Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Н. Брусов, П. П. Брусов, В. П. Саченко, Коллективные свойства сверхпроводников с нетривиальным спариванием, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2000, выпуск 9, 124–142

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu38>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:15:20

Теоретическая физика

УДК 538.945

П.Н.Брусов, П.П.Брусов, В.П.Саченко

КОЛЛЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ С НЕТРИВИАЛЬНЫМ СПАРИВАНИЕМ

В свете недавних экспериментов изучение коллективных возбуждений в сверхпроводниках с нетривиальным спариванием становится очень важной и актуальной задачей. В формализме функционального интегрирования строятся трехмерные (3D) и двумерные (2D) модели p - и d -спаривания для сверхпроводников и сверхтекучих квантовых жидкостей. В рамках этих моделей мы вычисляем спектры коллективных возбуждений в сверхпроводниках с нетривиальным спариванием (высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП), сверхпроводниках с тяжелыми фермионами (СТФ) и др.) при p - и d -спаривании. Изучаются некоторые недавние идеи относительно реализации в ВТСП смесей различных состояний. В частности, рассмотрена смесь $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ состояний. Полученные результаты по вычислению спектров коллективных возбуждений в сверхпроводниках с нетривиальным спариванием могут быть использованы для определения типа спаривания и параметра порядка в ВТСП и STF, а также для интерпретации экспериментов по поглощению ультразвука и микроволн в этих системах.

До последнего времени изучение коллективных возбуждений в сверхпроводниках с нетривиальным спариванием носило экзотический характер, и тому было несколько причин.

Во-первых, несмотря на существование определенных свидетельств о нетривиальном характере спаривания в некоторых сверхпроводниках (ВТСП и STF), достоверно нетривиальный тип спаривания не был установлен ни для одного сверхпроводника.

Во-вторых, не были найдены достаточно веские доказательства существования коллективных возбуждений в сверхпроводниках.

Ситуация резко изменилась за последние несколько лет и особенно за последний год, в связи переводом изучения коллективных возбуждений в сверхпроводниках с нетривиальным спариванием в реальную плоскость.

В свете последних экспериментов эта тема становится весьма важной. Прежде всего, несколько лет назад в пленках обычных (низкотемпературных) сверхпроводников впервые экспериментально наблюдалась так называемая «амплитудная» мода (с частотой порядка 2Δ), связанная с колебаниями амплитуды параметра порядка. Отметим, что до этого времени из двух коллективных мод, существующих в ВТСП и связанных с колебаниями фазы и амплитуды комплексного параметра порядка, экспериментально наблюдалась только первая (нуль-звук).

В-третьих, за последний год тип спаривания установлен для многих сверхпроводников. Мы имеем s -спаривание в обычных (низкотемпературных) сверхпроводниках и ВТСП с проводимостью электронного типа; d -спаривание - в ВТСП с проводимостью дырочного типа, органических сверхпроводниках, некоторых STF (UPd_2Al_3 , CePd_2Si_2 , CeIn_3 , CeNi_2Ge_2 etc.); p -спаривание - в чистом ^3He ; ^3He в аэрогеле, SR_2RuO_4 (ВТСП), UPt_3 (СТФ).

Модели p - и d -спаривания для сверхпроводников

Для теоретического описания сверхпроводников (как и сверхтекучих фаз) необходимо в соответствии с общей теорией фазовых переходов второго рода Ландау ввести параметр порядка - величину, равную нулю выше точки фазового перехода T_c и отличную от нуля ниже T_c . Такой величиной является аномальная функция Грина $F_{\alpha\beta}(k)$, играющая роль волновой функции связанных пар частиц. Поскольку волновая функция пары является симметричным спинором второго ранга, ее можно разложить по базису из симметричных унитарных матриц второго порядка $i(\sigma\sigma_2)_{\alpha\beta}$:

$F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = id(\mathbf{k})(\sigma_2)_{\alpha\beta}$ – в случае триплетного спаривания; $F_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = i\psi(\mathbf{k})(\sigma_2)_{\alpha\beta}$ – в случае синглетного спаривания, где $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ – матрицы Паули. Вектор $d(\mathbf{k})$ зависит лишь от направления в импульсном пространстве $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$.

При спаривании в p -состояние (с $l = 1$) эта зависимость описывается комбинацией сферических функций с $l = 1$, которые можно отождествить с декартовыми компонентами $\mathbf{n}$. Таким образом,

$$d_i = A_{ij} n_j.$$

Комплексная матрица 3×3 A_{ij} и является параметром порядка в системах с p -спариванием.

В случае d -спаривания параметром порядка является комплексная симметричная бесследовая матрица 3×3 A_{ij} .

Метод континуального интегрирования в применении к нерелятивистской ферми-системе при температуре T приводит к необходимости интегрировать по пространству антикоммутирующих функций $\chi(\mathbf{x}, \tau)$, $\bar{\chi}(\mathbf{x}, \tau)$ с разложением Фурье вида

$$\chi_s(x) = (\beta V)^{-1/2} \sum_p a_s(p) \exp(i(\omega\tau + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})), \quad (1)$$

где $p = (\mathbf{k}, \omega)$; $\omega = (2n + 1)\pi T$ – Ферми-частоты и $x = (\mathbf{x}, \tau)$.

Рассмотрим функционал действия для взаимодействующей ферми-системы

$$S = \int_0^\beta d\tau d^3x \sum_s \bar{\chi}_s(\mathbf{x}, \tau) \partial_\tau \chi_s(\mathbf{x}, \tau) - \int_0^\beta H'(\tau) d\tau, \quad (2)$$

соответствующий гамильтониану

$$H'(\tau) = \int d^3x \sum_s (2m)^{-1} \nabla \bar{\chi}_s(\mathbf{x}, \tau) \nabla \chi_s(\mathbf{x}, \tau) - (\lambda + s\mu_0 H) \bar{\chi}_s(\mathbf{x}, \tau) \chi_s(\mathbf{x}, \tau) + \\ + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y U(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sum_{ss'} \bar{\chi}_s(\mathbf{x}, \tau) \bar{\chi}_{s'}(\mathbf{y}, \tau) \chi_{s'}(\mathbf{y}, \tau) \chi_s(\mathbf{x}, \tau). \quad (3)$$

Проинтегрируем сначала по "быстрым", а затем по "медленным" ферми-полям, используя на этих этапах различные схемы теории возмущений. Результат интегрирования по быстрым полям, в которых $|k - k_F| > k_0$ или $|\omega| < \omega_0$, запишем в виде

$$\int \exp SD \bar{\chi}_{1s} D \chi_{1s} = \exp \tilde{S}(\chi_{0s}, \tilde{\chi}_{0s}). \quad (4)$$

Функционал S имеет смысл действия медленных полей $\chi_0, \tilde{\chi}_0$, у которых $|k - k_F| > k_0$ и $|\omega| < \omega_0$. Вспомогательные параметры k_0 и ω_0 определяются по порядку величины, а физические результаты не должны зависеть от их конкретного выбора.

Общий вид функционала S есть сумма функционалов четных степеней по полям $\chi_{0s}, \tilde{\chi}_{0s}$:

$$\tilde{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{S}_{2n}. \quad (5)$$

Пренебрегая высшими функционалами $S_6, S_8 \dots$ и опуская несущественную в дальнейшем константу S_0 , рассмотрим формы S_2 и S_4 , описывающие соответственно невзаимодействующие квазичастицы у поверхности Ферми и их парное взаимодействие. Форма S_2 имеет вид

$$\tilde{S}_2 \approx \sum_{s,p} Z^{-1} [i\omega - c_F(k - k_F) + s\mu H] a_s^+(p) a_s(p). \quad (6)$$

Форма же $\tilde{S}_4$ различна для различных типов спаривания, поэтому, начиная отсюда, мы будем вести изложение отдельно для случаев p - и d -спариваний.

p-спаривание

В случае триплетного спаривания $\tilde{S}_4$ имеет вид

$$\tilde{S}_4 = -(\beta V)^{-1} \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} t_0(p_1, p_2, p_3, p_4) a_+^+(p_1) a_-^+(p_2) a_-(p_4) a_+(p_3) - \\ - (2\beta V)^{-1} \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} t_1(p_1, p_2, p_3, p_4) (2a_+^+(p_1) a_-^+(p_2) a_-(p_4) a_+(p_3) + a_+^+(p_1) a_+^+(p_2) a_+(p_4) a_+(p_3) + \\ + a_-^+(p_1) a_-^+(p_2) a_-(p_4) a_-(p_3)).$$

Здесь $p = (\mathbf{k}, \omega)$ – 4-импульс; $t_0(p_i)$ – симметричная, $t_1(p_i)$ – антисимметричная амплитуды рассеяния при перестановках $p_1 \leftrightarrow p_2, p_3 \leftrightarrow p_4$. В окрестности сферы Ферми можно положить

$\omega_i = 0$, $k_i = n_i k_F$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Амплитуды t_0 , t_1 должны зависеть лишь от двух инвариантов, скажем, от (n_1, n_2) и $(n_1 - n_2, n_3 - n_4)$, причем t_0 - четна, а t_1 - нечетна по второму инварианту. Поэтому можно записать

$$t_0 = f((n_1, n_2), (n_1 - n_2, n_3 - n_4)); \quad t_1 = (n_1 - n_2, n_3 - n_4) g((n_1, n_2), (n_1 - n_2, n_3 - n_4)),$$

причем функции f , g - четные по второму аргументу. Функции f и g легко вычислить для газовой модели, для систем большой плотности их необходимо определять из эксперимента.

Мы рассмотрим модель с $f=0$, $g=\text{const}<0$ как модель типа БКШ (приближение слабой связи) для сверхпроводников и сверхтекучих квантовых жидкостей со спариванием в p -состоянии. Использование ферми-полей, являющихся исходными для описания He^3 , является наиболее удовлетворительным для определения действия (2) теории. Однако они оказываются совершенно неэкономичными для описания низкоэнергетических и длинноволновых явлений в системе. Причина этого состоит в следующем. Ниже температуры перехода T_c в сверхтекучую фазу связанность исходных квазичастиц в куперовские пары проявляется в наличии энергетической щели в одночастичном спектре

$$E(k) = (\xi^2(k) + \Delta^2)^{1/2},$$

где $\xi(k) = c_F (k - k_F)$. Для He^3 величина щели порядка мК. В результате функция Грина $\langle 0 | T(X(x, \tau)X(y, \tau_I)) | 0 \rangle$ не имеет особенностей в энергетической плоскости ниже $E = \Delta$. Поэтому описание большого набора физических явлений с $E \ll \Delta$ ("инфракрасных" явлений), таких, как нуль-звуковые волны, спиновые волны и др., в терминах ферми-полей оказывается довольно сложным. Необходимо просуммировать бесконечное число фейнмановских диаграмм даже для простейшего понимания этих явлений. С другой стороны, имеются гриновские функции, которые непосредственно описывают возбуждения такого типа в комплексной энергетической плоскости, такие, как

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T(X^+(x, \tau)X(x, \tau); X^+(y, \tau_I)X(y, \tau_I)) | 0 \rangle; \\ & \langle 0 | T(X^+(x, \tau)(\sigma_a/2)X(x, \tau); X^+(y, \tau_I)(\sigma_a/2)X(y, \tau_I)) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Сингулярности, которые появляются в таких сложных функциях, но которых нет в функции $\langle 0 | T(X^+(x, \tau)X(y, \tau_I)) | 0 \rangle$, называются коллективными возбуждениями. Наиболее экономичным способом их описания является переход от исходных ферми-полей к бозе-полям, описывающим куперовские пары квазичастиц. Такой переход можно осуществить, вставив, например, под знак интеграла по ферми-полям гауссов интеграл от $\exp(c^+ A c)$ по бозе-полю c , где A - некоторый оператор. После сдвига бозе-поля, уничтожающего форму S_4 на квадратичную форму ферми-полей, интеграл по ферми-полям становится гауссовым и равен определителю оператора $M(c^+, c)$. Таким образом, мы приходим к функционалу

$$S_{\text{eff}} = c^+ A c + \ln \det \frac{M(c^+, c)}{M(c^{(0)}, c^{(0)})},$$

в котором $\ln \det$ регуляризован делением $M(c^+, c)$ на оператор $M(c^{(0)}, c^{(0)})$. S_{eff} называется функционалом гидродинамического действия. Он определяет точку фазового перехода исходной ферми-системы как бозе-конденсацию полей c , а также плотность конденсата при $T < T_c$.

При спаривании в p -состояние под знак интеграла по ферми-полям необходимо ввести гауссов интеграл по комплексным функциям $c_{ia}(x, \tau)$, $c_{ia}(x, \tau)$ с векторным индексом i и изотопическим a ($i, a = 1, 2, 3$), имеющий вид

$$\int dc_{ia}^+ dc_{ia} \left[g^{-1} \sum_{p, i, a} c_{ia}^+(p) c_{ia}(p) \right],$$

где g — отрицательная константа.

Сдвиг

$$\begin{aligned} \cdot c_{i1}(p) & \rightarrow c_{i1}(p) + \frac{g}{2(\beta V)^{1/2}} \sum_{p_1 + p_2 = p} (n_{1i} - n_{2i}) [a_+(p_2) a_+(p_1) - a_-(p_2) a_-(p_1)], \\ \cdot c_{i2}(p) & \rightarrow c_{i2}(p) + \frac{gi}{2(\beta V)^{1/2}} \sum_{p_1 + p_2 = p} (n_{1i} - n_{2i}) [a_+(p_2) a_+(p_1) + a_-(p_2) a_-(p_1)], \\ \cdot c_{i3}(p) & \rightarrow c_{i3}(p) + \frac{g}{(\beta V)^{1/2}} \sum_{p_1 + p_2 = p} (n_{1i} - n_{2i}) a_-(p_2) a_+(p_1) \end{aligned}$$

уничтожает форму S_4 . Квадратичная форма по медленным ферми-полям имеет вид

$$K = \frac{1}{2} \sum_{p_1, p_2, a, b} \psi_a^+(p_1) M_{ab}(p_1, p_2) \psi_b(p_2),$$

где $\psi_1(p) = a_+(p)$, $\psi_2(p) = -a_-(p)$, $\psi_3(p) = a_+^\pm(p)$, $\psi_4(p) = a_-^\pm(p)$, матрица четвертого порядка $M(p_1 p_2)$ с элементами $M_{ab}(p_1 p_2)$, даваемыми формулами

$$M_{11} = Z^{-1} [i\omega + \xi - \mu(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma})] \delta_{p_1 p_2}, \quad M_{22} = Z^{-1} [-i\omega + \xi + \mu(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma})] \delta_{p_1 p_2},$$

$$M_{12} = (\beta V)^{-1/2} (n_{1i} - n_{2i}) c_{ia}(p_1 + p_2) \sigma_a, \quad M_{21} = -(\beta V)^{-1/2} (n_{1i} - n_{2i}) c_{ia}^+(p_1 + p_2) \sigma_a. \quad (7)$$

Проинтегрировав по медленным ферми-полям, приходим к функционалу гидродинамического действия в виде

$$S_{\text{eff}} = g^{-1} \sum_{p, i, a} c_{ia}^+(p) c_{ia}(p) + \frac{1}{2} \ln \det \frac{\mathcal{M}(c_{ia}, c_{ia}^+)}{\mathcal{M}(c_{ia}^{(0)}, c_{ia}^{(0)+})}, \quad (8)$$

где $c_{ia}^{(0)}$ конденсатные значения Бозе-полей c_{ia} и $\mathcal{M}(c_{ia}, c_{ia}^+)$ - 4×4 матрица, зависящая от Бозе-полей и параметров квазифермионов с элементами (7).

Функционал гидродинамического действия содержит всю информацию о физических свойствах модельной системы и определяет, в частности, ее спектр коллективных возбуждений.

d-спаривание

В случае синглетного спаривания $\tilde{S}_4$ имеет вид

$$\tilde{S}_4 = -(\beta V)^{-1} \sum_{p_1 + p_2 = p_3 + p_4} t(p_1, p_2, p_3, p_4) a_+^+(p_1) a_-^+(p_2) a_-(p_4) a_+(p_3). \quad (9)$$

Первый вариант модели d -спаривания для сверхпроводников, полученный методом функционального интегрирования, был предложен П.Н.Брусовым и Н.П. Брусовой в 1994 г. [6,7], когда идея d -спаривания в ВТСП только начинала всерьез обсуждаться. Ниже мы представим усовершенствованную самосогласованную модель сверхпроводников с d -спариванием, а далее исследуем с ее помощью спектра коллективных мод в ВТСП и СТФ.

В случае d -спаривания мы имеем

$$t(p_1, p_2, p_3, p_4) = V(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{m=-2}^2 g_m Y_{2m}(\mathbf{k}) Y_{2m}^*(\mathbf{k}'). \quad (10)$$

Здесь $k_1 = k + q/2, k_2 = -k + q/2, k_3 = k' + q/2, k_4 = k' + q/2, Y_{2m}(k)$ - сферические гармоники с $l = 2$.

Мы рассматриваем случай сферической симметрии, который требует использования одной константы связи g . Учет симметрии решетки требует введения дополнительных констант связи (до пяти в общем случае: пять-число сферических гармоник с $l = 2$). Это число, однако, уменьшается до двух в случае кубической симметрии и до трех в случае гексагональной симметрии: $g_{lm}(m=0, \pm 1, \pm 2)$.

Для перехода к Бозе-полям, описывающим квазифермионы у поверхности Ферми, необходимо после интегрирования по быстрым ферми-полям под знак интеграла по ферми-полям ввести гауссов интеграл по комплексным функциям $c_{ia}(\mathbf{x}, t)$, $c_{ia}^*(\mathbf{x}, t)$ с векторным индексом i и изотопическим a ($i, a = 1, 2, 3$), имеющий вид

$$\int dc_{ia}^+ dc_{ia} \left[g^{-1} \sum_{p, i, a} c_{ia}^+(p) c_{ia}(p) \right]. \quad (11)$$

В случае синглетного d -спаривания $c_{ia}(\mathbf{x}, t)$ являются бесследовыми симметричными матрицами 3×3 , обладающими $2 \times (6-1) = 10$ степенями свободы в отличие от триплетного p -спаривания в сверхтекучем He^3 , где число степеней свободы равно 18. Поскольку число КМ равно числу степеней свободы, то в сверхпроводнике при d -спаривании, вообще говоря, должно наблюдаться 10 КМ, в отличие от сверхтекучего He^3 , где их число равно 18.

После сдвига в $c_{ia}[\mathbf{x}, t]$ на квадратичную форму по медленным ферми-полям, уничтожающую члены четвертого порядка по ферми-полям, и интегрирования по медленным ферми-полям (теперь интеграл по медленным ферми-полям является гауссовым и его можно вычислить аналитически) получается функционал гидродинамического действия, зависящий от бозе-полей и параметров квазифермионов:

$$S_{\text{eff}} = g^{-1} \sum_{p, i, a} c_{ia}^+(p) c_{ia}(p) + \frac{1}{2} \ln \det \frac{\mathcal{M}(c_{ia}, c_{ia}^+)}{\mathcal{M}(c_{ia}^{(0)}, c_{ia}^{(0)+})}, \quad (12)$$

где $c_{ia}^{(0)}$ - конденсатные значения Бозе-полей c_{ia} и $\mathcal{M}(c_{ia}, c_{ia}^+)$ - 4×4 матрица, зависящая от Бозе-полей и параметров квазифермионов. Этот функционал определяет все свойства рассматриваемой системы и, в частности, спектр коллективных возбуждений.

Как упоминалось выше, в случае синглетного d -спаривания число степеней свободы параметра порядка равно 10, т.е. мы должны иметь пять комплексных канонических переменных. Из недиагональных элементов матрицы M легко видеть, что в качестве канонических переменных естественно выбрать следующие комбинации исходных переменных:

$$c_1 = c_{11} + c_{22}; c_2 = c_{11} - c_{22}; c_3 = c_{12} + c_{21}; c_4 = c_{13} + c_{31}; c_5 = c_{23} + c_{32}.$$

В канонических переменных эффективный функционал действия имеет следующий вид:

$$S_{\text{eff}} = (2g)^{-1} \sum_{p,j} c_j^+(p) c_j(p) (1 + 2\delta_{j1}) + \frac{1}{2} \ln \det \frac{\mathcal{M}(c_j^+, c_j)}{\mathcal{M}(c_j^{(0)}, c_j^{(0)})}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} M_{11} &= Z^{-1} [i\omega + \xi - \mu(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma})] \delta_{p_1 p_2}, \quad M_{22} = Z^{-1} [-i\omega + \xi + \mu(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma})] \delta_{p_1 p_2}; \\ M_{12} &= M_{21}^* = (\beta V)^{-1/2} \left(\frac{15}{32\pi} \right)^{1/2} [c_1(1 - 3\cos^2 \theta) + c_2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + c_3 \sin^2 \theta \sin 2\varphi + \\ &+ c_4 \sin 2\theta \cos \varphi + c_5 \sin 2\theta \sin \varphi]. \end{aligned} \quad (14)$$

Коллективные свойства сверхпроводников с нетривиальным спариванием p -спаривание

Первые результаты для случая p -спаривания были получены Брусовым и Поповым² для А-, В-, А₁- ,2D- и полярных фаз, связанных со сверхтекучим ³He, где первые три фазы были открыты экспериментально. Нами рассмотрены дополнительные сверхпроводящие фазы, которые могут реализовываться в ВТСП или СТФ. Ниже мы приведем полученные результаты. Напомним, что спектр коллективных мод в каждой сверхпроводящей фазе состоит из 18 мод, включающих в себя высокочастотные и Голдстоуновские моды.

А-фаза

$$E = \Delta_0(T)(1.96 - i 0.31) \quad (3 \text{ моды}); \quad E = \Delta_0(T)(1.17 - i 0.13); E^2 = c_F^2 k^2 / 3 (3); E^2 = c_F^2 k_{\parallel}^2 (6).$$

В- фаза

$$E^2 = 12\Delta^2 / 5 (5); E^2 = 8\Delta^2 / 5 (5); E^2 = 4\Delta^2 (4); E^2 = c_F^2 k^2 / 3 (1); E^2 = c_F^2 k^2 / 5 (1); E^2 = 2c_F^2 k^2 / 5 (2).$$

2D- фаза

$$E = 0 (6); \quad E = \Delta_0(T)(1.96 - i 0.31) \quad (2); \quad E = \Delta_0(T)(1.17 - i 0.13) \quad (4);$$

$$E = 2\mu H (2); \quad E_0^2 = \Delta_0^2(T)(1.96 - i 0.31)^2 + 4\mu^2 H^2; \quad E^2 = \Delta_0^2(T)(0.518)^2 + 4\mu^2 H^2 (1);$$

$$E^2 = \Delta_0^2(T)(0.495)^2 + 4\mu^2 H^2 (1).$$

А₁- фаза

$$E = \Delta_0(T)(1.96 - i 0.31) \quad (1); \quad E = \Delta_0(T)(1.17 - i 0.13) (2); \quad E = 2\mu H (8); \quad E = 0 (1).$$

Здесь H – магнитное поле.

Шесть других мод имеют мнимый спектр (это связано с нестабильностью А₁-фазы относительно малых возмущений).

В полярной фазе $\begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 001 \end{pmatrix}$ мы получили следующий набор уравнений для спектра коллек-

тивных мод:

$$\int_0^1 dx (1 - x^2) \left[\left(1 - \frac{4\Delta^2}{q^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}} - 2 \right] = 0 \quad (6 \text{ мод});$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2) \left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} \ln \frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} - 2 \right] = 0 \quad (6 \text{ моды});$$

$$\int_0^1 dx x^2 \left(1 + \frac{4\Delta^2}{q^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} \ln \frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} = 0 \quad (3 \text{ моды});$$

$$\int_0^1 dx x^2 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} \ln \frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} = 0 \quad (3 \text{ моды}).$$

Полагая $\kappa=0$ и решая численно эти уравнения, мы нашли корень $E = \Delta_0(T)(1.20 - i 1.75)$ для второго уравнения и $E=0$ для третьего. Мы не нашли корней для первого и четвертого уравнений.

Таким образом, в полярной фазе найдено шесть сильно затухающих мод с частотой $E = \Delta_0(T)(1.96 - i 0.31)$ и три Голдстоуновские моды. Наличие сильно затухающих мод связано с тем, что в полярной фазе щель исчезает вдоль экватора, в отличие от случаев аксиальной и планарной фаз, где она обращается в нуль лишь в полюсах и коллективные моды затухают умеренно и могут наблюдаться как резонансы в экспериментах по поглощению ультразвука.

Для следующих **трех фаз** $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 100 \\ 0-10 \\ 000 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 010 \\ 100 \\ 000 \end{pmatrix}$ and $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0-10 \\ 100 \\ 000 \end{pmatrix}$ спектр оказывается

идентичным, и для его определения мы получаем следующий набор уравнений:

$$\int_0^1 dx(1-x^2) \left[1 + \frac{6\Delta^2}{q^2} \right] \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} \ln \frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} = 0 \quad (2 \text{ моды});$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2) \left[1 + \frac{4\Delta^2}{q^2} \right] \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} \ln \frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} = 0 \quad (2 \text{ моды});$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2) \left[1 + \frac{6\Delta^2}{q^2} \right] \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} \ln \frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} = 0 \quad (3 \text{ моды});$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2) \left[1 + \frac{8\Delta^2}{q^2} \right] \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} \ln \frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}} = 0 \quad (1 \text{ мода});$$

$$\int_0^1 dx(2-x^2)\left(1+\frac{4\Delta^2}{q^2}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}\ln\frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}-1\right]=0 \text{ (1 мода);}$$

$$\int_0^1 dx2x^2\left(1+\frac{6\Delta^2}{q^2}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}\ln\frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}-1\right]=0 \text{ (2 моды);}$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2)\left[1-\frac{2\Delta^2}{q^2}\right]\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}\ln\frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}=0 \text{ (2 моды);}$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}\ln\frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}=0 \text{ (3 моды);}$$

$$\int_0^1 dx(1-x^2)\left[1-\frac{4\Delta^2}{q^2}\right]\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}\ln\frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}=0 \text{ (1 мода);}$$

$$\int_0^1 dx x^2\left[\left(1-\frac{2\Delta^2}{q^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}\ln\frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}-1\right]=0 \text{ (2 моды);}$$

$$\int_0^1 dx x^2\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}\ln\frac{1+\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{4\Delta^2}{q^2}}}-1\right]=0 \text{ (1 мода).}$$

Здесь $q^2 = \omega^2 + c_F^2(\mathbf{k}\mathbf{n})$.

Численное решение этих уравнений дает следующий спектр высокочастотных мод (при $\kappa=0$):

$$E = \Delta_0(T)(1.83 - i 0.06)(1); E = \Delta_0(T)(1.58 - i 0.04)(2); E = \Delta_0(T)(1.33 - i 0.10)(1);$$

$$E = \Delta_0(T)(1.33 - i 0.08)(2); E = \Delta_0(T)(1.28 - i 0.04)(2); E = \Delta_0(T)(1.09 - i 0.22)(3);$$

$$E = \Delta_0(T)(0.71 - i 0.05)(3); E = \Delta_0(T)(0.33 - i 0.34)(1); E = \Delta_0(T)(0.23 - i 0.71)(2).$$

Две последние моды имеют мнимые части того же порядка, что и действительные. Это означает, что они сильно затухают и не могут рассматриваться как резонансы.

Для $\begin{pmatrix} 110 \\ ii0 \\ 000 \end{pmatrix}$ фазы мы получаем следующий набор уравнений для спектра коллективных воз-

буждений:

$$\int_0^1 dx x^2 (1 + \frac{2\Delta^2}{q^2}) [\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}} - 1] = 0 \quad (6 \text{ мод});$$

$$\int_0^1 dx (1 - x^2) (1 + \frac{2\Delta^2}{q^2}) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}} = 0 \quad (4 \text{ моды});$$

$$\int_0^1 dx (1 - x^2) (1 + \frac{\Delta^2}{q^2}) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}} = 0 \quad (4 \text{ моды});$$

$$\int_0^1 dx (1 - x^2) (1 + \frac{3\Delta^2}{q^2}) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}}{1 - \sqrt{1 + \frac{4\Delta^2}{q^2}}} = 0 \quad (4 \text{ моды}).$$

Численное решение этих уравнений дает следующий спектр высокочастотных мод (при $\kappa=0$):

$$E = \Delta_0(T)(0.66 - i \ 0.02); E = \Delta_0(T)(0.64 - i \ 0.02); E = \Delta_0(T)(0.46 - i \ 0.04);$$

$$E = \Delta_0(T)(0.36 - i \ 0.04).$$

Для $\begin{pmatrix} 001 \\ 000 \\ 100 \end{pmatrix}$ фазы мы нашли следующие высокочастотные моды:

$$E = \Delta_0(T)(1.80 - i \ 0.09); E = \Delta_0(T)(0.55 - i \ 0.80);$$

Последняя мода имеет мнимую часть того же порядка, что и действительная. Это означает, что она сильно затухает и не может рассматриваться как резонанс.

d-спаривание

Коллективные возбуждения в ВТСП при d-спаривании

Мы рассмотрим следующие сверхпроводящие состояния, возникающие в симметричной классификации ВТСП:

$$d_{x^2-y^2}, d_{xy}, d_{xz}, d_{yz}, d_{3z^2-r^2} :$$

- 1) $\begin{pmatrix} -100 \\ 0-10 \\ 002 \end{pmatrix}$ с щелью, пропорциональной $|3\cos^2\theta - 1|$;
- 2) $\begin{pmatrix} 100 \\ 0-10 \\ 000 \end{pmatrix}$ с щелью, пропорциональной $\sin^2\theta |\cos 2\phi|$;
- 3) $\begin{pmatrix} 010 \\ 100 \\ 000 \end{pmatrix}$ с щелью, пропорциональной $\sin^2\theta |\sin 2\phi|$;
- 4) $\begin{pmatrix} 001 \\ 000 \\ 100 \end{pmatrix}$ с щелью, пропорциональной $|\sin 2\theta \cos \phi|$;

$$5) \begin{pmatrix} 000 \\ 001 \\ 010 \end{pmatrix} \text{ с щелью, пропорциональной } |\sin 2\theta \sin \phi|.$$

Вычислим спектр коллективных мод для пяти данных состояний. В первом приближении спектр коллективных возбуждений определяется квадратичной частью эффективного действия S_{eff} , получаемого посредством сдвига $c_j(p) \rightarrow c_j(p) + c_j^0(p)$ в S_{eff} . Здесь $c_j^0(p) = (\beta V)^{1/2} c \delta_{p0} c_j^0$ конденсатные значения канонических бозе-полей, и c_j^0 для рассматриваемых здесь случаев равны:

1) $c_1^0 = -2$; 2) $c_2^0 = 2$; 3) $c_4^0 = 2$; 4) $c_5^0 = 2$; 5) $c_3^0 = 2$.

Все оставшиеся компоненты $c_j(p)$ равны нулю.

Спектр находится из уравнения $\det Q = 0$, где Q матрица квадратичной формы.

Для каждой сверхпроводящей фазы найдено пять высокочастотных мод и пять голдстоуновских (Gd) (квазиголдстоуновских (qGd)) мод, чьи энергии равны нулю или малы ($\leq 0.1 \Delta_0$).

Для высокочастотных мод были получены следующие результаты.

$$d_{3z^2-r^2}: \begin{aligned} E_1 &= \Delta_0(2.0 - i 1.65); \\ E_{2,3} &= \Delta_0(1.85 - i 0.69); \\ E_{4,5} &= \Delta_0(1.64 - i 0.50). \end{aligned}$$

$$d_{x^2-y^2}, d_{xy}: \begin{aligned} E_1 &= \Delta_0(1.88 - i 0.79); \\ E_2 &= \Delta_0(1.66 - i 0.50); \\ E_3 &= \Delta_0(1.14 - i 0.68); \\ E_4 &= \Delta_0(1.13 - i 0.71); \\ E_5 &= \Delta_0(1.10 - i 0.65). \end{aligned}$$

$$d_{xz}, d_{yz}: \begin{aligned} E_1 &= \Delta_0(1.76 - i 1.1); \\ E_2 &= \Delta_0(1.70 - i 0.48); \\ E_3 &= \Delta_0(1.14 - i 0.68); \\ E_4 &= \Delta_0(1.13 - i 0.73); \\ E_5 &= \Delta_0(1.04 - i 0.83). \end{aligned}$$

Мы вычислили спектр коллективных мод для пяти сверхпроводящих фаз ВТСП, а именно для $d_{x^2-y^2}, d_{3z^2-r^2}, d_{xy}, d_{xz}, d_{yz}$, используя модель d -спаривания, созданную нами с помощью метода функционального интегрирования, и рассматривая случай сферической симметрии, который требует использования одной константы связи g . Учет симметрии решетки требует введения дополнительных констант связи (до пяти в общем случае).

Для каждой из пяти фаз мы нашли пять высокочастотных мод в каждой фазе с частотами, лежащими в интервале $\Delta_0 - 2\Delta_0$, а также пять голдстоуновских (квазиголдстоуновских) мод (с частотами меньшими $0,1 \Delta_0$).

Отметим, что частоты (энергии) всех коллективных мод оказываются комплексными. Это является следствием d -спаривания или, другими словами, следствием исчезновения щели в выбранных направлениях. В этом случае бозе-возбуждения распадаются на фермионы, что приводит к затуханию коллективных мод. Значение мнимой части частоты (энергии) ImE_i составляет от 25% до 80%. Некоторые из этих мод затухают умеренно и могут рассматриваться как резонансы, в то время как другие затухают более сильно, что делает их наблюдение более трудным. Учет кулоновского взаимодействия превращает нуль-звуковую моду в плазменную моду.

Отметим в заключение, что полученные спектры коллективных мод в ВТСП могут быть использованы для интерпретации ультразвуковых экспериментов и экспериментов по поглощению микроволн в ВТСП, а также для идентификации типа спаривания и параметра порядка в ВТСП.

В сверхпроводниках с тяжелыми фермионами (СТФ), так же, как и в ВТСП, параметр порядка, как и тип спаривания, к настоящему времени установлены не для всех соединений. Традиционное БКШ спаривание находится в противоречии с неэкспоненциальной температурной зависимостью большинства термодинамических величин, таких, как теплоемкость и др. Сложная фазовая диаграмма STF также свидетельствует о нетривиальном спаривании в этих системах. Известны примеры STF как с p -спариванием, так и с d -спариванием. Случай p -спаривания нами рассмотрен выше. Здесь с помощью метода функционального интегрирования мы рассмотрим d -спаривание в STF аналогично тому, как это было сделано нами для всех сверхпроводящих состояний, возникающих в симметричной классификации ВТСП. Мы вычислим полный спектр коллективных возбуждений для всех сверхпроводящих состояний, возникающих в симметричной классификации STF. Мы рассмотрим три сверхпроводящих состояния, включая так называемые $d\gamma$ и Y_{2-1} . Коллективные возбуждения в двух последних фазах изучались ранее Хирошимой и Намайзавой [10] с помощью метода кинетического уравнения. Ниже мы сравним наши результаты для двух из трех фаз с результатами Хирошимы и Намайзавы [10].

В каждой сверхпроводящей фазе STF существует десять коллективных мод. Нами найдено, что пять из них являются высокочастотными, т.е. имеют частоты порядка щели в ферми-спектре. В то же время пять оставшихся мод являются голдстоуновскими (или квази-голдстоуновскими) с частотами (энергиями), исчезающими при нулевых импульсах.

Итак, рассмотрим снова трехмерную модель d -спаривания в сверхпроводниках, описанную выше. Напомним, что модель описывается функционалом гидродинамического действия, получаемого последовательным функциональным интегрированием по быстрым, а затем медленным ферми-полям. Функционал гидродинамического действия определяет все свойства рассматриваемой системы, в данном случае STF и, в частности, спектр коллективных возбуждений.

Вычисление спектра коллективных мод. Мы рассмотрим следующие сверхпроводящие состояния, возникающие в симметричной классификации STF:

- 1) $d\gamma$ -фазу $\begin{pmatrix} e^{4\pi i/3} 00 \\ 0e^{2\pi i/3} 0 \\ 001 \end{pmatrix}$ с щелью $\Delta(T) = \Delta(T)(e^{4\pi i/3} k_x^2 + e^{4\pi i/3} k_y^2 + k_z^2)$;
- 2) Y_{2-1} -фазу $\begin{pmatrix} 001 \\ 00-i \\ 1-i0 \end{pmatrix}$ с щелью $\Delta(T) = \Delta(T) \sin 2\theta e^{-i\phi}$;
- 3) фазу $\begin{pmatrix} 1i0 \\ i-10 \\ 000 \end{pmatrix}$ с щелью $\sim \sin^2 \theta$.

Вычислим спектр коллективных мод для трех данных состояний. В первом приближении спектр коллективных возбуждений определяется квадратичной частью эффективного действия S_{eff} , получаемого посредством сдвига $c_j(p) \rightarrow \chi_j(p) + c_j(p)$ в S_{eff} . Здесь $c_j^0(p) = (\beta V)^{1/2} c \delta_{p0} c_j^0$ - конденсатные значения канонических бозе-полей, и $c_j^0(p)$ для рассматриваемых здесь случаев равны:

- 1) $c_1^0 = -1$; $c_2^0 = -i\sqrt{3}$; 2) $c_4^0 = 2$; $c_5^0 = 2i$; 3) $c_2^0 = 2$; $c_3^0 = 2i$.

Все оставшиеся компоненты $c_j(p)$ равны нулю.

Для получения квадратичной части эффективного действия S_{eff} представим второй член в эффективном действии S_{eff} в следующем виде: $\frac{1}{2} \ln \det (1+Gu)$.

$$\text{Здесь } G^{-1} = M(c^{0+}, c^0) \text{ и } u = (\beta V)^{-1/2} \begin{pmatrix} 0; [cY^*] \\ [cY^*]; 0 \end{pmatrix}.$$

В дополнение разложим $1/2 \ln \det(1+Gu)$ по степеням новых бозе-полей c_j и удержим члены до второго порядка по c_j . Член второго порядка (член первого порядка исчезает в результате минимизации) дается следующим выражением:

$$-\frac{1}{4} \sum_{p_1, p_2, p_3, p_4} \text{tr}(G_{p_1 p_2} u_{p_2 p_3} G_{p_{13} p_{24}} u_{p_{42} p_{31}}).$$

После вычислений получим квадратичную форму, определяющую спектр коллективных возбуждений.

Уравнение для щели. Рассмотрим первый член в S_{eff} :

$$(2g)^{-1} \sum_{p,j} c_j^+(p) c_j(p) (1 + 2\delta_{j1}).$$

Константа g , описывающая взаимодействие квазифермионов, должна быть исключена с помощью уравнения для щели. Для его получения необходимо вычислить S_{eff} в области Гинзбурга-Ландау $T \sim T_c$, где волновая функция куперовских пар (параметр порядка) мала (по модулю):

$$S_{eff} = (2g)^{-1} \sum_{p,j} |c_j(p)|^2 (1 + 2\delta_{j1}) + \frac{1}{2} Sp \ln(1 + Gu).$$

Разлагая второй член по степеням Gu , имеем

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n} Sp(Gu)^{2n}.$$

Выполняя суммирование, подставляя

$$u_{p_1 p_2} = \alpha(\beta V)^{-1/2} \begin{pmatrix} 0; [cY^*] \\ [cY^*]; 0 \end{pmatrix} \text{ и } G = Z\delta_{p_1 p_2} (i\omega - \xi)^{-1} \sigma_3,$$

получаем

$$S_{eff} = \frac{A}{2g} \beta V c^2 + \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{\alpha^2 c^2 Z^2 [c^0 Y^*][c^{+0} Y]}{\varpi^2 + \xi^2}).$$

Здесь $\alpha = (15/35\pi)^{1/2}$, σ_3 - матрица Паули. Мы подставили $c_j^0(p) = (\beta V)^{1/2} c \delta_{p0} c_j^0$. Константа c определяется из уравнения $\delta S_{eff} / \delta c = 0$, которое дает уравнение для щели вида

$$\frac{A}{g} + \frac{1}{\beta V} \sum_p \frac{\alpha^2 Z^2 [c^0 Y^*][c^{+0} Y]}{\varpi^2 + \xi^2 + \alpha^2 Z^2 [c^0 Y^*][c^{+0} Y]} = 0.$$

Здесь $A = 6$ для первой фазы и $A = 8$ для второй и третьей фаз. Мы получаем следующие уравнения для различных сверхпроводящих фаз:

- 1) $\frac{1}{g} + \frac{\alpha^2 Z^2}{6\beta V} \sum_p \frac{(1 - 3\cos^2 \theta)^2 + 3\sin^4 \theta \cos^2 2\varphi}{\varpi^2 + \xi^2 + \frac{\Delta_0^2}{4} (1 - 3\cos^2 \theta)^2 + 3\sin^4 \theta \cos^2 2\varphi} = 0;$
- 2) $\frac{1}{g} + \frac{\alpha^2 Z^2}{2\beta V} \sum_p \frac{\sin^2 2\theta}{\varpi^2 + \xi^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta} = 0;$
- 3) $\frac{1}{g} + \frac{\alpha^2 Z^2}{2\beta V} \sum_p \frac{\sin^4 2\theta}{\varpi^2 + \xi^2 + \Delta_0^2 \sin^4 2\theta} = 0.$

Здесь $\Delta_0 = 2c\alpha$. Исключая член с g^{-1} с помощью уравнения для щели, получим следующее выражение для квадратичной части S_{eff} :

$$S_{eff} = -\frac{\alpha^2 Z^2}{2A\beta V} \sum_p \frac{[c^0 Y^*][c^{+0} Y]}{\varpi^2 + \xi^2 + \alpha^2 Z^2 [c^0 Y^*][c^{+0} Y]} \sum_j (1 + 2\delta_{j1}) c_j^-(p) c_j^-(p) +$$

$$+ \frac{Z^2}{4\beta V} \sum_{p_1 + p_2 = p} \frac{1}{M_1 M_2} \{ (i\omega_1 + \xi_1)(i\omega_2 + \xi_2) [c^+(p)Y(p_2)][c(p)Y^*(p_1)] + [c^+(p)Y(p_1)] \times$$

$$\times [c(p)Y^*(p_2)] - \Delta^2 [c^+(p)Y(-p_1)][c^+(-p)Y(-p_2)] - \Delta^2 [c^-(p)Y^*(-p_1)][c^-(p)Y^*(-p_2)] \}.$$

Это общая квадратичная форма для всех трех сверхпроводящих состояний СТФ: только параметр A и структура щели (посредством $[c^0 Y^*][c^{+0} Y]$ и M_i) различны для различных сверх-

проводящих состояний. Отметим, что для всех трех сверхпроводящих состояний $\Delta = \Delta^+$ (или $c^0 = c^{0+}$).

Коэффициенты квадратичной формы пропорциональны суммам произведений гриновских функций квазифермионов. При низких температурах ($T_c - T \sim T_c$) можно перейти от суммирования к интегрированию с помощью правила

$$\frac{1}{\beta V} \sum_p \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{k_F^2}{c_F} \int d\omega d\xi d\Omega.$$

Для вычисления этих интегралов будем использовать тождество Фейнмана:

$$\left[(\omega_1^2 + \xi_1^2 + \Delta^2)(\omega_2^2 + \xi_2^2 + \Delta^2) \right]^{-1} = \int d\alpha \left[\alpha(\omega_1^2 + \xi_1^2 + \Delta^2) + (1-\alpha)(\omega_2^2 + \xi_2^2 + \Delta^2) \right]^{-2}.$$

С его помощью легко вычисляются интегралы по переменным ω и ξ и затем по параметру α и угловым переменным.

После вычисления всех интегралов, кроме интегралов по угловым переменным, приравняв детерминант квадратичной формы к нулю, получаем следующий набор уравнений, определяющих полный спектр коллективных мод в СТФ при d -спаривании (индекс i нумерует ветви коллективных мод, относящиеся к одной фазе):

$$k=1;$$

$$i=1;$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f_1}}{\omega} \ln \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f_1} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f_1} - \omega} g_1 + (g_1 - 2f_1) \ln f_1 \right\} &= 0; \\ \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f_1}} \ln \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f_1} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f_1} - \omega} g_1 + (g_1 - 2f_1) \ln f_1 \right\} &= 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$i = 2, 3, 4, 5$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f_1}}{\omega} \ln \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f_1} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f_1} - \omega} g_i + \left(g_i - \frac{2}{3}f_i\right) \ln f_1 \right\} &= 0; \\ \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f_1}} \ln \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f_1} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f_1} - \omega} g_i + \left(g_i - \frac{2}{3}f_i\right) \ln f_1 \right\} &= 0; \end{aligned}$$

$$k=2, 3;$$

$$i=1;$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f_k}}{\omega} \ln \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f_k} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f_k} - \omega} g_1 + \left(g_1 - \frac{3}{2}f_i\right) \ln f_k \right\} &= 0; \\ \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f_k}} \ln \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f_k} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f_k} - \omega} g_1 + \left(g_1 - \frac{3}{2}f_i\right) \ln f_k \right\} &= 0; \end{aligned}$$

$$i = 2, 3, 4, 5;$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f_k}}{\omega} \ln \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f_k} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f_k} - \omega} g_i + \left(g_i - \frac{1}{2}g_k\right) \ln f_k \right\} &= 0; \\ \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f_k}} \ln \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f_k} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f_k} - \omega} g_i + \left(g_i - \frac{1}{2}g_k\right) \ln f_k \right\} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} g_1 &= (1 - 3x^2)^2; \quad g_2 = (1 - x^2)^2 \cos^2 2\varphi; \quad g_3 = g = 4(1 - x^2)x^2 \cos^2 \varphi; \quad g_4 = 4(1 - x^2)x^2 \sin^2 \varphi; \\ g_5 &= (1 - x^2)^2 \sin^2 \varphi; \quad f_1 = (1/4) \left[(1 - 3x^2)^2 + 3(1 - x^2)^2 \cos^2 2\varphi \right]; \quad f_2 = 4(1 - x^2)x^2; \quad f_3 = (1 - x^2)^2; \\ \cos \Theta &= x; \quad \omega = \omega/\Delta_0. \end{aligned}$$

Результаты : спектры коллективных мод в СТФ. Решая приведенные выше уравнения, численно получаем следующие результаты для спектра коллективных мод трех рассматриваемых фаз. В каждой фазе найдено десять коллективных мод. Пять из них (получаемых из вторых уравнений) являются высокочастотными, т.е. имеют частоты порядка щели в ферми-спектре. В то же время пять оставшихся мод (получаемых из первых уравнений) являются голдстоуновскими (или квазиголдстоуновскими) с частотами(энергиями), исчезающими при нулевых импульсах.

Ниже приведены результаты для высокочастотных мод (E_i - энергия (частота) i -той ветви).

1. $d\gamma$ -состояние

$$E_2 = \Delta_0(T)(1.66 - i 0.50); E_1 = \Delta_0(T)(1.45 - i 0.48); E_2 = \Delta_0(T)(1.24 - i 0.64);$$

$$E_4 = \Delta_0(T)(1.21 - i 0.60); E_5 = \Delta_0(T)(1.19 - i 0.60).$$

Отметим, что три последние моды квазивырождены.

2. Спектры второго (Y_{2-1}) и третьего состояний оказываются идентичными.

$$E_{1,2} = \Delta_0(T)(1.93 - i 0.41); E_3 = \Delta_0(T)(1.62 - i 0.75); E_{4,5} = \Delta_0(T)(1.59 - i 0.83).$$

В обеих фазах найдены три высокочастотные моды, две из которых дважды вырождены.

Мы вычислили спектр коллективных мод для трех сверхпроводящих фаз СТФ, а именно для $d\gamma$, Y_{2-1} и фазы с щелью, пропорциональной $\sin 2\theta$, используя модель d -спаривания, созданную нами с помощью метода функционального интегрирования, и рассматривая случай сферической симметрии, который требует использования одной константы связи g . Учет симметрии решетки требует введения дополнительных констант связи (до пяти в общем случае: пять-число сферических гармоник с $l = 2$). Это число, однако, уменьшается до двух в случае кубической симметрии и до трех в случае гексагональной симметрии: $g_{lm}(m=0, \pm 1, \pm 2)$.

Для каждой из трех фаз мы нашли пять высокочастотных мод в каждой фазе (из второго уравнения в (15)) с частотами, лежащими в интервале $1,19\Delta_0 - 1,93\Delta_0$. Первые уравнения дают пять голдстоуновских (квазиголдстоуновских) мод (с частотами меньшими $0,1 \Delta_0$).

Отметим, что частоты (энергии) всех коллективных мод оказываются комплексными, и их мнимые части ImE_i описывают затухание коллективных мод благодаря распаду куперовских пар на исходные фермионы. Значение мнимой части частоты (энергии) составляет от 20% до 50% от действительной части ReE_i . Это означает, что коллективные моды в случае d -спаривания затухают более сильно, чем в большинстве случаев p -спаривания, где мнимые части частоты (энергии) составляют от 8% до 15% от действительной части ReE_i . Это является следствием различия в топологии нулей щели в ферми-спектре, которые являются точками при p -спаривании (в большинстве фаз) и комбинацией точек и линий в случае d -спаривания. Отметим, что подобная ситуация случается иногда и в случае p -спаривания (например, в полярной фазе сверхтекучего He^3 затухание коллективных мод сильнее, чем в других фазах (A-, 2D и др.) именно благодаря наличию линий нулей).

Затухание коллективных мод не было вычислено в работе Хирошимы и Намайзавы [10]. Это является недостатком метода кинетического уравнения по сравнению с методом функционального интегрирования. Метод кинетического уравнения вычисляет только действительные части частот (энергии) коллективных мод ReE_i . Учет затухания коллективных мод приводит к сдвигу действительных частей частот (энергий) коллективных мод ReE_i , поскольку в силу дисперсионных соотношений наличие мнимой части частоты (энергии) коллективных мод приводит к перенормировке действительной части ReE_i .

Таким образом, мы можем сравнить только действительные части ReE_i частот (энергий) коллективных мод. Мы получили пять высокочастотных мод в каждой фазе. В $d\gamma$ -фазе частоты(энергии) лежат в интервале $1,19\Delta_0 - 1,66\Delta_0$.

В работе [10] найдено пять мод с частотами (энергиями), лежащими в интервале $0,9\Delta_0 - 1,87\Delta_0$, и две низколежащие моды с частотами (энергиями) $E = 0,32\Delta_0$. В Y_{2-1} -фазе наши частоты (энергии) лежат в интервале $1,59\Delta_0 - 1,93\Delta_0$, а частоты (энергии) высокочастотных мод [8] лежат в интервале $1,22\Delta_0 - 1,57\Delta_0$. В обеих работах найдены голдстоуновские и низколежащие моды.

Отметим, что спектр третьей моды вычислен нами впервые, и он оказался идентичным спектру Y_{2-1} -фазы. Некоторые из полученных нами мод затухают умеренно и могут рассматри-

ваться как резонансы, в то время как другие затухают более сильно, что делает их наблюдение более трудным. Учет кулоновского взаимодействия превращает нуль-звуковую моду в плазменную моду.

Отметим, что полученные спектры коллективных мод в СТФ могут быть использованы для интерпретации ультразвуковых экспериментов и экспериментов по поглощению микроволн в СТФ, а также для идентификации типа спаривания и параметра порядка в этих сверхпроводниках.

В настоящее время эксперименты по поглощению микроволн в СТФ (на частотах порядка 20 ГГц) проводятся в Северо-Западном университете (Эванстон, США). Их целью является определение типа спаривания и параметра порядка в СТФ.

Как отличить смесь двух d-состояний от чистого d-состояния в ВТСП

Недавние эксперименты [3] и теоретические исследования [4,5] показывают, что в ВТСП, по-видимому, реализуется смесь d-состояний. Мы впервые вычислили спектр коллективных возбуждений в смешанном $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ состоянии ВТСП с помощью модели, созданной Брусом и Брусовой в рамках метода функционального интегрирования.

Мы показали, что несмотря на то, что спектры в обеих фазах $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy} являются идентичными, спектр в смешанном $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ состоянии оказывается совершенно отличным от спектра чистых состояний. Поэтому исследование спектра коллективных мод в экспериментах по поглощению ультразвука и микроволн может разграничить смесь состояний от чистых состояний.

Большинство ученых верит, что в оксидах реализуется d-спаривание. В то же самое время различные идеи относительно расширенного s-спаривания, смеси s- и d- состояний, различных d- состояний до сих пор активно обсуждаются. Одной из причин такой ситуации является отсутствие ответа на вопрос, обращается ли щель точно в нуль в некоторых выделенных направлениях в импульсном пространстве (как в случае $d_{x^2-y^2}$ состояния) или же щель анизотропна, но нигде не обращается точно в нуль (за исключением, может быть, некоторых точек на Ферми поверхности). Существующие эксперименты (туннельные и др.) не дают однозначного ответа на этот вопрос, в то время как ответ на этот вопрос является весьма принципиальным. С другой стороны, существуют эксперименты [3], которые могут быть объяснены [4] в предположении, что в ВТСП реализуется смесь состояний типа $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$. Аннетт и др. [5] рассмотрели возможность реализации смеси различных d- состояний в ВТСП и пришли к выводу, что $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ состояние является предпочтительным. Мы предлагаем один из возможных способов разграничить смесь состояний от чистых состояний.

Для этого мы вычислили спектр коллективных возбуждений в смешанном $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ состоянии ВТСП. Сравнение этого спектра со спектром чистых d- состояний ВТСП показывает, что они отличаются существенно и это отличие может быть использовано для определения симметрии параметра порядка в ВТСП.

Мы используем модель d-спаривания, описываемую уравнениями (12) и (13), и рассматриваем смешанное $d_{x^2-y^2} + id_{xy}$ состояние ВТСП. Параметр порядка в этом состоянии имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

и щель $\Delta(T) = \Delta_0(T) \sin^2 \theta$, уравнение для которой имеет следующий вид:

$$g^{-1} + \frac{\alpha^2 Z^2}{2\beta V} \sum_p \frac{\sin^4 \Theta}{\omega^2 + \xi^2 + \Delta_0^2 \sin^4 \Theta} = 0, \quad (17)$$

где $\Delta_0 = 2cZ\alpha$, $\alpha = (15/32\pi)^{1/2}$.

В первом приближении спектр коллективных возбуждений определяется квадратичной частью эффективного действия S_{eff} , получаемого посредством сдвига $c_j(p) \rightarrow c_j(p) + c_j^0(p)$ в S_{eff} . Здесь $c_j^0(p) = (\beta V)^{1/2} c \delta_{p0} b_j^0$ - конденсатные значения канонических бозе-полей и c_j^0 для рассматриваемых здесь случаев равны $b_2^0 = 2$, $b_2^0 = 2i$. Все остальные b_j^0 равны нулю.

Исключая член с g^{-1} с помощью уравнения для щели, получим следующее выражение для квадратичной части S_b :

$$S_h = \frac{\alpha^2 Z^2}{8\beta V} \sum_p \frac{[c^0 Y^*][c^{+0} Y]}{\omega^2 + \xi^2 + [c^0 Y^*][c^{+0} Y]} \sum_j (1 + 2\delta_j) c_j^+(p) c_j(p) +$$

$$+ Z^2/4\beta V \sum_{p_1+p_2=p} \frac{1}{M_1 M_2} \{ (i\omega_1 + \xi_1)(i\omega_2 + \xi_2) [c^+(p) Y(p_2)] \times$$

$$\times [c(p) Y^*(p_1)] + [c^+(p) Y(p_1)] [c(p) Y^*(p_2)] - \Delta^2 [c^+(p) Y(-p_1)] \times$$

$$\times [c^+(-p) Y(-p_2)] - \Delta^{+2} [c(p) Y^*(-p_1)] [c(-p) Y^*(-p_2)] \} \}. \quad (18)$$

Здесь

$$[c Y^*] = c_1 (1 - 3 \cos^2 \theta) + c_2 \sin^2 \theta \cos 2\varphi + c_3 \sin^2 \theta \sin 2\varphi + c_4 \sin 2\theta \cos \varphi + c_5 \sin 2\theta \sin \varphi.$$

Коэффициенты квадратичной формы пропорциональны суммам произведений функций Грина квазифермионов. При низких температурах ($T_c - T \sim T_c$) мы можем перейти от суммирования к интегрированию согласно следующему правилу:

$$\frac{1}{\beta V} \sum_p \rightarrow \frac{k_F^2}{(2\pi)^4 c_F} \int d\omega d\xi d\Omega. \quad (19)$$

Для вычисления этих интегралов будем использовать тождество Фейнмана:

$$[(\omega_1^2 + \xi_1^2 + \Delta^2)(\omega_2^2 + \xi_2^2 + \Delta^2)]^{-1} = \int d\alpha [\alpha(\omega_1^2 + \xi_1^2 + \Delta^2) + (1 - \alpha)(\omega_2^2 + \xi_2^2 + \Delta^2)]^{-2}$$

С его помощью легко вычисляются интегралы по переменным ω и ξ и затем по параметру α и угловым переменным.

После вычисления всех интегралов, кроме интегралов по угловым переменным, и приравнивания детерминанта квадратичной формы к нулю получаем следующий набор уравнений, определяющих полный спектр коллективных мод в смешанном $d_{x^2-y^2} + i d_{xy}$ состоянии (индекс i нумерует ветви коллективных мод, относящиеся к одной фазе):

$$i = 1;$$

$$\int_0^1 dx \int d\varphi \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f}}{\omega} \ln \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f} - \omega} g_1 + (g_1 - \frac{3}{2} f_1) \ln f \right\} = 0;$$

$$\int_0^1 dx \int d\varphi \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f}} \ln \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f} - \omega} g_1 + (g_1 - \frac{3}{2} f_1) \ln f \right\} = 0;$$

$$i = 2, 3, 4;$$

$$\int_0^1 dx \int d\varphi \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f}}{\omega} \ln \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f} - \omega} g_i + (g_i - \frac{1}{2} g) \ln f \right\} = 0;$$

$$\int_0^1 dx \int d\varphi \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f}} \ln \frac{\sqrt{\omega^2 + 4f} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4f} - \omega} g_i + (g_i - \frac{1}{2} g) \ln f \right\} = 0;$$

Здесь

$$g_1 = (1 - 3x^2)^2; \quad g_2 = (1 - x^2)^2 \cos^2 2\varphi; \quad g_3 = g = 4(1 - x^2)x^2 \cos^2 \varphi; \quad g_4 = 4(1 - x^2)x^2 \sin^2 \varphi;$$

$$g_5 = (1 - x^2)^2 \sin^2 \varphi; \quad f_1 = (1/4) [(1 - 3x^2)^2 + 3(1 - x^2)^2 \cos^2 2\varphi]; \quad f = (1 - x^2)^2. \quad (21)$$

Были использованы замены: $\cos \theta = x$, $\omega = \omega/\Delta_0$.

Решая эти уравнения численно, получаем следующие результаты для спектра коллективных мод в $d_{x^2-y^2} + i d_{xy}$ состоянии. Найдено десять коллективных мод. Пять из них (получаемых из вторых уравнений) являются высокочастотными, т.е. имеют частоты порядка щели в ферми-спектре.

В то же время пять оставшихся мод (получаемых из первых уравнений) являются голдстоуновскими (или квазиголдстоуновскими) с частотами (энергиями), исчезающими при нулевых импульсах (порядка $(0.03 \Delta_0(T) - 0.08 \Delta_0(T))$).

Приведем результаты для высокочастотных мод (E_i – энергия (частота) i -той ветви):

$$E_{1,2} = \Delta_0(T)(1.93 - i 0.41); \quad E_3 = \Delta_0(T)(1.62 - i 0.75); \quad E_{4,5} = \Delta_0(T)(1.59 - i 0.83). \quad (22)$$

Мы можем сравнить полученные результаты со спектром чистых $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy} состояний, полученных нами выше [8]:

$$\begin{aligned} E_1 &= \Delta_0(T)(1.88 - i 0.79); E_2 = \Delta_0(T)(1.66 - i 0.50); E_3 = \Delta_0(T)(1.40 - i 0.68); \\ E_4 &= \Delta_0(T)(1.13 - i 0.71); E_5 = \Delta_0(T)(1.10 - i 0.65). \end{aligned} \quad (23)$$

Спектры в обеих фазах $d_{x^2-y^2}$ и d_{xy} являются идентичными, спектр в смешанном $d_{x^2-y^2} + i d_{xy}$ состоянии оказывается совершенно отличным от спектра чистых состояний. В чистых состояниях все моды невырождены, в то время как в смешанном состоянии две высокочастотные моды оказываются дважды вырожденными. Энергии (частоты) высокочастотных мод лежат между $1.1\Delta_0(T)$ и $1.88\Delta_0(T)$, в то время как в смешанном состоянии между $1.59\Delta_0(T)$ и $1.93\Delta_0(T)$, т.е. коллективные моды имеют в смешанном состоянии более высокие частоты.

Отметим еще, что затухание коллективных мод в чистых состояниях выше, чем в смешанном состоянии ($\text{Im } E_i$ находится в пределах от 30% до 65% в чистом состоянии и от 20% до 50% в смешанном состоянии). Это можно легко понять, принимая во внимание то, что в чистых состояниях щель исчезает на линиях поверхности Ферми, в то время как в смешанном состоянии она исчезает лишь в двух точках (полюсах).

Сильное отличие спектра коллективных возбуждений в чистых d -состояниях от спектра в смешанном состоянии дает возможность проверить симметрию сверхпроводящего состояния в экспериментах по поглощению ультразвука и микроволн, в которых коллективные моды возбуждаются.

Отметим, что в то время, как эти эксперименты могут потребовать использования достаточно высоких частот (порядка десятков ГГц), принципиальные ограничения на частоты ультразвука (микроволн) отсутствуют, поскольку частоты коллективных мод пропорциональны амплитуде щели $\Delta_0(T)$, исчезающей при T_c . В принципе можно использовать любые частоты, приближаясь к T_c .

Таким образом, мы получаем возможность ответить на два принципиальных вопроса:

- 1) исчезает ли щель вдоль некоторых выделенных линий;
- 2) имеем ли мы в ВТСП чистое d -состояние или смесь d -состояний.

Двумерная P - и d -волновая сверхпроводимости

Двумерные модели p - и d -спаривания в сверхпроводниках

Существует несколько причин для рассмотрения двумерных (2D) моделей в сверхпроводниках, и, в частности, двумерных моделей d -спаривания в ВТСП. Прежде всего, плоскости CuO_2 являются общим структурным фактором практически всех открытых ВТСП, и общепринятым является то, что вся физика явления связана именно с этими плоскостями. Брусов и Попов еще 20 лет назад доказали существование сверхтекучести в пленках ^3He [2], которая и была затем открыта экспериментально Сачраджей и др. В двумерной сверхпроводимости существует своя специфика. Она связана с тем, что согласно теореме Боголюбова о $(1/k^2)$ конденсат существует только при $T=0$. Однако возможна сверхпроводимость и при $T \neq 0$, связанная с определенным поведением корреляторов бозе-полей: если они убывают на больших расстояниях не экспоненциально, а степенным образом, это означает наличие сверхпроводимости в системе. В этом случае критическая температура T_c является точкой перехода от экспоненциального убывания корреляторов бозе-полей к степенному. Возможны также альтернативные подходы, связанные с введением затравочного конденсата, порождающего сверхтекучую плотность носителей порядка их полной плотности.

p -спаривания

Для описания двумерной модели p -спаривания рассмотрим трехмерную модель Брусова-Попова [2] со следующими модификациями для двумерного случая.

1. Орбитальный момент l ($l=1$) должен быть перпендикулярен плоскости и может иметь только две проекции на ось $z: \pm 1$. Так как p -спаривание является триплетным, полный спин пары равен 1, поэтому в случае двумерного p -спаривания имеется $3 \times 2 \times 2 = 12$ степеней свободы. Поэтому сверхпроводящее состояние в этом случае может быть описано произвольной комплексной матрицей 2×3 $c_{ia}(p)$, которая имеет то же количество степеней свободы ($2 \times 3 \times 2 = 12$). Это число равно числу коллективных мод в каждой фазе. Напомним, что в трехмерном случае это число равно 18.

2. **x** теперь 2D вектор и двумерный “объем” $S = L^2$ (вместо $V = L^3$ в 3D случае).

Спектр коллективных мод. Ниже мы приведем результаты, часть которых была получена Брусовым и Поповым, остальные нами, для спектра коллективных мод в различных сверхпроводящих состояниях двумерных сверхпроводников при p -спаривании:

$$a\text{-фаза} \begin{pmatrix} 100 \\ i00 \end{pmatrix};$$

$$E^2 = c_F k^2 / 2 \text{ (3 modes)}; E^2 = 2\Delta^2 + c_F k^2 / 2 \text{ (6)}; E^2 = 4\Delta^2 + (0.5 - i0.433)c_F k^2 / 2 \text{ (3)};$$

$$b\text{- фаза} \begin{pmatrix} 100 \\ 010 \end{pmatrix};$$

$$E^2 = c_F k^2 / 2 \text{ (2)}; E^2 = 3c_F k^2 / 4 \text{ (1)}; E^2 = c_F k^2 / 4 \text{ (1)}; E^2 = 2\Delta^2 \text{ (4)}; E^2 = 4\Delta^2 + (0.15 - i0.22)c_F k^2 / 2 \text{ (3)};$$

$$E^2 = 4\Delta^2 + (0.85 - i0.22)c_F k^2 / 2 \text{ (1)}; E^2 = 4\Delta^2 + (0.5 - i0.43)c_F k^2 / 2 \text{ (2)};$$

$$\text{фаза} \begin{pmatrix} 001 \\ 00i \end{pmatrix} E^2 = 0 \text{ (3)}; E^2 = 2\Delta^2 \text{ (6)}; E^2 = 4\Delta^2 \text{ (3)};$$

$$\text{фаза} \begin{pmatrix} 0 \pm 10 \\ 100 \end{pmatrix} E^2 = 0 \text{ (4)}; E^2 = 2\Delta^2 \text{ (4)}; E^2 = 4\Delta^2 \text{ (4)};$$

$$\text{фаза} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 - 10 \end{pmatrix} E^2 = 0 \text{ (4)}; E^2 = 2\Delta^2 \text{ (4)}; E^2 = 4\Delta^2 \text{ (4)}.$$

d- спаривание

Как упоминалось выше, плоскости CuO_2 являются общим структурным фактором практически всех открытых ВТСП, и общепринятым является то, что вся физика явления связана именно с этими плоскостями. С учетом того, что в большинстве ВТСП, по-видимому, реализуется d -спаривание, рассмотрение двумерной модели d -спаривания является весьма актуальным. Существуют и дополнительные доводы для изучения таких моделей. Так в двумерной антиферромагнетике показано, что только d -канал обеспечивает притяжение между фермионами. D -спаривание возникает также в симметричной классификации Сигриста и Райса [11].

Итак, мы рассмотрим двумерную модель d -спаривания в плоскостях CuO_2 , созданную П.Н.Брусовым, Н. П. Брусовой и П.П.Брусовым [8] с помощью метода функционального анализа. Модель, как и в трехмерном случае, описывается функционалом гидродинамического действия, получаемого последовательным функциональным интегрированием по быстрым, а затем медленным ферми-полям. Как и в трехмерном случае, функционал гидродинамического действия определяет все свойства рассматриваемой системы, в данном случае плоскостей CuO_2 , и, в частности, спектр коллективных возбуждений.

Для описания двумерной модели d -спаривания в плоскостях CuO_2 рассмотрим трехмерную модель, описанную нами выше. Основные отличия в двумерном случае будут заключаться в следующем.

1. Орбитальный момент l ($l=2$) должен быть перпендикулярен плоскости CuO_2 и может иметь только две проекции на ось $z: \pm 2$. Так как d -спаривание является синглетным, полный спин пары равен нулю, поэтому в случае двумерного d -спаривания имеется $1 \times 2 \times 2 = 4$ степени свободы. Поэтому сверхпроводящее состояние в этом случае может быть описано комплексной симметричной бесследовой матрицей 2×2 $c_{ia}(p)$, которая имеет то же количество степеней свободы ($2 \times 2 \times 2 - 2 - 2 = 4$). Это число равно числу коллективных мод в каждой фазе. Напомним, что в трехмерном случае это число равно 10.

2. Потенциал спаривания дается следующей формулой:

$$t = v(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_{m=-2,2} g_m Y_{2m}(\vec{k}) Y_{2m}^*(\vec{k}'). \quad (24)$$

В случае круговой симметрии $g_2 = g_{-2} = g$ мы имеем одну константу связи g , в то время как менее симметричные случаи требуют наличия обеих констант g_2 и g_{-2} . Мы будем рассматривать случай круговой симметрии.

3. x будет двумерным вектором и площадь $S = L^2$ (вместо $V = L^3$ в трехмерном случае).

Принимая во внимание эти различия, будем описывать Ферми-систему антикоммутирующими функциями $\chi_s(\mathbf{x}, \tau)$, $\bar{\chi}_s(\mathbf{x}, \tau)$, определенными в “объеме” $S = L^2$ и антипериодическими по времени τ с периодом $\beta = T^{-1}$.

После процедуры функционального интегрирования по медленным и быстрым Ферми – полям, которая аналогична подобной процедуре в трехмерном случае, получим эффективный функционал действия, который формально имеет ту же форму (13), как и в трехмерном случае.

В случае 2D d - спаривания число степеней свободы параметра порядка равно 4. Другими словами, мы имеем две комплексные канонические переменные. Из недиагональных элементов матрицы $\mathcal{M}$ легко видеть, что в качестве канонических переменных можно выбрать следующие: $c_1 = c_{11} - c_{22}$, $c_2 = c_{12} + c_{21}$.

Для сопряженных переменных имеем $c_1^+ = c_{11}^+ - c_{22}^+$, $c_2^+ = c_{12}^+ + c_{21}^+$.

В канонических переменных S_{eff} имеет следующий вид:

$$S_{\text{eff}} = (2g)^{-1} \sum_{p,j} c_j^+(p) c_j(p) + \frac{1}{2} \ln \det \frac{\mathcal{M}(c_j^+, c_j)}{\mathcal{M}(c_j^{(0)}, c_j^{(0)})}, \quad (25)$$

где $M_{11} = Z^{-1} [i\omega - \xi + \mu(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma})] \delta_{p_1 p_2}$; $M_{22} = Z^{-1} [-i\omega + \xi + \mu(\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma})] \delta_{p_1 p_2}$;

$$M_{12} = M_{21}^+ = \sigma_0 \alpha (\beta S)^{-1/2} (c_1 \cos 2\varphi + c_2 \sin 2\varphi).$$

Функционал S_{eff} определяет все свойства 2D сверхпроводников (плоскостей CuO_2 и др.).

Коллективные возбуждения в плоскостях CuO_2 ВТСП

Два сверхпроводящих состояния с параметрами порядка, пропорциональными $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, возникают в симметричной классификации плоскостей CuO_2 . В первой фазе щель пропорциональна $Y_{22} + Y_{2-2} \sim \sin^2 \theta |\cos 2\varphi| \sim |\cos 2\varphi|$, в то время как во второй она пропорциональна $-i(Y_{22} - Y_{2-2}) \sim \sin^2 \theta |\sin 2\varphi| \sim |\sin 2\varphi|$.

В рассматриваемом двумерном случае мы полагаем $\theta = \pi/2$ и $\sin \theta = 1$.

Вычислим спектр коллективных мод для двух данных состояний. В первом приближении спектр коллективных возбуждений определяется квадратичной частью эффективного действия S_{eff} , получаемого посредством сдвига $c_j(p) \rightarrow c_j(p) + c_j^0(p)$ в S_{eff} . Здесь $c_j^0(p)$ - конденсатные значения канонических бозе-полей $c_j(p)$. Квадратичная часть эффективного действия S_{eff} дается следующим выражением:

$$\begin{aligned} S_h = & \frac{\alpha^2 Z^2}{8\beta V} \sum_p \frac{[c^0 Y^*][c^{+0} Y]}{\omega^2 + \xi^2 + [c^0 Y^*][c^{+0} Y]} \sum_j (1 + 2\delta_j 1) c_j^+(p) c_j(p) + \\ & + Z^2 / 4\beta V \sum_{p_1 + p_2 = p} \frac{1}{M_1 M_2} \left\{ (i\omega_1 + \xi_1)(i\omega_2 + \xi_2) [c^+(p) Y(p_2)] \times \right. \\ & \times [c(p) Y^*(p_1)] + [c^+(p) Y(p_1)] [c(p) Y^*(p_2)] - \Delta^2 [c^+(p) Y(-p_1)] \times \\ & \times [c^+(-p) Y(-p_2)] - \Delta^2 [c(p) Y^*(-p_1)] [c(-p) Y^*(-p_2)] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $\Delta = \Delta_0 |\cos 2\varphi|$ для $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ фазы и $\Delta = \Delta_0 |\sin 2\varphi|$ для $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ фазы,

$$\Delta_0 = 2\alpha c Z, \alpha = (15/32\pi)^{1/2} \text{ и } M_i = \omega_i^2 + \xi_i^2 + \Delta^2.$$

Первый член в S_{eff} содержит константу связи g , которая должна быть исключена с помощью уравнения для щели, имеющего следующий вид (для первой и второй фаз соответственно):

$$g^{-1} + \frac{\alpha^2 Z^2}{\beta S} \sum_p \frac{\cos^2 2\varphi}{\omega^2 + \xi^2 + \Delta_0^2 \cos^2 2\varphi} = 0; \quad g^{-1} + \frac{\alpha^2 Z^2}{\beta S} \sum_p \frac{\sin^2 2\varphi}{\omega^2 + \xi^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\varphi} = 0.$$

Здесь $\Delta_0^2 = 4\alpha^2 c^2 Z^2$.

При низких температурах можно перейти от суммирования к интегрированию с помощью правила

$$\frac{1}{\beta S} \sum_p \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{k_F}{c_F} \int d\omega d\xi d\phi.$$

Здесь k_F - ферми-импульс квазифермиона, c_F - скорость на поверхности Ферми. После интегрирования по ω и ξ с использованием процедуры Фейнмана имеем следующие уравнения для спектра коллективных мод, получаемые из условия $\det Q = 0$, где Q - матрица квадратичной части функционала S_{eff} :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ \frac{\sqrt{\omega^2 + 4g_k}}{\omega} \frac{\sqrt{\omega^2 + 4g_k} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4g_k} - \omega} g_1 - (g_k - g_i) \ln g_k \right\} &= 0 ; \\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 4g_k}} \frac{\sqrt{\omega^2 + 4g_k} + \omega}{\sqrt{\omega^2 + 4g_k} - \omega} g_1 - (g_k - g_i) \ln g_k \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь k обозначает фазу, а i нумерует моды, $g_1 = x^2$, $g_2 = 1-x^2$, $x = \cos 2\phi$ и $\omega = \omega / \Delta_0$. Так для каждого фиксированного k мы имеем четыре уравнения, которые дают нам четыре частоты коллективных мод.

Таким образом, спектры в обеих фазах оказываются идентичными. Мы нашли две высокочастотные моды в каждой фазе (из второго уравнения в (26)) со следующими частотами: $E_1 = \Delta_0(1.42 - i0.65)$, $E_2 = \Delta_0(1.74 - i0.41)$.

Отметим, что частоты (энергии) обеих мод оказываются комплексными. Это является следствием d -спаривания или, другими словами, следствием исчезновения щели в выбранных направлениях. В этом случае бозе-возбуждения распадаются на фермионы, что приводит к затуханию коллективных мод. Значение мнимой части частоты (энергии) составляет 23% для второй моды и 46% для первой. Поэтому обе моды могут рассматриваться как резонансы. При этом вторая мода лучше определена, чем первая.

Первое из уравнений дает две голдстоуновские (квазиголдстоуновские) моды (с частотами меньшими $0,1 \Delta_0$).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Brusov P.N. Mechanisms of high temperature superconductors, v.1,2; 1389 p.p., Rostov State University Publishing, 1999 (in English).
2. Брусов П.Н., Понов В.Н. Сверхтекучесть и коллективные свойства квантовых жидкостей. М.: Наука, 1988. 215 с.
3. Krishana K. et al. Phase transition in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{Ca}_2\text{O}_8$ induced by a magnetic field // Science. 1997. Vol. 277. P.83.
4. Laughlin R.B., Magnetic induction of $d_{x^2-y^2}$ - d_{xy} order in high T_c -superconductors // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80, P.5188.
5. Annett J.F., et al. Experimental constraints on the pairing state of the cuprate superconductors: an emerging consensus // Physical Properties of High Temperature Superconductors V", D.M. Ginsberg (Ed.), World Scientific, 1996, P. 1-80.
6. Brusov P. N., Brusova N. P., The model of u-pairing for HTSC, Heavy fermion systems and superfluids // Physica B. 1994. Vol. 194-196. P.1479-1480.
7. Brusov P. N., Brusova N. P. The path integral model of d- pairing for HTSC, heavy fermion superconductors and superfluids // J. Low Temp. Phys. 1996. Vol. 103. P. 251-265.
8. Brusov P. N., Brusova N. P. and Brusov P. P. The collective excitations of the order parameter in HTSC and heavy fermion superconductors (HFSC) under d-pairing // J. Low Temp. Phys. 1997. Vol. 108. P.143.
9. Brusov P. N. et al., The collective modes in HTSC and heavy fermion superconductors (HFSC) under d-pairing // Physica C.1997. Vol. 282- 287. P. 1881-1882.
10. Hiroshima D.S., Namaizawa H. The collective modes in HTSC and heavy fermion superconductors (HFSC) under d-pairing // J. Low Temp. Phys. 1988. Vol. 73. P.137-160.
11. Sigrist M., Rice T. M. Symmetry classification of states in high temperature superconductors // Z.Phys. B. 1987, Vol. 68, P.9.