Общероссийский математический портал

В. П. Радченко, Д. В. Шапиевский, Анализ нелинейной обобщенной модели Максвелла, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 38, 55–64

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu372>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:08:42

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА

Выполнен аналитический анализ свойств нелинейной обобщенной двухэлементной модели Максвелла, локальные элементы которой наделены свойствами линейной упругости и нелинейной вязкости. Показано, что в зависимости от сочетания параметров при постоянном напряжении кривая ползучести может изменять характер выпуклости, а при разгрузке может наблюдаться немонотонный характер обратной ползучести.

Обобщенные модели Максвелла для задач линейной вязкоупругости хорошо исследованы и все особенности качественного поведения кривых деформирования для них приведены в литературе, например [1, 2]. Однако в ряде работ широко применяются обобщенные нелинейные модели Максвелла, локальные элементы которых наделены свойствами упругости и нелинейной вязкости (установившейся ползучести). Так, они используются при моделировании деформационных свойств слоистого композита в условиях нелинейной ползучести [3], биоматериалов [4], элементов конструкций из разнородных материалов [5].

Следует отметить, что детального математического качественного анализа кривых ползучести как при нагрузке, так и при разгрузке для такого рода обобщенной модели на сегодняшний день не существует, что и является целью настоящей работы.

Рассмотрим двухэлементную обобщенную модель Максвелла (рис. 1) с линейным законом упругости и нелинейным законом вязкого течения для каждого локального элемента ε_i ($i=1,2$).

Тогда для полной деформации каждого элемента имеем

$$\varepsilon_i = e_i + p_i \quad (1)$$

$$e_i = \frac{\sigma_i}{E_i}, \quad \dot{p}_i = \Psi_i(\sigma_i), \quad i=1,2, \quad (2)$$

где e_i и p_i — упругие деформации и деформации вязкого течения, E_i — модуль упругости, σ_i — напряжения, а $\Psi_i(\bullet)$ — нелинейные функции вязкого течения для каждого локального элемента.

Уравнения равновесия и совместности деформаций для обобщенной модели имеют вид

$$\alpha \sigma_1(t) + (1-\alpha) \sigma_2(t) = \sigma(t), \quad (3)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t), \quad (4)$$

где $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ — напряжение и деформация обобщенной модели, α — «объемное содержание» (концентрация) первого локального элемента ($\alpha \in]0, 1[$).

Исследуем качественный характер кривых ползучести для обобщенной модели Максвелла при действии постоянного напряжения $\sigma(t) = \sigma_0$ ($t > 0$).

Из соотношений (1) и (2) имеем

$$\varepsilon_i(t) = \frac{\sigma_i(t)}{E_i} + \int_0^t \Psi_i(\sigma_i(\tau)) d\tau, \quad i=1,2. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), дифференцируя полученное выражение по t и используя (3), получим

$$k \dot{\sigma}_1 = \Psi_2\left(\frac{\sigma_0 - \alpha \sigma_1}{1-\alpha}\right) - \Psi_1(\sigma_1), \quad (6)$$

где $k = \frac{1}{E_1} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{E_2}$.

Из уравнений (5) и (6) получаем

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} + \Psi_1(\sigma_1) = \frac{1}{kE_1} \Psi_2\left(\frac{\sigma_0 - \alpha \sigma_1}{1-\alpha}\right) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{kE_2} \Psi_1(\sigma_1). \quad (7)$$

Р и с. 1. Схема двухэлементной модели Максвелла

Как следует из (7), при всех допустимых значениях $\sigma_1 = \sigma_1(t)$ ($0 < \sigma_1 < \sigma_0/\alpha$) имеем $\dot{\varepsilon}(t) > 0$ ($t \in]0, t^*[$), т.е. кривая деформирования при нагрузке строго возрастает.

Дифференцируя (7) по t и используя (6) и (3), имеем

$$\begin{aligned}\ddot{\varepsilon}(t) &= \frac{\ddot{\sigma}_1}{E_1} + \frac{d\psi_1}{d\sigma_1} \dot{\sigma}_1 = \frac{1}{\kappa E_1} \left[-\frac{d\psi}{d\sigma_1} \dot{\sigma}_1 + \frac{d\psi_2}{d\sigma_2} \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \dot{\sigma}_1 \right] + \dot{\sigma}_1 \frac{d\psi_1}{d\sigma_1} = \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \dot{\sigma}_1 \left[\frac{1}{\kappa E_2} \frac{d\psi_1}{d\sigma_1} - \frac{1}{\kappa E_1} \frac{d\psi_2}{d\sigma_2} \right].\end{aligned}\quad (8)$$

Сделаем важное для дальнейшего исследования замечание относительно функции $\dot{\sigma}_1$. Нетрудно видеть, что эта функция не изменяет своего знака в процессе нагрузки. Это же замечание относится и к функции $\sigma_2 = \sigma_2(t)$.

Исследуем качественный вид кривой ползучести обобщенной модели, когда ее локальные элементы удовлетворяют линейным законам упругости и ползучести. Положим

$$\psi_1(\sigma) = a_1 \sigma, \quad \psi_2(\sigma) = a_2 \sigma.$$

Умножая обе части (8) на σ_0 и используя (3)–(5), получаем

$$\sigma_0 \ddot{\varepsilon} = \dot{\sigma}_1 \alpha [a_1 \sigma_1^0 - a_2 \sigma_2^0].$$

Так как $\dot{\sigma}_1$ не изменяет знак при нагрузке, то из последней формулы имеем: при $\dot{\sigma}_1 > 0$ из (6) следует, что $a_1 \sigma_1^0 < a_2 \sigma_2^0$, т.е. $\ddot{\varepsilon} < 0$; если $\dot{\sigma}_1 < 0$, то $a_1 \sigma_1^0 > a_2 \sigma_2^0$, т.е. $\ddot{\varepsilon} < 0$; если же $\dot{\sigma}_1 = 0$, то $\ddot{\varepsilon} = 0$, $\dot{\varepsilon} = \psi_1(\sigma_1^0) = \text{const}$ ($t \in]0, t^*[$).

Таким образом, из полученных результатов и формулы (7) можно сделать следующий вывод: при линейных законах упругости и ползучести кривая деформирования композитного образца является монотонно возрастающей и выпуклой вверх (в частности, она может быть прямой линией).

Полученный результат согласуется с результатами анализа поведения обобщенной модели Максвелла в теории линейной вязко - упругости [1, 2].

Рассмотрим общий случай, положив

$$\psi_1(\sigma) = a_1 \sigma |\sigma|^{n-1}, \quad \psi_2(\sigma) = a_2 \sigma |\sigma|^{m-1} \quad (n \neq m, n > 1, m > 1) \quad (9)$$

Так как после приложения нагрузки $\sigma_1 > 0$ ($0 < \sigma_1 < \sigma_0/\alpha$), то (8) с учетом (3) принимает вид

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \dot{\sigma}_1 \frac{a_2 m}{E_1 k} \left[\frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} \sigma_1^{n-1} - \left(\frac{\sigma_0 - \alpha \sigma_1}{1-\alpha} \right)^{m-1} \right]. \quad (10)$$

Найдем напряжения $\sigma'_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_i(t) = \sigma_i(+\infty)$, соответствующие деформации установившегося течения. Для этого подставим (5) в (4) и продифференцируем полученное по t . В результате, пренебрегая упругими деформациями, получим при $t \rightarrow +\infty$ систему уравнений

$$\begin{cases} \Psi_2 \left(\frac{\sigma_0 - \alpha \sigma_1}{1-\alpha} \right) = \Psi_1(\sigma'_1); \\ \sigma'_2 = \frac{\sigma_0 - \alpha \sigma'_1}{1-\alpha}. \end{cases} \quad (11)$$

Подставляя (9) в (11), перепишем уравнение для определения $\sigma'_1 = \sigma_1(+\infty)$ в следующем виде:

$$\frac{a_1}{a_2} \sigma_1^n - \left(\frac{\sigma_0 - \alpha \sigma_1}{1-\alpha} \right)^m = 0. \quad (12)$$

Введем обозначения:

$$F_1\left(\sigma_1, \sigma_0, \frac{a_1}{a_2}, \frac{E_1}{E_2}, \frac{n}{m}\right) = \frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} \sigma_1^{n-1} - \left(\frac{\sigma_0 - \alpha \sigma_1}{1 - \alpha}\right)^{m-1};$$

$$F_2\left(\sigma_1, \sigma_0, \frac{a_1}{a_2}\right) = \frac{a_1}{a_2} \sigma_1^n - \left(\frac{\sigma_0 - \alpha \sigma_1}{1 - \alpha}\right)^m.$$

Так как $\sigma_1, \sigma_0, a_1, a_2, E_1, E_2, n, m$ — величины постоянные, то функции F_1 и F_2 принимают вид $F_1 = F_1(\sigma_1)$, $F_2 = F_2(\sigma_1)$.

Учитывая, что $\sigma_1 \in]0, \sigma_0/\alpha[$, имеем

$$F_1(0) = -\left(\frac{\sigma_0}{1 - \alpha}\right)^{m-1} < 0, F_1\left(\frac{\sigma_0}{\alpha}\right) = \frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} \left(\frac{\sigma_0}{\alpha}\right)^{n-1} > 0;$$

$$F_2(0) = -\left(\frac{\sigma_0}{1 - \alpha}\right)^n < 0, F_2\left(\frac{\sigma_0}{\alpha}\right) = \frac{a_1}{a_2} \left(\frac{\sigma_0}{\alpha}\right)^n > 0.$$

Не составляет труда убедиться в том, что функции $F_1 = F_1(\sigma_1)$ и $F_2 = F_2(\sigma_1)$ монотонно возрастают при изменении σ_1 от 0 до $\frac{\sigma_0}{\alpha}$. Значит, по известной теореме алгебры на интервале $]0, \sigma_0/\alpha[$ содержится ровно по одному корню уравнений $F_1(\sigma_1) = 0$, $F_2(\sigma_1) = 0$.

Ранее мы обозначили корень уравнения $F_2(\sigma_1) = 0$ через σ_1' . Корень уравнения $F_1 = F_1(\sigma_1)$ обозначим через σ_1^+ . Перепишем уравнение (10) в новых обозначениях:

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \dot{\sigma}_1 \frac{a_2 m}{E_1 k} F_1(\sigma_1). \quad (13)$$

Предположим, что элементы обобщенной модели удовлетворяют линейному закону упругости и нелинейному закону ползучести в форме (9). Пусть в процессе нагрузки $\dot{\sigma}_1 > 0$ ($t \in]0, t^*]$). Тогда $\sigma_1' > \sigma_1^0$ и в процессе нагружения $\sigma_1 \in [\sigma_1^0, \sigma_1']$, причем $\sigma_1 = \sigma_1(t)$ изменяется от σ_1^0 до σ_1' .

В зависимости от того, где на интервале $]0, \sigma_0/\alpha[$ будет находиться значение $\sigma_1 = \sigma_1^+$, возможны различные типы кривых деформирования обобщенной модели.

Рассмотрим возникающие при этом частные случаи.

1. Пусть $0 < \sigma_1^+ < \sigma_1^0$. Так как $\sigma_1 \in [\sigma_1^0, \sigma_1']$, то $F_1(\sigma_1) > 0$, а значит, как это следует из (13), $\ddot{\varepsilon} > 0$. График кривой деформирования для этого случая представлен на рис. 2, в.

2. Пусть $\sigma_1^0 < \sigma_1^+ < \sigma_1'$. В процессе изменения σ_1 от σ_1^0 до σ_1' при переходе через $\sigma_1 = \sigma_1^+$ функция $F_1 = F_1(\sigma_1)$ изменяет знак с минуса на плюс. Из (13) следует, что $\ddot{\varepsilon}$ также изменяет знак с минуса на плюс. Учитывая, что $\dot{\varepsilon} > 0$, легко построить график кривой деформирования для этого случая (рис. 2, б).

3. Пусть $\sigma_1' < \sigma_1^+ < \sigma_0/\alpha$. Тогда при $\sigma_1 \in [\sigma_1^0, \sigma_1']$ получаем $F_1(\sigma_1) < 0$ и $\ddot{\varepsilon} < 0$. График для этого случая представлен на рис. 2, а. Если $\dot{\sigma}_1 < 0$, то $\sigma_1' < \sigma_1^0$ и $\sigma_1 = \sigma_1(t)$ в процессе нагрузки изменяется от σ_1^0 до σ_1' . Рассуждения, аналогичные рассмотренным выше, приводят к следующим результатам:

4. Для $0 < \sigma_1^+ < \sigma_1'$ график имеет вид, представленный на рис. 2, а.

5. Для $\sigma_1' < \sigma_1^+ < \sigma_1^0$ график представлен на рис. 2, б.

6. Для $\sigma_1^0 < \sigma_1^+ < \sigma_0/\alpha$ график представлен на рис. 2, в.

Р и с. 2. Кривые деформирования обобщенной модели при постоянном напряжении

В тривиальном случае, когда $\dot{\sigma}_1 = 0$, получаем $\dot{\varepsilon} = 0$ и кривая деформирования представляет собой прямую линию (рис.2, г). Вопрос о том, какой из случаев 1–6 реализуется, сводится к изучению зависимостей

$$\sigma_1^0 = \sigma_1^0 \left(\sigma_0, \frac{E_1}{E_2}, \alpha \right), \sigma_1' = \sigma_1' \left(\sigma_0, \frac{a_1}{a_2}, \frac{n}{m}, \alpha \right), \sigma_1^+ = \sigma_1^+ \left(\sigma_0, \frac{a_1}{a_2}, \frac{E_1}{E_2}, \frac{n}{m}, \alpha \right).$$

Будем считать, что $\frac{a_1}{a_2}, \frac{E_1}{E_2}, \frac{n}{m}, \alpha$ — постоянны величины. Тогда три последние функции можно записать следующим образом:

$$\sigma_1^0 = \sigma_1^0(\sigma_0), \sigma_1' = \sigma_1'(\sigma_0), \sigma_1^+ = \sigma_1^+(\sigma_0).$$

Дальнейшая задача состоит в изучении зависимости вида кривой деформирования от величины среднего напряжения σ_0 .

Выпишем соответствующие уравнения для определения $\sigma_1^0, \sigma_1', \sigma_1^+$:

$$\sigma_1^0 = \frac{\sigma_0}{\alpha + (1-\alpha)\frac{E_2}{E_1}}, \left(\frac{\sigma_0 - \alpha\sigma_1'}{1-\alpha} \right)^m = \frac{a_1}{a_2}(\sigma_1')^n, \left(\frac{\sigma_0 - \alpha\sigma_1^+}{1-\alpha} \right)^{m-1} = \frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} (\sigma_1^+)^{n-1}. \quad (14)$$

Второе и третье уравнения (14), вообще говоря, невозможно разрешить аналитически относительно σ_1' и σ_1^+ . Поэтому в дальнейшем будем искать зависимости $\sigma_0 = \sigma_0(\sigma_1^0)$, $\sigma_0 = \sigma_0(\sigma_1')$, $\sigma_0 = \sigma_0(\sigma_1^+)$.

Из соотношений (14) имеем

$$\sigma_0 = \sigma_1^0 \left(\alpha + (1-\alpha)\frac{E_2}{E_1} \right), \quad (15)$$

$$\sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} (\sigma_1')^{\frac{n}{m}} + \alpha\sigma_1', \quad (16)$$

$$\sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}} (\sigma_1^+)^{\frac{n-1}{m-1}} + \alpha\sigma_1^+. \quad (17)$$

где в общем случае $m \neq n, n > 1, m > 1$. В дальнейшем переменными считаются $\sigma_1^0, \sigma_1', \sigma_1^+$ и графики зависимостей (15)–(17) строятся в координатах $\sigma_0 - x$ (через x обозначена соответствующая переменная).

Найдем значение $x_1 = \sigma_1' = \sigma_1^+$. Для этого нужно решить систему уравнений (16) и (17) относительно x_1 :

$$\begin{cases} \sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} (x_1)^{\frac{n}{m}} + \alpha x_1, \\ \sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}} (x_1)^{\frac{n-1}{m-1}} + \alpha x_1. \end{cases}$$

Отсюда

$$x_1 = \sigma'_1 = \sigma_1^+ = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m-n}} \left(\frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} \right)^{\frac{m}{m-n}}. \quad (18)$$

Совершенно аналогично находим

$$x_2 = \sigma'_1 = \sigma_1^0 = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m-1}} \left(\frac{E_1}{E_2} \right)^{\frac{m}{m-n}}, \quad (19)$$

$$x_3 = \sigma_1^+ = \sigma_1^0 = \left(\frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m-n}}. \quad (20)$$

Тривиальные рассуждения приводят к следующему неравенству:

$$x_1 < x_3 < x_2, \quad (21)$$

справедливому для любых значений $m \neq n$, $n \geq 1$, $m > 1$.

Построение графиков зависимостей

$$\sigma_0 = \left((1-\alpha) \frac{E_2}{E_1} + \alpha \right) x;$$

$$\sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} (x)^{\frac{n}{m}} + \alpha x;$$

$$\sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}} (x)^{\frac{n-1}{m-1}} + \alpha x, \quad m \neq n, \quad n \geq 1, \quad m > 1$$

теперь не составляет труда. Схематично для различных соотношений между m и n они представлены на рис. 3–5 и помечены цифрами I, II, III соответственно.

В случае $m=1$, $n>1$ зависимость для $\sigma_0 = \sigma_0(\sigma_1^+)$ принимает вид

$$x = \left(\frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} n \right)^{\frac{1}{1-n}},$$

а неравенство (21) — $x_1 = x_3 < x_2$.

Графики зависимостей для этого случая представлены на рис. 6.

Обозначим через σ'_0 , σ''_0 , σ'''_0 значения σ_0 , соответствующие точкам x_1 , x_2 , x_3 при каждом конкретном наборе величин n , m , a_1 , a_2 , E_1 , E_2 , α . Из (21) и соответствующих рисунков имеем $0 < \sigma'_0 < \sigma'''_0 < \sigma''_0$.

Р и с. 3. График зависимости для случая $n > m > 1$:

$$\text{I} — \sigma_0 = \left((1-\alpha) \frac{E_2}{E_1} + \alpha \right) x;$$

$$\text{II} — \sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} (x)^{\frac{n}{m}} + \alpha x;$$

$$\text{III} — \sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}} (x)^{\frac{n-1}{m-1}} + \alpha x$$

Р и с. 4. График зависимостей для случая $1 < n < m$:

$$\text{I} — \sigma_0 = \left((1-\alpha) \frac{E_2}{E_1} + \alpha \right) x;$$

$$\text{II} — \sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} (x)^{\frac{n}{m}} + \alpha x;$$

$$\text{III} — \sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}} (x)^{\frac{n-1}{m-1}} + \alpha x$$

Р и с. 5. График зависимости для случая $m > n = 1$:

$$\text{I} — \sigma_0 = \left((1-\alpha) \frac{E_2}{E_1} + \alpha \right) x;$$

$$\text{II} — \sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} (x)^{\frac{n}{m}} + \alpha x;$$

$$\text{III} — \sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}} (x)^{\frac{n-1}{m-1}} + \alpha x$$

Р и с. 6. График зависимости для случая $n > m = 1$:

$$\text{I} — \sigma_0 = \left((1-\alpha) \frac{E_2}{E_1} + \alpha \right) x;$$

$$\text{II} — \sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} (x)^{\frac{n}{m}} + \alpha x;$$

$$\text{III} — \sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}} (x)^{\frac{n-1}{m-1}} + \alpha x$$

Пусть $0 < \sigma_0 < \sigma'_0$. Тогда при $n > m$ из рис. 3 и рис. 6 можно заметить, что $\sigma_1^0 < \sigma'_1 < \sigma_1^+$, а так как $\sigma_1^0 < \sigma'_1$, то $\dot{\sigma}_1 > 0$. Легко видеть, что это соответствует случаю 3, разобранным ранее. Точно также при $n < m$ из рис. 4 и рис. 5 следует, что $\sigma_1^+ < \sigma'_1 < \sigma_1^0$, а $\dot{\sigma}_1 < 0$ (так как $\sigma_1^0 > \sigma'_1$). Это соответствует случаю 4. И в том, и в другом случаях графиком зависимости $\varepsilon - t$ является кривая, типа изображенной на рис. 2, а.

Аналогично можно получить следующие результаты:

— если $\sigma'_0 < \sigma_0 < \sigma'''_0$, то график зависимости $\varepsilon - t$ имеет вид, представленный на рис. 2, б;

- если $\sigma_0''' < \sigma_0'' < \sigma_0'$, то график зависимости $\varepsilon - t$ имеет вид, представленный на рис. 2, в;
- если $\sigma_0 = \sigma_0''$, то в этом случае $\sigma_1^0 = \sigma_1'$ (т.е. $\dot{\sigma}_1 = 0$), и графиком зависимости $\varepsilon - t$ является прямая линия (рис. 2, г);
- если $\sigma_0 > \sigma_0''$, то графиком зависимости $\varepsilon - t$ является кривая типа, представленной на рис. 2, а.

В случае, когда $n = m \neq 1$, уравнения (15)–(17) принимают вид

$$\sigma_0 = \left(\alpha + (1-\alpha) \frac{E_2}{E_1} \right) \sigma_1^0, \quad \sigma_0 = \left[(1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} + \alpha \right] \sigma_1', \quad \sigma_0 = \left[(1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} \right)^{\frac{1}{m-1}} + \alpha \right] \sigma_1^+.$$

Графиком данных зависимостей в координатах $\sigma_0 - x$ будут прямые линии, причем легко видеть, что в этом случае нет значения $\sigma_0 \neq 0$, при котором $\sigma_1^0 = \sigma_1'$, $\sigma_1^+ = \sigma_1^0$ или $\sigma_1^+ = \sigma_1'$.

При $\left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} > \frac{E_2}{E_1}$ они представлены на рис. 7, а, а при $\left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} < \frac{E_2}{E_1}$ — на рис. 7, б.

Р и с. 7. График зависимостей для случая $n=m \neq 1$ при

$$\left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} > \frac{E_2}{E_1} \quad (a) \text{ и } \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} < \frac{E_2}{E_1} \quad (б):$$

$$\text{I — } \sigma_0 = \left(\alpha + (1-\alpha) \frac{E_2}{E_1} \right) x; \quad \text{II — } \sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} (x)^{\frac{n}{m}} + \alpha x;$$

$$\text{III — } \sigma_0 = (1-\alpha) \left(\frac{a_1}{a_2} \frac{E_1}{E_2} \frac{n}{m} \right)^{\frac{1}{m-1}} (x)^{\frac{n-1}{m-1}} + \alpha x$$

В том и другом случаях [графиком зависимости $\varepsilon - t$ будет кривая типа кривой, изображенной на рис. 2, б. В случае, когда $\left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m}} = \frac{E_2}{E_1}$, все три графика в координатах $\sigma_0 - x$ совпадают и кривая деформирования слоистого композита вырождается в прямую линию (рис. 2, г).

Итак, для обобщенной модели Максвелла при нагрузке возможны типы кривых ползучести, представленные на рис. 2.

Рассмотрим разгрузку обобщенной модели ($\sigma_0 = 0$ при $t > t^*$). В этом случае напряжения $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ будут противоположного знака. Считая функции $\psi_i(\sigma_i)$ нечетными, из уравнения (6) при $\sigma_0 = 0$ устанавливаем, что производная $\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_1(t)$ при $t > t^*$ знак не меняет.

При разгрузке уравнения (7) и (8) принимают вид

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{kE_2} \psi_1(\sigma_1) + \frac{1}{kE_1} \psi_2 \left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} \sigma_1 \right), \quad (22)$$

$$\ddot{\varepsilon}(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \dot{\sigma}_1 \left[\frac{1}{\kappa E_2} \frac{d\psi_1(\sigma_1)}{d\sigma_1} - \frac{1}{\kappa E_1} \frac{d\psi_2(\sigma_2)}{d\sigma_2} \right]. \quad (23)$$

Аналогично случаю нагрузки можно показать, что если элементы обобщенной модели удовлетворяют линейным законам упругости и ползучести, то в процессе разгрузки кривая деформирования композитного образца $\varepsilon = \varepsilon(t)$ является монотонно убывающей и выпуклой вниз с горизонтальной асимптотой — см. рис. 8 (здесь $|BO| = |B'O'|$ - мгновенная упругая деформация, $|DB| = |CA|$ — деформация неустойчившегося течения).

Р и с. 8. Кривая ползучести обобщенной модели при линейных законах ползучести элементов

Пусть теперь элементы обобщенной модели удовлетворяют нелинейной теории ползучести (9). Введем обозначения:

$$Y = |\sigma_1|^{n-m}, \quad L = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{m-1} \cdot \frac{E_2}{E_1} \frac{a_2}{a_1}, \quad L_1 = L \frac{m}{n}.$$

Тогда в новых обозначениях соотношения (22) и (23) принимают вид:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{a_1}{\kappa E_2} \sigma_1 |\sigma_1|^{m-1} [Y - L], \quad (24)$$

$$\ddot{\varepsilon}(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{a_1}{\kappa E_2} \dot{\sigma}_1 n |\sigma_1|^{m-1} [Y - L_1] \quad (25)$$

Предположим, что сразу после разгрузки ($t = t^* + 0$) в первом элементе обобщенной модели установилось напряжение $\Delta\sigma_1^* > 0$ ($\Delta\sigma_1^* = \sigma_1(t^* + 0)$). Тогда при $t \in [t^* + 0, +\infty[$ будет выполняться неравенство $\Delta\sigma_1^* \geq \sigma_1(t) \geq 0$, причем величина $\sigma_1 = \sigma_1(t)$ монотонно убывает при $t \rightarrow +\infty$ ($t \geq t^*$). Рассмотрим возможные здесь случаи.

а. Пусть $n > m$. В этом случае вид функций $Y = Y(\sigma_1)$, $L = L(\sigma_1)$, $L_1 = L_1(\sigma_1)$ представлен на рис.9, а. Обозначим через

$$\sigma_1'' = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{m-1}{n-m}} \left(\frac{E_2}{E_1} \frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{1}{n-m}}$$

значение $|\sigma_1|$, при котором $Y - L = 0$, а через

$$\sigma_1''' = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{m-1}{n-m}} \left(\frac{E_2}{E_1} \frac{a_2}{a_1} \frac{m}{n} \right)^{\frac{1}{n-m}}$$

значение $|\sigma_1|$, при котором $Y - L_1 = 0$.

Р и с. 9. Графики функций:
 $Y = Y(\sigma_1)$ (I), $L = L(\sigma_1)$ (II), $L_1 = L_1(\sigma_1)$ (III) при $n < m$ (а) и $n > m$ (б)

Пусть $\Delta\sigma_1^* \geq \sigma_1'' > \sigma_1'''$. Тогда

- 1) если $\Delta\sigma_1^* \geq \sigma_1 > \sigma_1''$, то из (24), (25) имеем $\dot{\varepsilon} < 0$, $\ddot{\varepsilon} > 0$;
- 2) если $\sigma_1 = \sigma_1''$, то из (24), (25) имеем $\dot{\varepsilon} = 0$, $\ddot{\varepsilon} > 0$;
- 3) если $\sigma_1'' \geq \sigma_1 > \sigma_1'''$, то из (24), (25) имеем $\dot{\varepsilon} > 0$, $\ddot{\varepsilon} > 0$;
- 4) если $\sigma_1 = \sigma_1'''$, то из (24), (25) имеем $\dot{\varepsilon} > 0$, $\ddot{\varepsilon} = 0$;
- 5) если $\sigma_1''' \geq \sigma_1 > 0$, то из (24), (25) имеем $\dot{\varepsilon} > 0$, $\ddot{\varepsilon} < 0$;
- 6) если $\sigma_1 \rightarrow 0$, то из (24), (25) имеем $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$, $\ddot{\varepsilon} \rightarrow 0$.

Р и с. 10. Кривая обратной ползучести
 обобщенной модели при $n < m$ и $\Delta\sigma_1^* > 0$

График зависимости $\varepsilon - t$, отражающей перечисленные свойства, представлен схематично на рис.10, где через t'' обозначено значение t , соответствующее σ_1'' , а через t''' — значение t , соответствующее σ_1''' . Легко видеть, что точка $t = t''$ отвечает минимуму, а точка $t = t'''$ — точке перегиба кривой деформирования при разгрузке. В зависимости от величины $\Delta\sigma_1^*$ может наблюдаться лишь часть кривой $ADKE$. Например, при $\sigma_1'' \geq \Delta\sigma_1^* > 0$ будет наблюдаться участок DKE кривой деформирования (т.е. реализуются случаи 3–6).

б. Пусть теперь $n > m$. В этом случае графики зависимостей $Y = Y(\sigma_1)$, $L = L(\sigma_1)$, $L_1 = L_1(\sigma_1)$ представлены на рис. 9, б. Рассуждения, аналогичные приведенным для случая а), приводят к зависимости $\varepsilon - t$, показанной на рис. 11. Точно так же, как в случае а), в зависимости от величины $\Delta\sigma_1^*$ может наблюдаться лишь часть кривой $ADKE$.

Случай $\Delta\sigma_1^* < 0$ ничего нового не дает. При $n > m$ имеем график, изображенный на рис. 10, а при $n < m$ график, представленный на рис. 11.

Р и с. 11. Кривая обратной ползучести обобщенной модели
при $n > m$ и $\Delta\sigma_1^* > 0$

Таким образом, доказано, что если элементы обобщенной модели удовлетворяют нелинейной теории течения в форме (9), может наблюдаться немонотонный характер кривых обратной ползучести (см. рис. 10 и 11), а при нагрузке может реализовываться один из случаев, изображенных на рис. 2. Немонотонный характер кривых обратной ползучести при разгрузке для стареющих материалов (бетон) отмечался в работе [6]. Для нестареющих (стабильных) материалов и конструкций подобный эффект, по-видимому, в научной литературе не описывался.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Блендт Д. Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 196 с.
2. Меїз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 322 с.
3. Радченко В. П. Влияние ползучести на величину упругой деформации слоистого композита // Механика композитных материалов. 1983. № 2. С. 231–237.
4. Радченко В. П. Об одной структурной реологической модели нелинейно-упругого материала // Прикладная механика, 1990. Т. 26. С. 67–74.
5. Радченко В. П. Обратимость деформации неустановившегося течения статически неопределимой стержневой системы как целого при нагружении // Прочность и надежность конструкций. Сб. научн. трудов. Куйбышев: КПУ, 1981. С. 80–89.
6. Bazant Z. P., Kim S. S. Can the creep curves for different loading ages diverge // Cem. and Concr. Res., 1978. Vol. 8, No. 5. P. 601–611.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект №03-01-00448а)

Поступила 6.07.2005 г.