Общероссийский математический портал

В. Е. Зотеев, Итерационный метод среднеквадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения колебаний систем с турбулентным трением, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 38, 100–109

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu381>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 08:58:41

Математическое моделирование

УДК 519.246

В. Е. Зотеев

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО ОЦЕНИВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СТОХАСТИЧЕСКОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ТРЕНИЕМ

Рассматривается математическая модель колебаний систем с турбулентным трением в форме стохастического разностного уравнения, предлагается эффективный численный метод среднеквадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения и исследуется погрешность вычисления динамических характеристик систем с турбулентным трением на основе стохастического разностного уравнения. Данный подход к решению задачи оценки динамических характеристик систем с турбулентным трением может быть применим к диссипативным системам с другим типом силы трения.

Проблема достоверной оценки динамических характеристик диссипативной механической системы в процессе ее эксплуатации или прочностных промышленных испытаний может быть решена только на основе внедрения новых информационных технологий. Эти технологии должны быть ориентированы на современный уровень развития вычислительной техники и использовать эффективные методы статистической обработки результатов эксперимента. При оценке динамических характеристик диссипативной системы (частоты и декремента колебаний) разработка таких методов возможна только на основе принципиально новых математических моделей, описывающих затухающие колебания системы. Этим требованиям в полной мере удовлетворяют так называемые линейно-параметрические дискретные модели (ЛПДМ), рекуррентно описывающие временные последовательности отсчетов ординат свободных колебаний диссипативной системы [1]. Применение моделей этого класса позволяет определять динамические характеристики через среднеквадратичные оценки коэффициентов ЛПДМ, вычисленные на основе статистической обработки выборки экспериментальных данных. Такой способ принципиально отличается от традиционных методов нахождения динамических характеристик диссипативной системы [2], он позволяет обеспечить высокую точность оценивания за счет эффективного использования современных средств вычислений и их математического обеспечения.

В данной работе рассматривается новый метод определения динамических характеристик (ДХ) диссипативной системы с турбулентным трением, в основе которого лежит итерационная процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов ЛПДМ в форме стохастического разностного уравнения. Разработка этого метода включает решение следующих основных задач:

- построение линейно-параметрической дискретной модели колебаний систем с турбулентным трением в форме стохастического разностного уравнения;
- описание алгоритма определения динамических характеристик на основе среднеквадратичных оценок коэффициентов стохастического разностного уравнения;
- разработка и исследование эффективности итерационного метода среднеквадратичного оценивания коэффициентов ЛПДМ;
- оценка погрешности вычисления динамических характеристик систем с турбулентным трением в процессе обработки результатов эксперимента.

Построение линейно-параметрической дискретной модели колебаний систем с турбулентным трением в форме стохастического разностного уравнения. Основой предлагаемого метода определения ДХ диссипативной системы с турбулентным трением является линейно-параметрическая дискретная модель свободных колебаний системы. Следует различать линейно-параметрическую дискретную модель в виде рекуррентной формулы, линейно связывающей

некоторые комбинации дискретных значений исследуемой функциональной зависимости, и ЛПДМ в форме стохастического разностного уравнения, описывающего эту зависимость с учетом аддитивной случайной помехи в результатах наблюдений.

Рассмотрим построение ЛПДМ колебаний систем с турбулентным трением в виде рекуррентной формулы, связывающей три последовательных отсчета непрерывной функции, описывающей свободные колебания в диссипативной системе: $\tilde{y}(t) = a_0 \left(1 + \frac{\delta_0}{T} t\right)^{-1} \cos(\omega t + \psi_0)$, где ω

и δ_0 — частота и декремент колебаний; $T = 2\pi\omega^{-1}$ — период колебаний; a_0 и ψ_0 — начальные амплитуда и фаза колебаний. Полагая $t = \tau k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где τ — период равномерной дискретизации временной функции, получаем ее дискретный аналог:

$\tilde{y}_k = a_0 \left(1 + \frac{\delta_0 \tau}{T} k\right)^{-1} \cos(\omega \tau k + \psi_0)$. Отсюда $(1 + \lambda_1 k) \tilde{y}_k = a_0 \cos(\omega \tau k + \psi_0)$, где $\lambda_1 = \frac{\delta_0 \tau}{T}$. Применяя к

обеим частям данного выражения z -преобразование [3], получаем:

$Z\{\tilde{y}_k (1 + \lambda_1 k)\} = a_0 \frac{\cos \psi_0 - z^{-1} \cos(\omega \tau - \psi_0)}{1 - \lambda_0 z^{-1} + z^{-2}}$, где $\lambda_0 = 2 \cos \omega \tau$. Отсюда $Z\{\tilde{y}_k (1 + \lambda_1 k)\} - z^{-1} \lambda_0 Z\{\tilde{y}_k (1 + \lambda_1 k)\} + z^{-2} Z\{\tilde{y}_k (1 + \lambda_1 k)\} = a_0 \cos \psi_0 - z^{-1} a_0 \cos(\omega \tau - \psi_0)$. Возвращаясь в про-

странство оригиналов, используя первую теорему смещения: $z^{-r} Z\{\tilde{y}_k\} = \tilde{y}_{k-r}$, $r = 0, 1, 2$, при условии, что $\tilde{y}_{k-r} = 0$ при $k - r < 0$, получаем разностное уравнение вида $(1 + k \lambda_1) \tilde{y}_k - \lambda_0 [1 + (k-1) \lambda_1] \tilde{y}_{k-1} + [1 + (k-2) \lambda_1] \tilde{y}_{k-2} = \delta_k a_0 \cos \psi_0 - \delta_{k-1} a_0 \cos(\omega \tau - \psi_0)$, $k = 0, 1, 2, \dots$,

где $\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0; \\ 0, & \text{при } k \neq 0 \end{cases}$ — символ Кронекера.

При $k = 0$ и $k = 1$ отсюда соответственно получаем

$$\tilde{y}_0 = a_0 \cos \psi_0, \quad \tilde{y}_1 = \frac{a_0}{1 + \lambda_1} (\cos \omega \tau \cos \psi_0 - \sin \omega \tau \sin \psi_0). \quad (1)$$

При $k \geq 2$ приходим к разностному уравнению второго порядка: $(1 + k \lambda_1) \tilde{y}_k - \lambda_0 [1 + (k-1) \lambda_1] \tilde{y}_{k-1} + [1 + (k-2) \lambda_1] \tilde{y}_{k-2} = 0$, из которого после простых преобразований получаем линейно-параметрическую дискретную модель, рекуррентно описывающую временную последовательность дискретных значений исследуемой функции:

$$\lambda_0 \tilde{y}_{k-1} - \lambda_1 [k \tilde{y}_k + (k-2) \tilde{y}_{k-2}] + \lambda_2 (k-1) \tilde{y}_{k-1} = \tilde{y}_k + \tilde{y}_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (2)$$

Коэффициенты в модели (2) связаны с динамическими характеристиками соотношениями

$$\lambda_0 = 2 \cos \omega \tau, \quad \lambda_1 = \frac{\delta_0 \tau}{T}, \quad \lambda_2 = \lambda_0 \lambda_1. \quad (3)$$

При обработке экспериментальной виброграммы свободных колебаний формируется выборка результатов наблюдений y_k , $k = 0, N-1$, где N — объем выборки. Результаты наблюдений y_k содержат аддитивную случайную помеху ε_k : $y_k = \tilde{y}_k + \varepsilon_k$, где $\tilde{y}_k$ — дискретные значения, соответствующие теоретической модели колебаний, и, следовательно, соотношениям (1) и (2). Обозначая

$$\lambda_3 = a_0 \cos \psi_0, \quad \lambda_4 = -a_0 \sin \omega \tau \sin \psi_0, \quad (4)$$

с учетом случайной помехи в отсчетах ординат колебаний линейно параметрическую дискретную модель в форме стохастического разностного уравнения можно представить в виде

$$\begin{cases} y_0 = \lambda_3 + \varepsilon_0, \\ y_1 = \lambda_0 \frac{y_0}{2} - \lambda_1 y_1 + \lambda_4 - \frac{\lambda_0}{2} \varepsilon_0 + (1 + \lambda_1) \varepsilon_1, \\ y_k + y_{k-2} = \lambda_0 y_{k-1} - \lambda_1 [k y_k + (k-2) y_{k-2}] + \lambda_2 (k-1) y_{k-1} + \eta_k, \\ \eta_k = [1 + (k-2) \lambda_1] \varepsilon_{k-2} - \lambda_0 [1 + (k-1) \lambda_1] \varepsilon_{k-1} + [1 + k \lambda_1] \varepsilon_k, \quad k = \overline{2, N-1}. \end{cases} \quad (5)$$

В матричной форме линейно параметрическая дискретная модель, описывающая свободные колебания диссипативных систем с турбулентным трением при аддитивной случайной помехе в отсчетах наблюдений, имеет вид

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta \\ \eta = P\varepsilon, \end{cases} \quad (6)$$

или в развернутой форме обобщенной регрессионной модели

$$b_k = \lambda_0 f_{k1} + \lambda_1 f_{k2} + \lambda_2 f_{k3} + \lambda_3 f_{k4} + \lambda_4 f_{k5} + \eta_k, \quad (7)$$

$$\eta_k = \varepsilon_0 p_{k1} + \varepsilon_1 p_{k2} + \varepsilon_2 p_{k3} + \dots + \varepsilon_{N-2} p_{k,N-1} + \varepsilon_{N-1} p_{kN}. \quad (8)$$

Здесь $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов ЛПДМ; $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1})^T$ – N -мерный вектор случайной помехи в результатах наблюдений; $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)^T$ – N -мерный вектор эквивалентного возмущения в стохастическом разностном уравнении; $b = (y_0, y_1, y_0 + y_2, \dots, y_{k-3} + y_{k-1}, \dots, y_{N-3} + y_{N-1})^T$ – N -мерный вектор правой части; F – матрица регрессоров размера $N \times 5$, столбцы которой описываются формулами:

$$f_{k1} = \left(0, \frac{y_0}{2}, y_1, y_2, \dots, y_{k-2}, \dots, y_{N-2}\right)^T, \quad f_{k2} = \left(0, -y_1, -2y_2, -(y_1 + 3y_3), -(2y_2 + 4y_4), \dots, -[(N-3)y_{N-3} + (N-1)y_{N-1}]\right)^T, \\ f_{k3} = \left(0, 0, y_1, 2y_2, 3y_3, \dots, (k-2)y_{k-2}, \dots, (N-2)y_{N-2}\right)^T, \quad f_{k4} = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad f_{k5} = (0, 1, 0, \dots, 0)^T; \\ P \text{ — матрица размера } N \times N \text{ в стохастическом уравнении эквивалентного возмущения — нижняя треугольная, ленточная, трех диагональная. Первый столбец матрицы } P \text{ имеет вид:} \\ p_{k1} = \left(1, -\frac{\lambda_0}{2}, 1, 0, 0, \dots, 0\right)^T, \quad k = \overline{1, N}, \text{ остальные столбцы матрицы } P \text{ } (j = \overline{2, N}) \text{ описываются формулами:}$$

$$p_{kj} = \begin{cases} 0, & k < j \text{ и } k \geq j+3, \\ 1 + (j-1)\lambda_1, & k = j \text{ и } k = j+2, \\ -\lambda_0[1 + (j-1)\lambda_1], & k = j+1. \end{cases} \quad (9)$$

Построенная линейно-параметрическая дискретная модель в форме системы из двух стохастических разностных уравнения (6) или (7) и (8) лежит в основе предлагаемого метода определения динамических характеристик диссипативной системы с турбулентным трением.

Определение динамических характеристик на основе стохастического разностного уравнения колебания системы с турбулентным трением. Алгоритм определения динамических характеристик на основе среднеквадратичных оценок коэффициентов стохастического разностного уравнения включает ниже следующие основные этапы.

1. *Формирование выборки результатов наблюдений y_k .* На этом этапе решается задача выбора периода дискретизации τ экспериментальной виброграммы и объема выборки N . Очевидно, что параметры обработки экспериментальной виброграммы τ и N связаны соотношением $t_{\text{набл}} = \tau(N-1)$, где $t_{\text{набл}}$ — время наблюдения, за которое происходит затухание амплитуд свободных колебаний на 80–90%. Стремление увеличить объем выборки N при заданном времени наблюдения $t_{\text{набл}}$ приводит к уменьшению периода дискретизации τ . Однако, как показали исследования, при малых значениях τ (в относительных к периоду колебаний единицах) резко ухудшается устойчивость вычисления среднеквадратичных оценок коэффициентов ЛПДМ, что приводит к большой погрешности оценок динамических характеристик системы.

Полученные в ходе эксперимента результаты наблюдений y_k содержат аддитивную случайную помеху ε_k . Будем предполагать, что случайные возмущения ε_k имеют нулевое математическое ожидание, дисперсию σ_ε^2 , не коррелированы между собой: $V[\varepsilon] = \sigma_\varepsilon^2 E$, где E — единичная матрица, и подчиняются нормальному закону распределения: $\varepsilon_k \in N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

2. *Формирование на основе линейно-параметрической дискретной модели системы линейных алгебраических уравнений.* На этом этапе по приведенным выше формулам, описывающим элементы стохастического разностного уравнения (7), вычисляются элементы матрицы $F = (f_{ij})$, $j = \overline{1, 5}$, и правой части $b = (b_i)$, $i = \overline{1, N-2}$, переопределенной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов λ_j , $j = \overline{1, 5}$.

3. *Вычисление среднеквадратичных оценок коэффициентов стохастического разностного уравнения.* Данный этап является определяющим в процессе формирования погрешности оце-

нок динамических характеристик. От того, насколько обоснованно и корректно будет выбран метод среднеквадратичного оценивания, существенно зависит точность вычисления коэффициентов ЛПДМ. Разработка и исследование эффективного метода среднеквадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения (7) является одной из основных задач, решаемых в рамках данной работы.

4. *Вычисление динамических характеристик систем с турбулентным трением.* С учетом известных соотношений (3) по среднеквадратичным оценкам $\hat{\lambda}_j$ коэффициентов ЛПДМ вычисляются динамические характеристики диссипативной системы:

$$\omega = \frac{1}{\tau} \arccos \frac{\hat{\lambda}_0}{2}; \quad \delta_0 = \frac{2\pi\hat{\lambda}_1}{\omega\tau} = \frac{2\pi\hat{\lambda}_1}{\arccos(0,5\hat{\lambda}_0)}. \quad (10)$$

Используемая линейно-параметрическая дискретная модель с учетом формул (4) позволяет также оценивать начальную амплитуду и фазу колебаний:

$$\mu = -\frac{2\hat{\lambda}_4}{\sqrt{4-\hat{\lambda}_0^2}}; \quad a_0 = \sqrt{\hat{\lambda}_3^2 + \mu^2}; \quad \psi_0 = \arctg \frac{\mu}{\hat{\lambda}_3}. \quad (11)$$

5. *Оценка погрешности результатов вычислений.* На заключительном этапе алгоритма определения ДХ на основе стохастического разностного уравнения колебаний оценивается погрешность полученных результатов. Так как в алгоритме вычислений применяются статистические методы обработки экспериментальных данных, то очевидно, что погрешность носит случайный характер и для ее описания можно использовать среднее квадратическое отклонение оценок ДХ. Построение доверительных интервалов для оценок ДХ позволит указать предельные (с заданной доверительной вероятностью) абсолютную и относительную погрешности.

Разработка и исследование итерационного метода среднеквадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения. Применение статистических методов при вычислении коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели λ_j позволяет существенно повысить точность оценивания. Однако вычисление среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}_j$ по обобщенной регрессионной модели, которая описывается уравнением (7):

$$\sum_{k=1}^N \left[b_k - \sum_{j=0}^4 \lambda_j f_{k,j+1} \right]^2 = \sum_{k=1}^N \eta_k^2 \rightarrow \min, \text{ приводит к значительному асимптотическому смещению в}$$

оценках из-за большой корреляции между отсчетами эквивалентного случайного возмущения η_k и элементами матрицы f_{kj} , $j = \overline{1,3}$, [4]. Этот существенный недостаток устраняется за счет использования итерационной процедуры при вычислении среднеквадратичных оценок.

Так как при $\delta_0 \neq 0$ в соответствии с (3) $\lambda_1 > 0$, то всегда существует обратная матрица P_λ^{-1} . Тогда после преобразования обобщенной регрессионной модели (7) получаем $P_\lambda^{-1}b = P_\lambda^{-1}F\lambda + \varepsilon$. Вычисление среднеквадратичных оценок коэффициентов λ_j на основе минимизации функцио-

нала $J_\lambda = \|P_\lambda^{-1}b - P_\lambda^{-1}F\lambda\|^2 = \|\varepsilon\|^2 \rightarrow \min$ позволяет существенно уменьшить асимптотическое смещение, связанное с корреляцией между случайным возмущением и результатами наблюдений, и тем самым повысить точность вычислений динамических характеристик. Так как элементы матрицы P_λ^{-1} зависят от λ_0 и λ_1 , то, в общем случае, минимизация функционала J_λ приводит к решению системы нелинейных относительно λ_j уравнений. Рассмотрим итерационную процедуру вычисления среднеквадратичных оценок коэффициентов λ_j . На первом эта-

пе вычисляются первоначальные оценки МНК $\lambda_j^{(0)}: \|b - F\lambda\|^2 = \|\eta\|^2 \rightarrow \min$. Затем по формулам (9) вычисляется приближение матрицы $P_\lambda \approx P_\lambda^{(1)}(\lambda_0^{(0)}, \lambda_1^{(0)})$, преобразуется обобщенная регрессионная модель (7), и находятся новые (уточненные) оценки $\lambda_j^{(1)}$ коэффициентов ЛПДМ. Эти оценки используются для вычисления второго приближения матрицы $P_\lambda \approx P_\lambda^{(2)}(\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(1)})$ и т.д. Процесс уточнения повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие останова $\|\lambda^{(i)} - 2\lambda^{(i-1)} + \lambda^{(i-2)}\| < 0,01\|\lambda^{(i)}\|$. Найденные на последней итерации оценки $\lambda^{(i)}$ принимаются за

истинные значения коэффициентов ЛПДМ и по ним далее вычисляются динамические характеристики диссипативной системы.

Проведены численно-аналитические исследования сходимости описанной итерационной процедуры. Численный эксперимент был организован следующим образом. Генерировалась выборка $\tilde{y}_k$ ($k = \overline{0, N-1}$) дискретных значений функции, описывающей свободные колебания в диссипативной системе с турбулентным трением, с параметрами $a_0 = 1$, $\psi_0 = 1$, $\delta_0 = 0,05$, $\omega = 2\pi$. Период дискретизации τ был выбран таким образом, что при $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1$ отношение $\frac{\tau}{T} = 0,2$. Объем выборки составил $N = 100$. В отсчеты $\tilde{y}_k$, соответствующие точным значениям функции, добавлялась аддитивная помеха ε_k , значения которой обеспечивали заданную величину мощности помехи 3% в относительных единицах: $\frac{\|\varepsilon\|}{\|\tilde{y}\|} 100\%$. Результаты вычислений

относительной погрешности оценок ДХ усреднялись по 100 реализациям.

На рис. 1 и рис. 2 представлены зависимости относительной погрешности вычисления соответственно частоты и декремента колебаний от числа итераций. Точки на графиках при $n = 0$

Р и с. 1. Зависимость относительной погрешности вычисления частоты колебаний от числа итераций

Р и с. 2. Зависимость относительной погрешности вычисления декремента колебаний от числа итераций

соответствуют результатам среднеквадратичного оценивания коэффициентов λ_j без предварительного преобразования обобщенной регрессионной модели (7).

По результатам исследований можно сделать следующие выводы. Во-первых, точность вычисления частоты колебаний на несколько порядков выше, чем точность декремента колебаний. Во-вторых, применение итерационного метода вычисления среднеквадратичных оценок позволяет существенно, в сотни раз, уменьшить погрешность вычисления основной диссипативной характеристики — декремента колебаний. В-третьих, результаты вычислений практически не изменяются после второй итерации, что свидетельствует о хорошей сходимости метода.

Проведены исследования эффективности предложенного итерационного метода вычисления среднеквадратичных оценок. Цель исследований — сравнительный анализ погрешностей вычисления ДХ методом наименьших квадратов без преобразования обобщенной регрессионной модели (7) и с применением итерационного численного метода. Для этого, как и в предыдущем эксперименте, моделировалась выборка объема $N = 100$ тестового сигнала с параметрами $a_0 = 1$, $\psi_0 = 1$, $\delta_0 = 0,05$, $\omega = 2\pi$, $\tau = 0,2$. В отсчеты тестового сигнала добавлялась случайная помеха, мощность которой изменялась в диапазоне от 0 до 5%. Для каждой точки эксперимента результаты вычисления относительной погрешности усреднялись по $M = 100$ реализациям.

На рис. 3–6 представлены зависимости относительной погрешности вычисления частоты, декремента, начальной амплитуды и фазы колебаний от мощности случайной помехи, соответственно. Точки 1 соответствуют методу наименьших квадратов, примененному к обобщенной регрессионной модели (7) без ее преобразования, а точки 2 — итерационному методу вычислений среднеквадратичных оценок коэффициентов ЛПДМ. Видно, что, во-первых, погрешность оценивания частоты, начальной амплитуды и фазы колебаний достаточно мала даже при относительно большой мощности случайного возмущения, в то время как погрешность вычисления декремента колебаний много больше. Во-вторых, точность вычисления ДХ при использовании итерационного метода среднеквадратичного оценивания существенно, в десятки, а для декремента колебаний в сотни раз выше по сравнению с методом наименьших квадратов, примененным к обобщенной регрессионной модели (7). Таким образом, применение итерационного метода среднеквадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения позволяет в среднем на два порядка увеличить точность вычисления ДХ по сравнению с методом наименьших квадратов для обобщенной регрессионной модели (7) без ее преобразования.

Р и с. 3. Зависимость погрешности вычисления частоты колебаний от величины случайной помехи в результатах наблюдений

Р и с. 4. Зависимость погрешности вычисления декремента колебаний (в логарифмическом масштабе) от величины случайной помехи в результатах наблюдений

Р и с. 5. Зависимость погрешности вычисления начальной амплитуды колебаний от величины случайной помехи в результатах наблюдений

Р и с. 6. Зависимость погрешности вычисления начальной фазы колебаний от величины случайной помехи в результатах наблюдений

Проведены численно-аналитические исследования зависимости погрешности вычисления ДХ от периода дискретизации τ и объема выборки N при использовании итерационного метода среднеквадратичного оценивания. Необходимость таких исследований объясняется влия-

нием этих параметров на погрешность оценок динамических характеристик. Параметры тестового сигнала устанавливались следующим образом: $a_0 = 1$, $\psi_0 = 1$, $\delta_0 = 0,05$, $\omega = 2\pi$, $\varepsilon = 3\%$. Число усреднений для каждой точки эксперимента: $M = 1000$. По результатам исследований, представленным на рис. 7–10, можно сделать следующие выводы. Уменьшение периода дискретизации (в относительных к периоду колебаний единицах) с целью увеличения объема выборки при фиксированном времени наблюдения приводит к увеличению погрешности вычисления декремента колебаний, а увеличение объема выборки, наоборот, — к уменьшению погрешности. Эти результаты принципиально отличаются от аналогичных зависимостей, соответствующих применению МНК непосредственно к обобщенной регрессионной модели (7) без ее преобразования [1].

Р и с. 7. Зависимость относительной погрешности вычисления частоты колебаний от периода дискретизации ($N = 100$)

Р и с. 8. Зависимость относительной погрешности вычисления начальной амплитуды (точки 1) и фазы колебаний (точки 2) от периода дискретизации ($N = 100$)

Р и с. 9. Зависимость относительной погрешности вычисления декремента колебаний от объема выборки ($\tau = 0,2$)

Р и с. 10. Зависимость относительной погрешности вычисления начальной амплитуды (точки 1) и фазы колебаний (точки 2) от объема выборки ($\tau = 0,2$)

Оценка погрешности вычисления динамических характеристик систем с турбулентным трением в процессе обработки результатов эксперимента. Достоверная оценка погрешности результатов вычислений в процессе эксперимента является необходимым элементом в методе определения динамических характеристик диссипативной системы на основе стохастического разностного уравнения колебаний. Для решения этой задачи используются статистические методы [5], так как в качестве основного источника погрешности оценок ДХ рассматривается случайная помеха в результатах наблюдений. Процедура вычисления результирующей погрешности можно разбить на следующие этапы. Вначале находятся статистические оценки—

средние квадратические отклонения (СКО) — для коэффициентов λ_j , $j = \overline{0, 4}$. Затем с заданной вероятностью вычисляются доверительные границы случайной погрешности для оценок $\hat{\lambda}_j$. Эти границы могут рассматриваться как предельные абсолютные погрешности $\Delta\lambda_j$ (с заданной доверительной вероятностью) коэффициентов ЛПДМ. Полученные результаты позволят вычислить предельные относительные погрешности: $\delta\lambda_j = \frac{\Delta\lambda_j}{|\lambda_j|}$. На заключительном этапе

процедуры вычисления результирующей погрешности, на основании (10) и (11), находятся формулы, связывающие относительные погрешности коэффициентов ЛПДМ с погрешностью оценивания частоты, декремента, начальной амплитуды и фазы колебаний. Затем по этим формулам вычисляются относительные погрешности ДХ диссипативной системы.

При использовании итерационного метода вычисления среднеквадратичных оценок коэффициентов ЛПДМ в форме стохастического разностного уравнения (7) минимизируется функционал $J_\lambda = \|P_\lambda^{-1}b_y - P_\lambda^{-1}F_y\lambda\|^2 = \|\varepsilon\|^2 \rightarrow \min$. Это приводит к оценкам $\hat{\lambda} = (F_y^T \Omega_\lambda^{-1} F_y)^{-1} F_y^T \Omega_\lambda^{-1} b_y$, где неслучайная матрица $\Omega_\lambda = P_\lambda P_\lambda^T$. Отсюда можно получить $\hat{\lambda} = \lambda + (F_y^T \Omega_\lambda^{-1} F_y)^{-1} F_y^T (P_\lambda^{-1})^T \varepsilon$.

Тогда $M[\hat{\lambda}] = \lambda + M[(F_y^T \Omega_\lambda^{-1} F_y)^{-1} F_y^T (P_\lambda^{-1})^T \varepsilon] = \lambda + \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda = M[(F_y^T \Omega_\lambda^{-1} F_y)^{-1} F_y^T (P_\lambda^{-1})^T \varepsilon]$ — смещение, обусловленное корреляцией между случайным возмущением ε и элементами матрицы F_y . Так как по определению $V[\varepsilon] = \sigma_\varepsilon^2 E$, то ковариационная матрица оценок $\hat{\lambda}$ может быть представлена в виде $V[\hat{\lambda}] = M[(\hat{\lambda} - M[\hat{\lambda}])(\hat{\lambda} - M[\hat{\lambda}])^T] = M[(F_y^T \Omega_\lambda^{-1} F_y)^{-1}] \sigma_\varepsilon^2 - \Delta\lambda \Delta\lambda^T$. При вычислениях итерационным методом смещение в оценках незначительно, и в первом приближении им можно пренебречь. Кроме того, при малых значениях случайного возмущения ε_k можно принять $M[(F_y^T \Omega_\lambda^{-1} F_y)^{-1}] \approx (F_y^T \Omega_\lambda^{-1} F_y)^{-1}$. Тогда, обозначив диагональные элементы матрицы

$C = (F_y^T \Omega_\lambda^{-1} F_y)^{-1}$ через c_{ii} , $i = \overline{1, 5}$, средние квадратические отклонения коэффициентов $\hat{\lambda}_i$ можно оценить по формуле $\sigma_{\lambda_{i-1}} \approx \sqrt{c_{ii}} s$, где s — оценка среднего квадратического отклонения σ_ε случайного возмущения в результатах наблюдений. Если эта величина априори неизвестна, то

ее можно оценить по выражению $s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (e_k - \bar{e})^2}{N-4}}$, $\bar{e} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e_k$, где e_k — остатки, которые находятся по формуле $e = P_\lambda^{-1}b_y - P_\lambda^{-1}F_y\hat{\lambda}$.

В качестве оценки предельной абсолютной погрешности вычисления коэффициента $\hat{\lambda}_i$ (с доверительной вероятностью β) можно использовать границу доверительного интервала, которая вычисляется по формуле [4]: $\Delta\lambda_{i-1} = t_T \sqrt{c_{ii}} s$, $i = \overline{1, 5}$. Здесь величина $t_T = t(\alpha, \nu)$ берется из таблицы распределения Стьюдента при числе степеней свободы $\nu = N - 4$ и уровне значимости $\alpha = 1 - \beta$. При доверительной вероятности $\beta = 0,99$ и объеме выборки $N \geq 15$ принимаем $t_T = 2,7$.

Из формул (10) и (11) несложно получить соотношения, связывающие относительные погрешности оценок коэффициентов ЛПДМ с относительными погрешностями вычисления динамических характеристик диссипативной системы:

$$\delta\omega = \left| \frac{\operatorname{ctg} \omega \tau}{\omega \tau} \right| \delta\lambda_0, \quad \delta\delta_0 = \left| \frac{\operatorname{ctg} \omega \tau}{\omega \tau} \right| \delta\lambda_0 + \delta\lambda_1 = \delta\omega + \delta\lambda_1; \quad (12)$$

$$\delta a_0 = \operatorname{ctg}^2 \omega \tau \cdot \sin^2 \psi_0 \cdot \delta\lambda_0 + \cos^2 \psi_0 \cdot \delta\lambda_3 + \sin^2 \psi_0 \cdot \delta\lambda_4 \leq \operatorname{ctg}^2 \omega \tau \cdot \delta\lambda_0 + \delta\lambda_3 + \delta\lambda_4; \quad (13)$$

$$\delta\psi_0 = \left| \frac{\sin 2\psi_0}{2\psi_0} \right| (\operatorname{ctg}^2 \omega \tau \cdot \delta\lambda_0 + \delta\lambda_3 + \delta\lambda_4) \leq \operatorname{ctg}^2 \omega \tau \cdot \delta\lambda_0 + \delta\lambda_3 + \delta\lambda_4. \quad (14)$$

В формулах (12)–(14) коэффициенты передачи ошибки для предельных относительных погрешностей существенно зависят от $\omega\tau = 2\pi \frac{\tau}{T}$. Обозначив $k_1 = \left| \frac{\text{ctg}\omega\tau}{\omega\tau} \right|$ и $k_2 = \text{ctg}^2\omega\tau$ получаем: $\delta\omega = k_1 \cdot \delta\lambda_0$, $\delta\delta_0 = k_1 \cdot \delta\lambda_0 + \delta\lambda_1 = \delta\omega + \delta\lambda_1$, $\delta\alpha_0 = k_2 \cdot \delta\lambda_0 + \delta\lambda_3 + \delta\lambda_4$ и $\delta\psi_0 = k_2 \cdot \delta\lambda_0 + \delta\lambda_3 + \delta\lambda_4$.

На рис. 11 представлены кривые зависимости $k_1\left(\frac{\tau}{T}\right)$ (кривая 1) и $k_2\left(\frac{\tau}{T}\right)$ (кривая 2) в диапазоне изменения $\frac{\tau}{T}$ от 0 до 0,5. Очевидно, что оптимальным значением $\frac{\tau}{T}$, обеспечивающим минимальные значения k_1 и k_2 , является значение 0,25. При малых τ коэффициенты k_1 и k_2 резко возрастают. Однако следует отметить, что все же основное влияние на погрешность ДХ оказывает величина относительной погрешности коэффициентов ЛПДМ. В частности, из-за существенно малых $\delta\lambda_0$ уменьшение τ фактически не влияет на $\delta\alpha_0$ и $\delta\psi_0$ (рис. 8). В то же время при малых τ , из-за плохой вычислительной устойчивости решения системы нормальных уравнений, погрешность $\delta\lambda_1$ резко возрастает, что в свою очередь приводит к увеличению погрешности оценок декремента колебаний (рис. 7).

Р и с. 11. Зависимости коэффициентов передачи ошибки k_1 (кривая 1) и k_2 (кривая 2)

Р и с. 12. Зависимости оценки предельной относительной погрешности (кривая 1) и относительных погрешностей (точки 2) вычисления частоты колебаний

Р и с. 13. Зависимости оценки предельной относительной погрешности (кривая 1) и относительных погрешностей (точки 2) вычисления декремента колебаний

Р и с. 14. Зависимости оценки предельной относительной погрешности (кривая 1) и относительных погрешностей (точки 2) вычисления начальной амплитуды колебаний

Проведены численно-аналитические исследования, подтверждающие достоверность полученных формул оценки предельной относительной погрешности вычисления динамических характеристик (с доверительной вероятностью 0,99). На рис. 12–14 представлены границы (кривые 1) для относительной погрешности вычисления частоты, декремента и начальной амплитуды колебаний, соответственно, построенные на основании полученных формул. Точки 2 на этих графиках соответствуют результатам вычисления относительной погрешности в численном эксперименте с параметрами тестового сигнала $a_0 = 1$, $\psi_0 = 1$, $\delta_0 = 0,05$, $\omega = 2\pi$, $\tau = 0,24$ и $N = 100$. Очевидно, что погрешность оценок ДХ практически полностью укладывается в границы для предельной относительной погрешности, вычисленной в соответствии с предложенной методикой по представленным выше формулам.

Таким образом, в работе решены следующие задачи: построена линейно-параметрическая дискретная модель колебаний систем с турбулентным трением в форме стохастического разностного уравнения; описан алгоритм определения динамических характеристик на основе среднеквадратичных оценок коэффициентов стохастического разностного уравнения; разработан итерационный метод среднеквадратичного оценивания коэффициентов ЛПДМ и проведено исследование его эффективности; разработана методика и получены формулы, описывающие предельные относительные погрешности вычисления динамических характеристик. Все это свидетельствует о том, что разработан новый эффективный метод определения динамических характеристик диссипативных систем с турбулентным трением, в основе которого лежит итерационная процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели колебаний в форме стохастического разностного уравнения, и который может быть рекомендован к практическому применению в научно-технических и промышленных экспериментах по оценке технического состояния различных механических систем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зотеев В. Е. Разработка и исследование линейных дискретных моделей колебаний диссипативных систем // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки, 1999. № 7. С. 170–177.
2. Писаренко Г. С., Матвеев В. А., Яковлев А. П. Методы определения характеристик колебаний упругих систем. Киев: Наук. думка, 1976. 88 с.
3. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
4. Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е. Прикладной линейный регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1987. 239 с.
5. Грановский В. А., Сирая Т. Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 288 с.

Поступила 3.09.2005 г.

УДК 621.317.33

В. С. Мелентьев

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПО МГНОВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассматривается влияние погрешности квантования аналого-цифровых преобразователей на точность определения параметров электрических цепей по мгновенным значениям переходных процессов. Даются рекомендации по выбору оптимальных временных соотношений, обеспечивающих увеличение точности вычисления параметров.

Методы определения параметров электрических цепей (ПЭЦ) по мгновенным значениям нескольких переходных процессов направлены на сокращение времени измерения. В связи с этим формируются два переходных процесса на средних точках двух измерительных цепей или на известном и неизвестном элементах измерительной цепи [1].

Для реализации рассматриваемых методов чаще всего используются устройства с двумя аналого-цифровыми преобразователями (АЦП), которые обеспечивают одновременное измерение мгновенных значений переходных процессов.