Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Павлов, В. С. Бородин, Качение неуравновешенного ротора внутри горизонтального цилиндра, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 38, 65–71

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:05:48

Теоретическая механика

УДК 531

Г. В. Павлов, В. С. Бородин

КАЧЕНИЕ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТОРА ВНУТРИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА

Исследована задача о качении статически несбалансированного двухопорного горизонтального ротора в режиме обкатывания внутренней поверхности статора. Найдены границы устойчивости режима и проведен численный анализ уравнений движения ротора. Исследованы резонансные и нерезонансные режимы движения.

Задача о качении ротора по внутренней поверхности горизонтального статора имеет как самостоятельный интерес, так и является в первом приближении моделью ролика в подшипнике качения или буровой колонны в нефтяной скважине, а также описывает динамику роторных машин при аварийных ситуациях, когда происходит потеря формы движения ротора (чаще всего, прямой прецессии) и переход к форме обратной прецессии, соответствующей обкатыванию статора.

Рассматривается движение круглого статически несбалансированного диска массой m и радиуса r на жестком невесомом валу, упруго подвешенного в опорах системой пружин с жесткостями $C_{1\alpha}$, $C_{2\beta}$, $C_{2\alpha}$, $C_{2\beta}$, создающих упругое поле, вращающееся с диском. При этом силы упругости определены из векторных равенств $\bar{F}_{1\alpha} = \bar{e}_1 F_{1\alpha}$, $\bar{F}_{1\beta} = \bar{e}_2 F_{1\beta}$, $\bar{F}_{2\alpha} = -\bar{e}_1 F_{2\alpha}$, $\bar{F}_{2\beta} = -\bar{e}_2 F_{2\beta}$, где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ — единичные векторы одноименных осей. Модули сил упругости, следуя теореме Шаля о движении свободного твердого тела, пропорциональны как угловому, так и радиальному $R-r$ перемещениям ротора.

Необходимым условием наличия контакта диска с цилиндром является выполнение равенства

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{[mg + (C_1 + C_2)(R - r)]R^2}{mr^2(R - r - e)\Omega^2}},$$

вытекающего из условия равновесия сил, приложенных к ротору в верхней точке касания. Это условие не является достаточным, так как обкатывание диска может сопровождаться проскальзыванием и уводом точки касания диска с поверхности цилиндра.

Предполагаем, что диск ротора катится вследствие начального импульса по шероховатой поверхности цилиндра радиуса R в поле сил, изображенных на рис. 1. Влияние внешнего трения учтено постановкой в опоры демпферов реализующих модель Фойхта, с демпфирующей силой, определяемой функцией Релея с неполной диссипацией:

$$\Phi = \frac{1}{2} n (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2),$$

где n — коэффициент внешнего трения.

Движение ротора отнесем к неподвижной системе координат $OXYZ$ с началом в точке O основания цилиндра; ось z совпадает с осью цилиндра (рис. 1) Введем систему координат

Р и с. 1. Схема качения ротора

$e_1 e_2 e_3$: ось e_3 совпадает с z , e_2 лежит в плоскости, проходящей через e_3 и точку касания D . Ориентация диска в осях $e_1 e_2 e_3$ определяется углами Резаля α, β и φ , образованными полуподвижными осями $D e'_1 e'_2 e'_3$ с $e_1 e_2 e_3$. Ось e'_1 направлена по касательной к траектории точки D в сторону ее движения, ось e'_2 проходит через центр диска C и точку касания, e'_3 - перпендикулярна к плоскости диска так, чтобы единичные вектора $\bar{e}'_1 \bar{e}'_2 \bar{e}'_3$ образовывали правую тройку. Угол собственного вращения диска образован осью e'_2 и прямой CG , определяющей эксцентриситет диска e .

Для построения уравнений движения ротора воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента $\bar{K}'$ относительно подвижной точки D . Закон изменения вектора $\bar{K}'$ в осях $D \bar{e}'_1 \bar{e}'_2 \bar{e}'_3$ выражается уравнением [1]:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} + \bar{\omega}_D \times \bar{K} + m \bar{V}_D \times \bar{V}_G = \sum \bar{M}_D, \quad (1)$$

где $\bar{\omega}_D$ — угловая скорость системы координат $D \bar{e}'_1 \bar{e}'_2 \bar{e}'_3$, $\bar{V}_D$ и $\bar{V}_G$ — скорости точек D и C соответственно, $\sum \bar{M}_D$ — сумма моментов силы тяжести, сил упругости и демпфирования;

$$\begin{aligned} \bar{M}_D(m\bar{g}) &= [-r(\sin[\beta]\cos[\gamma] - \sin[\alpha]\cos[\beta]\sin[\gamma]) + e\cos[\varphi](\sin[\beta]\cos[\gamma] - \sin[\alpha]\cos[\beta]\sin[\gamma])] \bar{e}'_1 + \\ &+ e\sin[\varphi](\sin[\beta]\cos[\gamma] - \sin[\alpha]\cos[\beta]\sin[\gamma]) \bar{e}'_2 - [\sin[\gamma] + e(\sin[\varphi](\sin[\alpha]\sin[\beta]\sin[\gamma] + \cos[\beta]\cos[\gamma]) - \\ &- \sin[\gamma]\cos[\varphi])] \bar{e}'_3; \\ \bar{M}_D(\bar{F}_{1\alpha}) &= -F_{1\alpha}[\sin[\alpha](L_1\sin[\beta] + r\cos[\beta]) \bar{e}'_1 + L_1\cos[\alpha] \bar{e}'_2 - r\cos[\alpha] \bar{e}'_3], \\ \bar{M}_D(\bar{F}_{2\alpha}) &= -F_{2\alpha}[\sin[\alpha](L_2\sin[\beta] - r\cos[\beta]) \bar{e}'_1 + L_2\cos[\alpha] \bar{e}'_2 + r\cos[\alpha] \bar{e}'_3], \\ \bar{M}_D(\bar{F}_{1\beta}) &= F_{1\beta}(L_1\cos[\beta] - r\sin[\beta]) \bar{e}'_1, \bar{M}_D(\bar{F}_{2\beta}) = F_{2\beta}(L_2\cos[\beta] + r\sin[\beta]) \bar{e}'_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь L_1 и L_2 — расстояния от точек крепления вала до плоскости диска.

Аналогично определены моменты сил демпфирования. Вектор $\bar{\omega}_D$ представим в виде разложения

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_D &= \Omega_1 \bar{e}'_1 + \Omega_2 \bar{e}'_2 + \Omega_3 \bar{e}'_3 = (-\dot{\beta} + \dot{\gamma} \sin[\alpha]) \bar{e}'_1 + (\dot{\alpha} \cos[\beta] + \dot{\gamma} \cos[\alpha] \sin[\beta]) \bar{e}'_2 + \\ &+ (\dot{\alpha} \sin[\beta] - \dot{\gamma} \cos[\alpha] \cos[\beta]) \bar{e}'_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Угловую скорость ротора найдем по формуле

$$\bar{\omega} = \omega_1 \bar{e}'_1 + \omega_2 \bar{e}'_2 + \omega_3 \bar{e}'_3 = \bar{\omega}_D + \dot{\varphi} \bar{e}'_3.$$

Скорости $\bar{V}_D$ и $\bar{V}_G$ определяем из равенств

$$\bar{V}_D = -\dot{\varphi} r \bar{e}'_1; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_G &= [R\dot{\gamma} \cos[\alpha] - r\dot{\gamma} \cos[\alpha] \cos[\beta] + r\dot{\alpha} \sin[\beta] - z \sin[\alpha] + e(\dot{\gamma} \cos[\alpha] \cos[\beta] \cos[\varphi] - \dot{\alpha} \sin[\beta] \cos[\varphi] - \\ &- \dot{\varphi} \cos[\varphi])] \bar{e}'_1 - [R\dot{\gamma} \sin[\alpha] \sin[\beta] + z \cos[\alpha] \sin[\beta] + e(\dot{\varphi} \sin[\varphi] + \dot{\alpha} \sin[\beta] \sin[\varphi] - \\ &- \dot{\gamma} \cos[\alpha] \cos[\beta] \sin[\varphi])] \bar{e}'_2 + [R\dot{\gamma} \sin[\alpha] \cos[\beta] - r\dot{\gamma} \sin[\alpha] + r\dot{\beta} + z \cos[\alpha] \cos[\beta] + \\ &+ e(\dot{\gamma} \sin[\alpha] \cos[\varphi] - \dot{\beta} \cos[\varphi] + \dot{\alpha} \cos[\beta] \sin[\varphi] + \dot{\gamma} \sin[\beta] \cos[\alpha] \sin[\varphi])] \bar{e}'_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Кинетический момент ротора относительно точки D найдем по формуле

$$\bar{K}' = \bar{K}_G + \bar{K}^*,$$

$\bar{K}_G = m \bar{D} \bar{G} \times \bar{V}_G$ — кинетический момент центра масс, а K^* — кинетический момент относительно центра масс, имеющий вид

$$\bar{K}^* = J e'_1 \omega_1 \bar{e}'_1 + J e'_2 \omega_2 \bar{e}'_2 + J e'_3 \omega_3 \bar{e}'_3,$$

где

$$\begin{aligned} J e'_1 &= J_x \cos^2[\varphi] + J_y \sin^2[\varphi] + m(r - e \cos[\varphi])^2, \\ J e'_2 &= J_x \sin^2[\varphi] + J_y \cos^2[\varphi] + m e^2 \sin^2[\varphi], \\ J e'_3 &= J_z + m(r^2 + e^2 - 2 e r \cos[\varphi]). \end{aligned} \quad (6)$$

Явное выражение кинетического момента имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{K}^* &= m r^2 \left\{ \left[\omega_1 - \beta - \frac{z}{r} \cos[\alpha] \cos[\beta] + \frac{1}{m r^2} (J_x \cos^2[\varphi] + J_y \sin^2[\varphi]) \omega_1 + \dot{\gamma} \sin[\alpha] - \right. \right. \\ &\quad - \frac{R}{r} \dot{\gamma} \sin[\alpha] \cos[\alpha] + \frac{e}{r} \left(\dot{\beta} \cos[\varphi] - 2 \omega_1 \cos[\varphi] + \frac{z}{r} \cos[\alpha] \cos[\beta] \cos[\varphi] - \dot{\gamma} \sin[\alpha] \cos[\varphi] + \right. \\ &\quad + \frac{R}{r} \dot{\gamma} \sin[\alpha] \cos[\beta] - \cos[\varphi] (\dot{\gamma} \sin[\alpha] - \dot{\beta}) - \dot{\alpha} \cos[\beta] \sin[\varphi] - \dot{\gamma} \cos[\alpha] \sin[\beta] \sin[\varphi]) + \\ &\quad + \left. \left. \frac{e^2}{r^2} \dots \right] \bar{e}'_1 + \left[\frac{1}{m r^2} (J_x \sin^2[\varphi] + J_y \cos^2[\varphi]) \omega_2 + \frac{e}{r} \left(\dot{\beta} \sin[\varphi] + \frac{z}{r} \cos[\alpha] \cos[\beta] \sin[\varphi] - \right. \right. \\ &\quad - \dot{\gamma} \sin[\alpha] \sin[\varphi] + \frac{R}{r} \dot{\gamma} \sin[\alpha] \cos[\beta] \sin[\varphi] + \frac{e^2}{r^2} \dots \right] \bar{e}'_2 + \left[\frac{1}{m r^2} J_z \omega_3 + \omega_3 + \dot{\gamma} \cos[\alpha] \left(\frac{R}{r} - \cos[\beta] \right) - \right. \\ &\quad - \frac{z}{r} \dot{\gamma} \sin[\alpha] + \dot{\alpha} \sin[\beta] + \frac{e}{r} \left(2 \dot{\gamma} \cos[\alpha] \cos[\beta] \cos[\varphi] - 2 \omega_3 \cos[\varphi] - \frac{R}{r} \dot{\gamma} \cos[\alpha] \cos[\varphi] + \right. \\ &\quad + \left. \left. \frac{z}{r} \sin[\alpha] \cos[\varphi] - \dot{\alpha} \sin[\beta] \cos[\varphi] - \cos[\varphi] (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin[\beta]) \right) \right] \bar{e}'_3 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Выполняя необходимые вычисления в соответствии с равенством (1) и принимая отношение $\frac{e}{r} = \varepsilon$ в качестве малого параметра, запишем динамические уравнения движения ротора.

Учитывая специфику построения углов Резаля α и β , имеющих малый диапазон изменения и вызывающих малые вибрации относительно осей e_1 и e_2 , заменим тригонометрические функции, содержащие эти углы первыми членами ряда Тейлора и опустим члены, вносящие малый вклад в динамику ротора. Тогда система уравнений движения ротора и связей, записанная в безразмерной форме, примет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \omega_1^2 \alpha &= \varepsilon f_1(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}); \\ \ddot{\beta} + \omega_2^2 \beta &= D_1 + \varepsilon f_2(\alpha, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\varphi}); \\ \ddot{\varphi} + n_1 \sin\left[\frac{r}{R} \varphi\right] &= 0, \quad \gamma = \frac{r}{R} \varphi, \quad \dot{z} = 0; \\ \omega_1^2 &= \frac{4}{m r^2 \Omega^2} (C_1 L_1^2 + C_2 L_2^2); \quad \omega_2^2 = \frac{4}{5 m r^2 \Omega^2} [(C_1 L_1^2 + C_2 L_2^2) + r(R-r)(C_1 + C_2)]; \\ n_1 &= \frac{2 g R}{3 r(R-r) \Omega^2}; \quad f_1 = -\frac{4}{\Omega} (L_1^2 n_1 + L_2^2 n_2) \dot{\alpha} - 6 \dot{\beta} \dot{\varphi} - \frac{r \beta \ddot{\varphi}}{R}; \quad D_1 = \frac{4(C_1 L_1 - C_2 L_2)(R-r)}{5 m r^2 \Omega^2}; \\ f_2 &= -\frac{4}{\Omega^2} \frac{(C_2 L_2 - C_1 L_1)}{5 m r \Omega^2} \beta^2 - \frac{4}{\Omega} \frac{(L_1^2 n_1 + L_2^2 n_2)}{5 m r^2 \Omega^2} \dot{\beta} - \frac{4}{\Omega} \frac{(L_2 n_2 - L_1 n_1)}{5 m r R} \beta \dot{\beta} + r \alpha \frac{\ddot{\varphi}}{R} + 0.8 \frac{r}{g \Omega^2} \beta \cos[\gamma]. \end{aligned} \quad (8)$$

Производные берутся по безразмерному времени $\tau = \Omega \cdot t$, Ω — начальная угловая скорость диска.

Как нетрудно заметить, связь между координатами α , β и φ осуществляется только в членах, содержащих малый параметр ε , поэтому эти координаты можно считать «квазинормальными». Точное решение третьего уравнения выражается через эллиптические функции Якоби

$$\varphi = \frac{2R}{r} \operatorname{am} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2n_1 \tau^2 + \frac{r}{R} A \tau^2 + 2 \left(2n_1 + A \frac{r}{R} \right) B \tau + 2n_1 b^2 + \frac{r}{R} B^2 + \frac{4n_1}{2n_1 R + A \tau}} \right). \quad (9)$$

Здесь A, B — постоянные величины, второй член под знаком амплитуды — модуль эллиптического интеграла.

С приемлемой степенью точности решение этого уравнения можно получить, аппроксимируя его уравнением типа Дюффинга, представленным в безразмерной форме:

$$\ddot{\varphi} + \omega_3^2 \varphi = n_2 \varphi^3 - n_3 \varphi^5, \quad (10)$$

$$\text{где } \omega_3 = \frac{2gR}{3r(R-r)\Omega^2}, \quad n_2 = \frac{r^3}{6R^3} \omega_3^2, \quad n_3 = \frac{r^5}{120R^5} \omega_3^2.$$

Решение уравнения (10) на фазовой плоскости представлено на рис. 2. Видно, что координатам φ с малой потенциальной энергией отвечают периодические движения ротора, т.е. маятниковые колебания. Наличие седловой точки, соответствующей максимуму потенциальной энергии, указывает на неустойчивое состояние равновесия, приводящее к ротационному движению.

В частности, это уравнение указывает на то, что в колебательной системе маятникового

Р и с. 2. Фазовая плоскость

типа, как катающийся ротор с неуравновешенным диском, возможна перекачка энергии нутационно-прецессионных колебаний во вращательное движение, т.е. неуравновешенность диска может быть причиной неравномерности вращения вала. Полагая

$$\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = \dot{\beta} = \ddot{\beta} = \ddot{\varphi} = 0,$$

$$\dot{\varphi} = \Omega = \text{const}, \quad \beta = \beta_{cm}, \quad \varphi = 0,$$

найдем стационарные режимы движения, при которых ротор равномерно обкатывает цилиндр, образуя угол β_{cm} с плоскостью основания:

$$\omega_2^2 \beta_{cm} = D_1 - \frac{0.8}{mr\Omega^2} (C_2 L_2 - C_1 L_1) \beta_{cm}^2,$$

$$\alpha = 0, \quad \omega_3^2 \varphi = n_2 \varphi^3 - n_3 \varphi^5. \quad (11)$$

Наличие постоянного слагаемого D_1 , влияющего на увод центра колебаний по координате β , оказывает дестабилизирующее действие на динамику ротора. Поэтому при конструировании роторных машин следует надлежащим образом подбирать жесткости упругих опор, выполняя условие $C_1 L_1 - C_2 L_2 = 0$.

Значит, за невозмущенное движение

целесообразно принять $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = \dot{\beta} = \ddot{\beta} = \ddot{\varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \Omega = \text{const}, \quad \beta = \beta_{cm}, \varphi = 0$ и $\beta = 0$.

При анализе маятниковых колебаний следует принять $\dot{\varphi} = 0$. Составляя характеристическое уравнение, убеждаемся, что два его корня равны нулю, присутствие которых объясняется наличием в исходной системе двух уравнений неголономных связей. Для численных значений $r = 9.9$ см, $R = 10$ см, $e = 0.02$ см,

$$m = 0.0075 \frac{\text{кгс} \cdot \text{с}^2}{\text{см}}, \quad L = 39.9 \text{ см}, \quad L_1 = 19 \text{ см}, \quad C_1 = 3260 \frac{\text{кгс}}{\text{см}}, \quad C_2 = C_1 \frac{L_1}{L_2}, \quad n_1 = n_2 = 0.5 \frac{\text{кг}}{\text{см}},$$

заимствованных из [2], следуя критерию Гурвица, построены поверхности и границы устойчивости в пространстве параметров, характеризующих жесткостные и геометрические свойства. Показа-

но, что изменение жесткости в пределах практической реализации несущественно влияет на границы устойчивости. Заметнее влияние асимметрии установки диска на валу.

Важной характеристикой динамики ротора, сигнализирующей о возможности схода точки касания с поверхности цилиндра, является закон распределения давления по периметру цилиндра. Для нахождения необходимых соотношений воспользуемся теоремой о движении центра масс. Положение центра масс определяется равенством:

$$\bar{r}_G = R \bar{e}_2 + z \bar{e}_3 + (s \cos [\varphi] - r) \bar{e}_2' - s \sin [\varphi] \bar{e}_1'. \quad (12)$$

Составляющие сил давления R_{e_1}, R_{e_2} , направленные параллельно осям e_1, e_2 , находятся из системы уравнений:

$$\begin{aligned} -R_{e_1} \cos [\gamma] + R_{e_2} \sin [\gamma] &= (C_1 L_1 \alpha + n_1 L_1 \dot{\alpha} - C_2 L_2 \alpha - n_2 L_2 \dot{\alpha}) \cos [\alpha] \cos [\gamma] + \\ &+ (C_1 (L_1 \beta - (R - r)) + n_1 L_1 \dot{\beta} - C_2 (L_2 \beta + (R - r) - n_2 L_2 \dot{\beta})) (\cos [\beta] \sin [\gamma] - \sin [\alpha] \sin [\beta] \cos [\gamma]) - m \ddot{X}_G, \\ -R_{e_1} \sin [\gamma] + R_{e_2} \cos [\gamma] &= (C_2 L_2 \alpha + n_2 L_2 \dot{\alpha} - C_1 L_1 \alpha - n_1 L_1 \dot{\alpha}) \cos [\alpha] \sin [\gamma] + (C_1 (L_1 \beta - (R - r)) + \\ &+ n_1 L_1 \dot{\beta} - C_2 (L_2 \beta + (R - r) - n_2 L_2 \dot{\beta})) (\sin [\alpha] \sin [\beta] \sin [\gamma] + \cos [\beta] \cos [\gamma]) - m \ddot{Y}_G + mg. \end{aligned} \quad (13)$$

Система уравнений (8) была проинтегрирована численно. При малой угловой скорости собственного вращения (рис. 3) центр масс диска совершает маятниковые колебания относительно нулевого, т.е. нижнего положения устойчивого равновесия, на что указывает как фазовая траектория (см. рис. 3), так и закон изменения угловой скорости, имеющий форму синусоиды с нулевой средней интегральной. При этом давление R_{e_2} положительно и так же изменяется по гармоническому закону. При умеренной скорости вращения (рис. 4) диск совершает ротационные движения с не равной нулю средней интегральной угловой скорости собственного вращения.

Р и с. 3. Графические зависимости обобщенных координат при малой начальной угловой скорости ротора (режим маятниковых колебаний):

a — фазовая плоскость угла собственного вращения ротора; b — собственная угловая скорость ротора от времени; $в$ — зависимость угла вращения ротора от времени; $г$ — нормальная составляющая силы давления ротора на статор

Для построения аналитического решения систему уравнений (8) приведем к стандартному (в смысле Боголюбова-Митропольского) виду и будем искать решение в виде

$$\alpha = K_1 \cos [\psi_1], \quad \beta = K_2 \cos [\psi_1], \quad \varphi = K_3 \cos [\psi_3],$$

$$\psi_1 = \omega_1 t + \varphi^{(1)}, \quad \psi_2 = \omega_2 t + \varphi^{(2)}, \quad \psi_3 = \omega_3 t + \varphi^{(3)}. \quad (14)$$

Запишем амплитудно-фазовые уравнения для нерезонансного режима:

$$\frac{dK_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\psi_1}{d\tau} = \omega_1 - \frac{\varepsilon}{mr^2\Omega} (mr^2\Omega - 2L_1^2 n_1 - 2L_2^2 n_2);$$

$$\frac{dK_2}{d\tau} = -\frac{0.2\varepsilon}{mr^2\Omega} K_2 [L_1^2 n_1 + L_1 n_1 r + L_2 n_2 (L_2 + r)], \quad \frac{d\psi_2}{d\tau} = \omega_2;$$

$$\frac{dK_3}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\psi_3}{dt} = \omega_3 - \frac{gK_3^2 r^2 (K_3^4 r^4 - 48K_3^2 r^2 R^2 + 1152R^4)}{27648(R-r)R^6\Omega^2\omega_3}. \quad (15)$$

Р и с. 4. Графические зависимости обобщенных координат при малой начальной угловой скорости ротора (режим маятниковых колебаний):

a — фазовая плоскость угла собственного вращения ротора; $б$ — собственная угловая скорость ротора от времени; $в$ — изменение угла прецессии от времени; $г$ — изменение угла нутации от времени

Эта система численно проинтегрирована и получены графические зависимости амплитуд и фаз колебаний, согласуемые с результатами численного анализа исходной системы. Анализ правых частей амплитудно-частотных уравнений, разложенных в ряды Фурье (здесь не приводятся), указывает на наличие комбинационных частот, порождающих резонансы 3-го порядка, а также основного параметрического резонанса. Исследован резонанс $\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = 0$. Введением резонансной фазы $\vartheta = \psi_1 - \psi_2 - \psi_3$, приходим к частично усредненной системе:

$$\frac{dK_1}{d\tau} = -\frac{K_2 K_3 \omega_3 (6R\omega_2 + r\omega_3)}{4R\omega_1} \sin [\vartheta];$$

$$\frac{dK_2}{d\tau} = -\frac{2K_2 [L_1^2 n_1 + L_1 n_1 r + L_2 n_2 (L_2 + r)]}{5mr^2\Omega} - \frac{K_1 K_3 r \omega_3^2}{4R\omega_2} \sin [\vartheta];$$

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = -\frac{(2L_1^2 n_1 + 2L_2^2 n_2 - mr^2 \Omega) \omega_1}{mr^2 R \Omega} - \frac{K_2 K_3 \omega_3 (6R \omega_2 + r \omega_2)}{4R \omega_1 K_1} \cos [\vartheta];$$

$$\frac{dK_3}{d\tau} = 0. \quad (16)$$

Система (16) была проинтегрирована численно, что позволило выявить границы резонансного и нерезонансного режимов движения ротора.

Таким образом, выполненные исследования позволяют сделать нижеследующие выводы.

1. Наблюдается возможность реализации двух форм движения ротора: а) периодические движения, соответствующие ограниченным, малым значениям потенциальной энергии; б) вращательное движение, соответствующее высоким значениям потенциальной энергии.

2. Наблюдается явление шиммы диска ротора, на что указывает синусоидальная форма неподвижного аксонда диска.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кельзон А. С., Журавлев Ю. Н., Январев Н. В. Расчет и конструирование роторных машин. Л.: Машиностроение, 1977, 287с.
2. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: МГУ, 2000. 719 с.

*Поступила 1.10.2004 г.
После переработки 24.05.2005 г.*