Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Никитенко, Н. Н. Сивкова, Установившаяся ползучесть неравномерно нагретых кольцевых и круглых осесимметрично нагруженных пластин, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 38, 51–54

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu371>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:39:05

$$\begin{aligned}
S_1^{(11)} &= -D \left\{ E_{11} \gamma_s (\gamma_s - 1) (1 - \nu) r^{\gamma_s - 2} + K_{11} \gamma_s (\gamma_s + 1) (1 - \nu) r^{-(\gamma_s - 2)} + \right. \\
&\quad \left. + M_{11} \left[(\gamma_s + 2) (\gamma_s + 1 + \nu) - \gamma_s^2 \nu \right] r^{\gamma_s} + N_{11} \left[(2 - \gamma_s) (1 + \nu - \gamma_s) - \gamma_s^2 \nu \right] \right\}; \\
S_2^{(0)} &= -D \left\{ A_0 \left[1 + 3\nu + 2(1 - \nu) \ln r \right] + 2B_0 (1 + \nu) + C_0 (1 - \nu) r^{-2} + 4(3\nu + 1) \frac{q_0 r^2}{64D} \right\}; \\
S_2^{(11)} &= -D \left\{ \left[E_{11} (1 - \gamma_s) (1 - \nu) r^{\gamma_s - 2} - K_{11} (1 + \gamma_s) (1 - \nu) r^{-(\gamma_s - 2)} \right] \gamma_s + \right. \\
&\quad \left. + M_{11} \left[(2 + \gamma_s) (1 + \nu \gamma_s + \nu) \right] r^{\gamma_s} + N_{11} \left[(2 - \gamma_s) (1 - \nu \gamma_s + \nu) - \gamma_s^2 \right] r^{-\gamma_s} \right\}; \\
S_3^{(11)} &= D (1 - \nu) \gamma_s \left[E_{11} (\gamma_s - 1) r^{\gamma_s - 2} - K_{11} (1 + \gamma_s) r^{-(\gamma_s - 2)} + \right. \\
&\quad \left. + M_{11} (1 + \gamma_s) r^{\gamma_s} + N_{11} (1 - \gamma_s) r^{-\gamma_s} \right]; \\
S_4^{(0)} &= -D \left[4A_0 r^{-1} + \frac{q_0 r}{2D} \right]; \\
S_4^{(11)} &= -D \gamma_s^2 \left[M_{11} (\gamma_s + 1) r^{\gamma_s - 1} + N_{11} (\gamma_s - 1) r^{-(\gamma_s - 1)} \right]; \\
S_5^{(11)} &= D \gamma_s^2 \left[M_{11} (\gamma_s + 1) r^{\gamma_s - 1} - N_{11} (\gamma_s - 1) r^{-(\gamma_s - 1)} \right].
\end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ковырягин М. А., Овчинников И. Г. Управляемые конструкции (в мостостроении). Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2003, 96 с.
2. Заболотская Е. Н., Заболотский Е. В., Ишмухаметов А. З. Управление колебаниями упругой круговой пластины // Избранные проблемы математики и механики: Сб. науч. работ «Прикладная и вычислительная математика», посвященный 80-летию Э. И. Григорюка. М.: МАМИ, 2003. С. 127–142.
3. Уздаев А. И. Температурные напряжения в пластинках, ограниченных двухсвязным контуром. Саратов: СГУ, 1975. 176 с.
4. Васильев Ф. П., Ишмухаметов А. З., Потапов М. М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. М.: МГУ, 1989. 142 с.
5. Ишмухаметов А. З. Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: ВЦ РАН, 2001. 120 с.
6. Ишмухаметов А. З. Двойственный регуляризованный метод решения одного класса выпуклых задач минимизации // Ж. вычислительной матем. и матем. физики, 2000. Т. 40, №7. С. 1045–1060.

Поступила 16.03.2005 г.

УДК 539.4+539.376

А. Ф. Никитенко, Н. Н. Сивкова

УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫХ КОЛЬЦЕВЫХ И КРУГЛЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ПЛАСТИН

Выполнено исследование установившейся ползучести неравномерно нагретых кольцевых и круглых осесимметрично нагруженных пластин.

Результаты расчета напряженно-деформированного состояния равномерно нагретых кольцевых и круглых осесимметрично нагруженных пластин в предположении установившейся ползучести их материала достаточно хорошо известны [1–4]. Ниже представлены аналогичные расчеты неравномерно нагретых кольцевых и круглых осесимметрично нагруженных пластин. В основу расчета положена связь между скоростями деформаций ползучести и напряжениями, базирующаяся на гипотезе подобия соответствующих девиаторов и степенной зависимости между интенсивностью скорости деформаций ползучести η_i и интенсивностью напряжений σ_i [1–4]:

$$\eta_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\eta_i}{\sigma_i} s_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Обозначения в (1) общепринятые: η_{ij} , σ_{ij} — компоненты тензоров скоростей деформаций ползучести и напряжений; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$ есть компоненты девиатора напряжений, $\sigma_0 = \sigma_{kl} \delta_{kl} / 3$ — гидростатическая составляющая тензора напряжений, δ_{kl} — символ Кронекера. Очевидно, что $\eta_{ij} \delta_{ij} = 0$, то есть соотношения (1) описывают поведение несжимаемого в процессе ползучести материала. В (1) ради простоты и обзорности получаемых результатов используется простая зависимость характеристик материала от температуры θ [2, 3]: в исследуемом температурном диапазоне от θ зависит только коэффициент ползучести B_1 , а показатель ползучести n полагаем постоянным.

В дальнейшем температурное поле пластины считаем стационарным и известным: это может быть результат решения уравнения теплопроводности или же результат соответствующего экспериментального исследования этого поля [5]. Получим основные уравнения, позволяющие рассчитать напряженно-деформированное состояние осесимметрично нагруженных неравномерно нагретых кольцевых и круглых пластин.

Пусть r — радиальное направление в пластине, φ — окружное, z — перпендикулярное плоскости пластины. Тогда в (1) σ_{11}, η_{11} будут $\sigma_\varphi, \eta_\varphi$; $\sigma_{22}, \eta_{22} - \sigma_r, \eta_r$ и $\sigma_{33}, \eta_{33} - \sigma_z, \eta_z$. Обозначим (см., например [1–4]) прогиб пластины, толщина которой есть $2h$, через w , а угол поворота нормали — v . Тогда $dw/dr = -v$. Если ψ есть скорость поворота нормали, т.е. $\dot{v} = \psi$, то $d\dot{w}/dr = -\psi$, где $\dot{w}$ — скорость прогиба срединной плоскости пластины. Постулируем общепринятые гипотезы о малости прогибов по сравнению с толщиной пластины, о недеформируемости срединной плоскости и справедливости гипотезы Кирхгофа-Лява (эти гипотезы остаются справедливыми для неравномерно нагретых пластин только при некоторых ограничениях на температурное поле [5]). Если u — перемещение любой точки пластины в радиальном направлении, тогда $u(r) = zv(r)$. Учитывая, что при осесимметричной деформации $\eta_r = du/dr$, $\eta_\varphi = \dot{u}/r$, получаем [1–4]:

$$\eta_\varphi = z \frac{\psi}{r} = -z \frac{1}{r} \frac{d\dot{w}}{dr}, \quad \eta_r = z \frac{d\psi}{dr} = -z \frac{d^2 \dot{w}}{dr^2}. \quad (2)$$

С учетом несжимаемости материала и соотношения (2) интенсивность скорости деформаций ползучести будет

$$\eta_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\psi}{r}\right)^2 + \frac{\psi}{r} \frac{d\psi}{dr} + \left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2} \cdot |z| = \frac{2}{\sqrt{3}} \kappa |z|. \quad (3)$$

Полагаем, что в пластине реализуется плоское напряженное состояние ($\sigma_z = 0$), касательным напряжением в окружном сечении пластины пренебрегаем. С учетом этого и обозначений (2), (3) получаем из (1):

$$\sigma_\varphi = a \kappa^{(1-n)/n} \alpha_\varphi |z|^{(1-n)/n} z, \quad \sigma_r = a \kappa^{(1-n)/n} \alpha_r |z|^{(1-n)/n} z. \quad (4)$$

В (4) введены обозначения:

$$a = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{(n+1)/n} [B_1(\theta)]^{-1/n}, \quad \theta = \theta(r, z), \quad a = a(r, z);$$

$$\alpha_\varphi = \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dr} + \frac{\psi}{r}; \quad \psi = \psi(r), \quad \alpha_\varphi = \alpha_\varphi(r);$$

$$\alpha_r = \frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{2} \frac{\psi}{r}, \quad \alpha_r = \alpha_r(r); \quad \kappa = \kappa(r). \quad (5)$$

Интенсивность напряжений с использованием (4) будет:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_\varphi^2 - \sigma_\varphi \sigma_r + \sigma_r^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a \kappa^{1/n} |z|^{1/n}. \quad (6)$$

Обозначим интенсивность окружного изгибающего момента на единицу длины радиального сечения через M_φ , радиального изгибающего момента на единицу длины окружного сечения через M_r . Они выражаются через компоненты напряжений следующим образом [1–4]:

$$M_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi z dz, \quad M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz. \quad (7)$$

и должны удовлетворять уравнениям равновесия [1–4]

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\varphi}{r} = Q, \quad \frac{d}{dr}(Qr) = -pr, \quad (8)$$

где Q — интенсивность поперечной силы на единицу окружного сечения, p — интенсивность внешней поперечной нагрузки. Подставив (4) в (7), получим

$$M_\varphi = \kappa^{(1-n)/n} \alpha D, \quad M_r = \kappa^{(1-n)/n} \alpha_r D, \quad (9)$$

где

$$D(r) = 2 \int_0^{h/2} a(r, z) z^{(n+1)/n} dz. \quad (10)$$

Соотношения (4) с использованием (9) можно переписать следующим образом:

$$\sigma_\varphi = lM_\varphi, \quad \sigma_r = lM_r; \quad l(r, z) = \frac{a(r, z)}{D(r)} |z|^{(1-n)/n} z. \quad (11)$$

Напряжения в (11) выражены так же, как и уравнения равновесия (8), через интенсивности изгибающих моментов. Поэтому целесообразно в соотношениях (1) перейти от σ_φ, σ_r к M_φ, M_r . Применительно к нашему случаю после стандартных операций будем иметь:

$$\eta_\varphi = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \frac{z}{D^n} M_i^n \frac{\partial M_i}{\partial M_\varphi}, \quad \eta_r = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \frac{z}{D^n} M_i^n \frac{\partial M_i}{\partial M_r}, \quad (12)$$

где интенсивность σ_i связана с интенсивностью $M_i = \sqrt{M_\varphi^2 - M_r M_\varphi + M_r^2}$ равенством $\sigma_i = lM_i$.

Выписанная система уравнений (2)–(12) позволяет рассчитать напряженно-деформированное состояние неравномерно нагретых осесимметрично нагруженных круглых и кольцевых пластин. К этой системе необходимо добавить еще граничные условия, которые выписываются применительно к каждой конкретной задаче.

2. Решение ряда практических задач с использованием системы уравнений (12), в которой фигурирует интенсивность изгибающих моментов M_i , связано с определенными математическими трудностями. В системе координат M_φ, M_r уравнение $M_i = \text{const}$ представляет эллипс, главные оси которого наклонены по 45° к осям M_φ, M_r . В целях простоты и обозримости результатов целесообразна замена эллипса (эллипса Мизеса) вписанным шестиугольником (шестиугольником Треска-Сен-Венана) [1–3].

В качестве примера рассмотрим случай, когда $M_i = M_\varphi - M_r$, причем $M_\varphi > 0$, $M_r < 0$ [1–3]. В соответствии с (12) будем иметь

$$\eta_\varphi = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \frac{z}{D^n} (M_\varphi - M_r)^n, \quad \eta_z = 0, \quad \eta_r = - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \frac{z}{D^n} (M_\varphi - M_r)^n. \quad (13)$$

Из (13) следует, что $\eta_\varphi + \eta_r = 0$. Подставляя сюда (2), получаем:

$$\psi(r) = C/r, \quad (14)$$

где C — константа интегрирования. Из (2) с использованием (14) находим η_φ и η_r , сопоставляя которые с (13), получаем

$$M_\varphi - M_r = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{(n+1)/n} C^{1/n} D r^{-2/n}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в первое уравнение равновесия (8) и интегрируя, будем иметь

$$M_r(r) = M_r(a) + C^{1/n} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{(n+1)/n} \int_a^r D(\zeta) \zeta^{-2/n-1} d\zeta + \bar{Q}(r). \quad (16)$$

Здесь $M_r(a)$ считается заданным из граничных условий на внутреннем радиусе пластины $r = a$, а есть $\bar{Q}(r) = \int_a^r Q(\zeta) d\zeta$. Считаем также заданным из граничных условий значение M_r на внешнем радиусе пластины $r = b$. С учетом этого из (16) находим, что

$$C^{1/n} = [M_r(b) - M_r(a) - \bar{Q}(b)] \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{(n+1)/n} \int_a^b D(r) r^{-2/n-1} dr \right]^{-1}. \quad (17)$$

Таким образом, вычислив из (17) $C^{1/n}$, из (14), (2) и (3) определяем деформированное состояние пластины, а из (11) с использованием (16), (15), (5) и (10) — напряженное состояние.

Если пластина равномерно нагрета, то $B_1 = \text{const}$, $a = (B_1)^{-1/n} (2/\sqrt{3})^{(n+1)/n}$, при этом

$$D = aJ, \text{ где } J = 2 \int_0^{h/2} z^{(n+1)/n} dz;$$

$$C^{1/n} = [M_r(b) - M_r(a) - \bar{Q}(b)] B_1^{1/n} / J J_1, \text{ где } J_1 = \int_a^b r^{-2/n-1} dr;$$

$$M_r(r) = M_r(a) + \frac{M_r(b) - M_r(a) - \bar{Q}(b)}{J_1} \int_a^r \zeta^{-2/n-1} d\zeta + \bar{Q}(r);$$

$$M_\varphi - M_r = \frac{M_r(b) - M_r(a) - \bar{Q}(b)}{J_1} r^{-2/n};$$

$$l = |z|^{(1-n)/n} z / J.$$

Теперь легко вычислить из (11) напряженное состояние пластины, а из (14), (2) и (3) — деформированное. Полученные результаты совпадают с известными [1–3].

Аналогичным образом можно рассмотреть случаи [1–3], когда $M_\varphi > M_r > 0$ и $M_i = M_\varphi$; $M_r > M_\varphi > 0$ и $M_i = M_r$. Перебор ряда других вариантов подробно изложен, например, в [3].

Располагая расчетными формулами, полученными выше, можно без особого труда рассчитать напряженно-деформированное состояние круглых и кольцевых пластин при различных краевых условиях и нагрузках. Пластины широко применяются в строительстве, авиации, машиностроении и других областях промышленности, что свидетельствует о достаточно широком разнообразии краевых условий и нагрузок [6].

В заключении отметим, что в расчетной практике стали использоваться следующие экспериментально установленные зависимости коэффициента ползучести от температуры [2, 3, 7]:

$$B_1 = B_0 e^{c\theta}, \quad B_1 = B_0 e^{-c/\theta}, \quad B_1 = B_0 \theta^k.$$

Заслуживает внимания факт, что коэффициент теплового расширения в решении задачи отсутствует (в отличие от аналогичного решения с использованием закона Гука). Записав гипотезу суммируемости деформаций и переходя к скоростям деформаций, получаем, что скорости тепловых деформаций обращаются в нуль ввиду того, что температурное поле является стационарным. Таким образом, температурные расширения, как следует из решения, не оказывают влияния на распределение напряжений и скоростей деформаций ползучести. Возникающие в начальный момент времени температурные напряжения очень быстро релаксируют в процессе ползучести, что дает возможность пренебрегать ими при анализе общей картины напряженного состояния элементов конструкций [2, 7]. При анализе картины деформированного состояния можно учесть термоупругие деформации, тем более что методы решения задач термоупругости применительно, в частности, к круглым и кольцевым пластинам достаточно хорошо разработаны [5]. В большинстве случаев этими деформациями на фоне развитых деформаций ползучести можно пренебречь [2, 7].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Малинин Н. Н. Исследование установившейся ползучести круглых и кольцевых осесимметрично нагруженных пластин // Расчеты на прочность. М.: Машгиз, 1963. Вып. 9. С. 173–195.
2. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести / Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1981. 496 с.
5. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970. 308 с.
6. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д. Расчет пластин. Киев: Будивельник, 1970. 436 с.
7. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести: Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 360 с.

Поступила 8.04.2005 г.