0)} &= -D \left\{ A_0 [1 + 3\nu + 2(1 - \nu) \ln r] + 2B_0 (1 + \nu) + C_0 (1 - \nu) r^{-2} + 4(3\nu + 1) \frac{q_0 r^2}{64D} \right\}; \\
S_2^{(11)} &= -D \left\{ \left[E_{11} (1 - \gamma_s) (1 - \nu) r^{\gamma_s - 2} - K_{11} (1 + \gamma_s) (1 - \nu) r^{-(\gamma_s - 2)} \right] \gamma_s + \right. \\
&\quad \left. + M_{11} [(2 + \gamma_s)(1 + \nu \gamma_s + \nu)] r^{\gamma_s} + N_{11} [(2 - \gamma_s)(1 - \nu \gamma_s + \nu) - \gamma_s^2] r^{-\gamma_s} \right\}; \\
S_3^{(11)} &= D(1 - \nu) \gamma_s \left[E_{11} (\gamma_s - 1) r^{\gamma_s - 2} - K_{11} (1 + \gamma_s) r^{-(\gamma_s - 2)} + \right. \\
&\quad \left. + M_{11} (1 + \gamma_s) r^{\gamma_s} + N_{11} (1 - \gamma_s) r^{-\gamma_s} \right]; \\
S_4^{(0)} &= -D \left[4A_0 r^{-1} + \frac{q_0 r}{2D} \right]; \\
S_4^{(11)} &= -D \gamma_s^2 \left[M_{11} (\gamma_s + 1) r^{\gamma_s - 1} + N_{11} (\gamma_s - 1) r^{-(\gamma_s - 1)} \right]; \\
S_5^{(11)} &= D \gamma_s^2 \left[M_{11} (\gamma_s + 1) r^{\gamma_s - 1} - N_{11} (\gamma_s - 1) r^{-(\gamma_s - 1)} \right].
\end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ковырягин М. А., Овчинников И. Г. Управляемые конструкции (в мостостроении). Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2003, 96 с.
2. Заболотская Е. Н., Заболотский Е. В., Ишмухаметов А. З. Управление колебаниями упругой круговой пластины // Избранные проблемы математики и механики: Сб. науч. работ «Прикладная и вычислительная математика», посвященный 80-летию Э. И. Григолюка. М.: МАМИ, 2003. С. 127–142.
3. Уздаев А. И. Температурные напряжения в пластинках, ограниченных двухсвязным контуром. Саратов: СГУ, 1975. 176 с.
4. Васильев Ф. П., Ишмухаметов А. З., Потапов М. М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. М.: МГУ, 1989. 142 с.
5. Ишмухаметов А. З. Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: ВЦ РАН, 2001. 120 с.
6. Ишмухаметов А. З. Двойственный регуляризованный метод решения одного класса выпуклых задач минимизации // Ж. вычислительной матем. и матем. физики, 2000. Т. 40, №7. С. 1045–1060.

Поступила 16.03.2005 г.

УДК 539.4+539.376

А. Ф. Никитенко, Н. Н. Сивкова

УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫХ КОЛЬЦЕВЫХ И КРУГЛЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ПЛАСТИН

Выполнено исследование установившейся ползучести неравномерно нагретых кольцевых и круглых осесимметрично нагруженных пластин.

Результаты расчета напряженно-деформированного состояния равномерно нагретых кольцевых и круглых осесимметрично нагруженных пластин в предположении установившейся ползучести их материала достаточно хорошо известны [1–4]. Ниже представлены аналогичные расчеты неравномерно нагретых кольцевых и круглых осесимметрично нагруженных пластин. В основу расчета положена связь между скоростями деформаций ползучести и напряжениями, базирующаяся на гипотезе подобия соответствующих девиаторов и степенной зависимости между интенсивностью скорости деформаций ползучести η_i и интенсивностью напряжений σ_i [1–4]:

$$\eta_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\eta_i}{\sigma_i} s_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$