Общероссийский математический портал

В. Н. Митрошин, Математическое моделирование процесса охлаждения изолированной кабельной жилы при ее изготовлении на экструзионной линии как объекта управления с распределенными параметрами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 38, 122–128

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu385>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 09:17:04

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОХЛАЖДЕНИЯ
ИЗОЛИРОВАННОЙ КАБЕЛЬНОЙ ЖИЛЫ ПРИ ЕЕ ИЗГОТОВЛЕНИИ
НА ЭКСТРУЗИОННОЙ ЛИНИИ КАК ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Решена задача математического моделирования температурных полей при охлаждении сопряженных физически неоднородных осесимметричных тел. Это позволит получить структурную схему процесса охлаждения кабельной изоляции, накладываемой на экструзионной линии, как объекта управления с распределенными параметрами для последующего синтеза системы управления процессом охлаждения.

Важнейшей технологической операцией производства кабелей связи с пластмассовой изоляцией, на которой формируются основные параметры качества кабеля как канала связи, является операция изолирования. При изготовлении кабелей с полиэтиленовой изоляцией ее наложение осуществляется на экструзионных линиях, содержащих помимо червячных экструдеров охлаждающие ванны. При этом ванны охлаждения обычно рассматриваются как объекты управления с сосредоточенными параметрами (звенья с переменным транспортным запаздыванием [1]), а не как объекты управления с распределенными параметрами. И это несмотря на то, что на технологической линии изолирования предусмотрено распределенное управление температурой воды в ваннах.

В данной работе предпринята попытка математического описания процесса охлаждения кабельной изоляции как объекта с распределенными параметрами.

Система уравнений, описывающая в безразмерной форме температурное поле в системе двух сопряженных цилиндров — внутренний медный проводник (индекс 1) и кабельная полиэтиленовая изоляция (индекс 2), имеет нижеследующий вид [2].

Для металлического проводника (внутреннего цилиндра):

$$\frac{\partial \theta_1(x, l, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1(x, l, \tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \theta_1(x, l, \tau)}{\partial x} + \gamma^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta_1(x, l, \tau)}{\partial l^2}, \quad l \in [0, 1], \quad x \in [0, x_1], \quad x_1 < 1. \quad (1)$$

Для изоляции (внешнего цилиндра):

$$\frac{\partial \theta_2(x, l, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_2(x, l, \tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \theta_2(x, l, \tau)}{\partial x} + \gamma^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta_2(x, l, \tau)}{\partial l^2} - \gamma^2 \cdot Pe \cdot \frac{\partial \theta_2(x, l, \tau)}{\partial l}, \quad (2)$$

$$l \in [0, 1], \quad x \in [x_1, 1].$$

В безразмерной форме начальные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_1(x, l, 0) &= \theta_{10}(x, l); \quad \theta_2(x, l, 0) = \theta_{20}(x, l); \\ \theta_1(x, 0, \tau) &= \theta_1(x, \tau) = \frac{T_n}{T^*} = \theta_{10}^*; \quad \theta_2(x, 0, \tau) = \theta_2(x, \tau) = \frac{T_p}{T^*} = \theta_{21}^*; \\ \frac{\partial \theta_1(0, l, \tau)}{\partial x} &= 0; \quad \theta_1(0, l, \tau) \neq \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

На поверхности контакта изоляции и проводника выполняется граничное условие четвертого рода, что соответствует теплообмену тел, находящихся в тепловом контакте (температуры сопрягающихся поверхностей одинаковы), а на внешней поверхности изоляции, охлаждаемой теплоносителем (водой — в ванне охлаждения, либо воздухом — на участке воздушного охлаждения), выполняется граничное условие второго рода [3]:

$$\frac{\partial \theta_2(x_1, l, \tau)}{\partial x} = \chi \cdot \frac{\partial \theta_1(x_1, l, \tau)}{\partial x}, \quad \chi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad (4)$$

$$\theta_2(x_1, l, \tau) = \theta_1(x_1, l, \tau); \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta_2(1, l, \tau)}{\partial x} = q_1(l, \tau) = -\frac{\alpha_n \cdot R_{из}}{\lambda_2} \cdot [\theta_2(1, l, \tau) - \theta_e(l, \tau)], \quad (6)$$

где $\theta_2 = \frac{T_2}{T^*}$, $\theta_1 = \frac{T_1}{T^*}$, $l = \frac{z}{L}$, $x = \frac{r}{R_{из}}$, $\tau = \frac{at}{R_{из}^2}$, $\gamma = \frac{L}{R_{из}}$, $Pe = \frac{V \cdot L}{a}$, $x_1 = \frac{r_0}{R_{из}}$.

Здесь T_1 — температура проводника; T_2 — температура изоляции; T^* — температура при-
ведения (плавления изоляции); θ_1 и θ_2 — безразмерная температура проводника и изоляции
соответственно; r — текущий радиус; z — продольная координата; t — текущее время; $R_{из}$ —
радиус жилы по изоляции; r_0 — радиус внутреннего проводника; x, l, τ — безразмерные радиус,
осевая координата и время соответственно; L — общая длина участка охлаждения; x_1 — гра-
ница сопряжения двух неоднородных сред (изоляции и металлического проводника); λ_1 — ко-
эффициент теплопроводности материала проводника; λ_2 — коэффициент теплопроводности ма-
териала изоляции; V — скорость изолирования (вытяжки); T_p — температура расплава изоля-
ции; T_n — температура предварительного подогрева проводника; Pe — число Пекле; a — ко-
эффициент температуропроводности; α_n — коэффициент теплоотдачи на поверхности изоля-
ции; θ_θ — относительная температура охлаждающей среды (например, воды).

При охлаждении расплавленной кабельной изоляции в результате кристаллизации полиме-
ра происходит выделение тепла, поэтому в уравнение (2) необходимо добавить член, учиты-
вающий наличие внутренних источников тепла. Но так как толщина кабельной изоляции, как
правило, невелика и составляет единицы миллиметров, разность температур наружного и по-
верхностного слоев изоляции не превышает при охлаждении 40–60 °С и, как показали расчеты,
количество тепла, выделяемого при кристаллизации, незначительно, а потому с достаточным
обоснованием внутренними источниками тепла можно пренебречь.

Будем искать решение системы уравнений в виде сумм

$$\begin{aligned}\theta_1(x, l, \tau) &= \theta_{11}(x, \tau) + \theta_{12}(x, l, \tau), \\ \theta_2(x, l, \tau) &= \theta_{21}(x, \tau) + \theta_{22}(x, l, \tau),\end{aligned}\quad (7)$$

где $\theta_{11}(x, \tau)$ и $\theta_{21}(x, \tau)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_{11}(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{11}(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \theta_{11}(x, \tau)}{\partial x}, \\ \frac{\partial \theta_{21}(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{21}(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \theta_{21}(x, \tau)}{\partial x}, \end{cases}\quad (8)$$

а $\theta_{12}(x, l, \tau)$ и $\theta_{22}(x, l, \tau)$ —

$$\frac{\partial \theta_{12}(x, l, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{12}(x, l, \tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \theta_{12}(x, l, \tau)}{\partial x} + \gamma^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta_{12}(x, l, \tau)}{\partial l^2}, \quad l \in [0, 1], \quad x \in [0, x_1], \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta_{22}(x, l, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_{22}(x, l, \tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \theta_{22}(x, l, \tau)}{\partial x} + \gamma^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta_{22}(x, l, \tau)}{\partial l^2} - \gamma^2 \cdot Pe \cdot \frac{\partial \theta_{22}(x, l, \tau)}{\partial l}, \quad (10)$$

$$l \in [0, 1], \quad x \in [x_1, 1].$$

Краевые условия:

$$\theta_{11}(x, 0) = \theta_{10}^* = \frac{T_n}{T^*}, \quad \theta_{21}(x, 0) = \theta_{20}^* = \frac{T_p}{T^*}, \quad \frac{\partial \theta_{21}(1, \tau)}{\partial x} = q_1(\tau), \quad \frac{\partial \theta_{11}(0, \tau)}{\partial x} = 0;$$

$$\theta_{11}(x, \tau) = \theta_{21}(x, \tau), \quad \frac{\partial \theta_{21}(x_1, \tau)}{\partial x} = \chi \cdot \frac{\partial \theta_{11}(x_1, \tau)}{\partial x};$$

$$\theta_{12}(x, l, 0) = \theta_{10}(x, l), \quad \theta_{22}(x, l, 0) = \theta_{20}(x, l), \quad \frac{\partial \theta_{12}(0, l, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta_{22}(x_1, l, \tau)}{\partial x} = \chi \cdot \frac{\partial \theta_{12}(x_1, l, \tau)}{\partial x}, \quad \theta_{12}(x_1, l, \tau) = \theta_{22}(x_1, l, \tau).$$

Рассмотрим теперь систему уравнений (8) с краевыми условиями (11), описывающих тем-
пературное поле двух разнородных сопряженных бесконечных цилиндров. Применяя преобра-
зование Лапласа [5], получим

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_{11}(x, p)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_{11}(x, p)}{\partial x} - p \cdot \bar{\theta}_{11}(x, p) = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_{21}(x, p)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_{21}(x, p)}{\partial x} - p \cdot \bar{\theta}_{21}(x, p) = 0 \quad (13)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \bar{\theta}_{11}(0, p)}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_{21}(1, p)}{\partial x} = q_1(p) \quad (15)$$

и условиями сопряжения

$$\bar{\theta}_{11}(x_1, p) = \bar{\theta}_{21}(x_1, p), \quad (16)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_{21}(x_1, p)}{\partial x} = \chi \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_{11}(x_1, p)}{\partial x}. \quad (17)$$

Уравнения (12) и (13) представляют собой однородные модифицированные уравнения Бесселя, имеющие различные граничные условия. Решение (12) с граничным условием (14) относительно изображения $\bar{\theta}_{11}(x, p)$ можно записать в виде [6]

$$\bar{\theta}_{11}(x, p) = C_3(p) I_0(x\sqrt{p}). \quad (18)$$

Решение уравнения (13) с граничным условием (15) относительно изображения $\bar{\theta}_{21}(x, p)$ можно представить таким образом [3,6]:

$$\bar{\theta}_{21}(x, p) = C_1(p) I_0(x\sqrt{p}) + C_2(p) K_0(x\sqrt{p}). \quad (19)$$

Здесь $C_1(p)$, $C_2(p)$ и $C_3(p)$ — постоянные интегрирования, $I_0(x\sqrt{p})$ и $K_0(x\sqrt{p})$ — функции Бесселя соответственно I и II рода нулевого порядка от мнимого аргумента. Значения постоянных интегрирования $C_1(p)$, $C_2(p)$ и $C_3(p)$ должны удовлетворять граничному условию (15) и условиям сопряжения (16), (17).

Опуская промежуточные преобразования, запишем выражения для постоянных интегрирования:

$$C_2(p) = \frac{\bar{q}_1(p)}{\sqrt{p} \cdot [\alpha(p) \cdot I_1(\sqrt{p}) - K_1(\sqrt{p})]}; \quad (20)$$

$$C_1(p) = \alpha(p) \cdot C_2(p), \quad (21)$$

$$C_3(p) = [\alpha(p) \cdot I_0(x_1\sqrt{p}) + K_0(x_1\sqrt{p})] \cdot \frac{\bar{q}_1(p)}{\sqrt{p} \cdot [\alpha(p) \cdot I_1(\sqrt{p}) - K_1(\sqrt{p})]}, \quad (22)$$

где $\bar{q}_1(p)$ — изображение по Лапласу функции $q_1(1, \tau)$,

$$\alpha(p) = \frac{K_1(x_1\sqrt{p}) + \chi \cdot K_0(x_1\sqrt{p})}{I_1(x_1\sqrt{p}) - \chi \cdot I_0(x_1\sqrt{p})}. \quad (23)$$

Тогда полученные в изображениях по Лапласу выражения для температур $\bar{\theta}_{11}(x, p)$ и $\bar{\theta}_{21}(x, p)$ будут иметь вид

$$\bar{\theta}_{11}(x, p) = \frac{[\alpha(p) \cdot I_0(x_1\sqrt{p}) + K_0(x_1\sqrt{p})]}{\sqrt{p} \cdot [\alpha(p) \cdot I_1(\sqrt{p}) - K_1(\sqrt{p})]} \cdot \bar{q}_1(p) \cdot I_0(x\sqrt{p}); \quad (24)$$

$$\bar{\theta}_{21}(x, p) = \frac{[\alpha(p) \cdot I_0(x\sqrt{p}) + K_0(x\sqrt{p})]}{\sqrt{p} \cdot [\alpha(p) \cdot I_1(\sqrt{p}) - K_1(\sqrt{p})]} \cdot \bar{q}_1(p). \quad (25)$$

Рассмотрим далее уравнения (9), (10). Уравнение (9) есть неоднородное модифицированное уравнение Бесселя. Применим к нему конечное интегральное косинус-преобразование Фурье [3] для граничных условий II рода. Это формально можно допустить, так как кабель —

длинномерное «бесконечное» изделие; тепловые потоки вдоль оси кабеля нулевые, и на границах участка охлаждения справедливо полагать

$$\frac{\partial \theta_{12}(x, 0, \tau)}{\partial l} = q_2(x, \tau) = 0; \quad (26)$$

$$\frac{\partial \theta_{12}(x, 1, \tau)}{\partial l} = q_3(x, \tau) = 0. \quad (27)$$

Тогда в соответствии с [3] имеем

$$\frac{\partial \overline{\theta_{12}}(x, n, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \overline{\theta_{12}}(x, n, \tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \overline{\theta_{12}}(x, n, \tau)}{\partial x} - \gamma^2 \pi^2 n^2 \overline{\theta_{12}}(x, n, \tau), \quad (28)$$

где $\overline{\theta_{12}}(x, n, \tau)$ — изображение $\theta(x, l, \tau)$ по координате l .

Существенным отличием уравнения (10) является наличие транспортного члена $\gamma^2 \cdot Pe \cdot \frac{\partial \theta_{22}(x, l, \tau)}{\partial l}$, который не позволяет непосредственно применять косинус-преобразование Фурье. Исключим этот член с помощью подстановки [3]:

$$\theta_{22}(x, l, \tau) = T_2(x, l, \tau) \cdot S(l, \tau), \quad (29)$$

где $T_2(x, l, \tau)$ есть функция тех же переменных, что и $\theta_{22}(x, l, \tau)$, а $S(l, \tau)$ положим равной:

$$S(l, \tau) = e^{\left[\frac{Pe \cdot l}{2} - \frac{\gamma^2 \cdot Pe^2}{4} \cdot \tau \right]}. \quad (30)$$

Подставляя (29) в (10), получаем после преобразований уравнение, аналогичное (9) (без транспортного члена), но для другой функции $T_2(x, l, \tau)$, связанной с искомой функцией $\theta_{22}(x, l, \tau)$ соотношением (29):

$$\frac{\partial T_2(x, l, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T_2(x, l, \tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial T_2(x, l, \tau)}{\partial x} + \gamma^2 \cdot \frac{\partial^2 T_2(x, l, \tau)}{\partial l^2}, \quad l \in [0, 1], \quad x \in [0, x_1]. \quad (31)$$

Граничные условия с учетом (29) теперь запишутся следующим образом:

$$S(l, \tau) \cdot \frac{\partial T_2(x, l, \tau)}{\partial x} = \chi \cdot \frac{\partial \theta_{12}(x_1, l, \tau)}{\partial x}; \quad (32)$$

$$\theta_{12}(x_1, l, \tau) = T_2(x_1, l, \tau) \cdot S(l, \tau); \quad (33)$$

$$\frac{\partial T_2(x, 0, \tau)}{\partial l} = q_4(x, \tau) = 0; \quad (34)$$

$$\frac{\partial T_2(x, 1, \tau)}{\partial l} = q_5(x, \tau) = 0. \quad (35)$$

Применяя к (31) косинус-преобразование Фурье, получим теперь для изображения $\overline{T_2}(x, n, \tau)$:

$$\frac{\partial \overline{T_2}(x, n, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \overline{T_2}(x, n, \tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \overline{T_2}(x, n, \tau)}{\partial x} - \gamma^2 \pi^2 n^2 \overline{T_2}(x, n, \tau). \quad (36)$$

Теперь необходимо для изображений Фурье найти условия сопряжения на границе раздела двух сопряженных тел, т.е. установить связь между косинус-преобразованиями температуры $\overline{\theta_{12}}(x, n, \tau)$ внутреннего цилиндра (проводника) и $\overline{T_2}(x, n, \tau)$ внешнего цилиндра (кабельной изоляции).

Интегрируя соответствующие условия (11) согласно [4], получим:

$$\frac{\partial \overline{\theta_{12}}(0, n, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (37)$$

$$L \left[S(l, \tau) \cdot \frac{\partial T_2(x_1, l, \tau)}{\partial x} \right] = \chi \cdot \frac{\partial \overline{\theta_{12}}(x_1, n, \tau)}{\partial x}; \quad (38)$$

$$\overline{\theta_{12}}(x_1, n, \tau) = L \left[T_2(x_1, l, \tau) \cdot S(l, \tau) \right]; \quad (39)$$

$$\theta_{12}(x, l, 0) = \theta_{10}(x, l), \quad \theta_{22}(x, l, 0) = \theta_{20}(x, l), \quad \frac{\partial \bar{T}_2(0, l, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (40)$$

Принципиальное усложнение здесь получается за счет необходимости искать изображения по Лапласу от произведений в (38) и (39). Представим $S(l, \tau)$ в виде разложения в ряд по $\cos \pi n l$. Обозначив $S_n(\tau) = \int_0^1 S(l, \tau) \cos \pi n l dl$, получим [3]:

$$S(l, \tau) = S_0(\tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\tau) \cos \pi n l. \quad (41)$$

Аналогично представим $\theta_{12}(x, l, \tau)$ и $T_2(x, l, \tau)$:

$$\theta_{12}(x, l, \tau) = \theta_{120}(x, \tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{12n}(x, n, \tau) \cos \pi n l; \quad (42)$$

$$T_2(x, l, \tau) = T_{20}(x, \tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_{2n}(x, n, \tau) \cos \pi n l. \quad (43)$$

В соответствии с введенными для задачи (9)–(10) граничными условиями (11) можно показать, что

$$\theta_{120}(x, \tau) = \int_0^1 \theta_{12}(x, l, \tau) dl = 0; \quad (44)$$

$$T_{20}(x, \tau) = \int_0^1 T_2(x, l, \tau) dl = 0. \quad (45)$$

Тогда, подставляя (41) и (45) в (39) с учетом соотношения (30), умножая обе части равенства (39) на $\cos k l$ и интегрируя полученные равенства по l , получим вместо (39)

$$\begin{aligned} \int_0^1 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\theta}_{12n}(x_1, n, \tau) \cos \pi n l \cdot \cos \pi k l dl &= 2 S_0(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} \bar{T}_{2m}(x_1, n, \tau) \int_0^1 \cos \pi m l \cdot \cos \pi k l dl + \\ &+ 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\tau) \bar{T}_{2m}(x_1, n, \tau) \int_0^1 \cos \pi n l \cdot \cos \pi m l \cdot \cos \pi k l dl. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь

$$\int_0^1 \cos \pi n l \cdot \cos \pi k l dl = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } k = n, \end{cases}$$

а интеграл $\int_0^1 \cos \pi n l \cdot \cos \pi m l \cdot \cos \pi k l dl = 0$, $\forall m \geq 1, n \geq 1, k \geq 1$.

Тогда вместо (46) получаем

$$\bar{\theta}_{12k}(x_1, n, \tau) = S_0(\tau) \cdot \bar{T}_{2k}(x_1, n, \tau), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (47)$$

а вместо (39) —

$$\bar{\theta}_{12}(x_1, n, \tau) = S_0(\tau) \cdot \bar{T}_2(x_1, n, \tau). \quad (48)$$

Аналогично вместо (38) имеем

$$\chi \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_{12}(x_1, n, \tau)}{\partial x} = S_0(\tau) \cdot \frac{\partial \bar{T}_2(x_1, n, \tau)}{\partial x}. \quad (49)$$

Таким образом, задача нахождения изображений в (38), (39) решена в условиях (44), (45), которые становятся возможными в рамках модели (36), что и объясняет предлагаемый поиск решений $\theta_1(x, l, \tau)$ и $\theta_2(x, l, \tau)$, описывающих температурное поле двух разнородных сопряженных бесконечных цилиндров, в форме (7).

Теперь окончательно имеем систему уравнений:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_{12}(x, n, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_{12}(x, n, \tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \bar{\theta}_{12}(x, n, \tau)}{\partial x} - A(n) \bar{\theta}_{12}(x, n, \tau), \quad \forall x \in [0, x_1]; \quad (50)$$

$$\frac{\partial \overline{T}_2(x, n, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \overline{T}_2(x, n, \tau)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \overline{T}_2(x, n, \tau)}{\partial x} - A(n) \overline{T}_2(x, n, \tau), \quad \forall x \in [x_1, 1] \quad (51)$$

с граничными условиями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \overline{\theta}_{12}(x, n, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad \frac{\partial \overline{T}_2(x, n, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \\ \chi \cdot \frac{\partial \overline{\theta}_{12}(x, n, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} &= S_0(\tau) \cdot \frac{\partial \overline{T}_2(x, n, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=x_1}, \\ \overline{\theta}_{12}(x, n, \tau) \Big|_{x=x_1} &= S_0(\tau) \cdot \overline{T}_2(x, n, \tau) \Big|_{x=x_1}, \\ \overline{\theta}_{12}(x, n, \tau) \Big|_{\tau=0} &= \overline{T}_2(x, n, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где

$$A(n) = \gamma^2 \pi^2 n^2; \quad S_0(\tau) = k^* e^{-\Delta \tau}; \quad k^* = \frac{2}{Pe} \left(e^{\frac{Pe}{2}} - 1 \right); \quad \Delta = \frac{\gamma^2 Pe^2}{4}. \quad (53)$$

Применяя к (50) и (52) преобразование Лапласа, получим изображения для составляющих $\overline{\theta}_{12}(x, n, p)$ и $\overline{T}_2(x, n, p)$ температурного поля системы двух сопряженных разнородных по теплофизическим свойствам осесимметричных цилиндрических тел:

$$\frac{d^2 \overline{\theta}_{12}(x, n, p)}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d \overline{\theta}_{12}(x, n, p)}{dx} - [p + A(n)] \cdot \overline{\theta}_{12}(x, n, p) = 0; \quad (54)$$

$$\frac{d^2 \overline{T}_2(x, n, p)}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d \overline{T}_2(x, n, p)}{dx} - [p + A(n)] \cdot \overline{T}_2(x, n, p) = 0 \quad (55)$$

с граничными условиями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \overline{\theta}_{12}(0, n, p)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \overline{T}_2(1, n, p)}{\partial x} = 0, \\ \overline{\theta}_{12}(x_1, n, p) &= k^* \overline{T}_2(x_1, n, p + \Delta), \\ \chi \cdot \frac{\partial \overline{\theta}_{12}(x_1, n, p)}{\partial x} &= k^* \frac{\partial \overline{T}_2(x_1, n, p + \Delta)}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Решения (54) и (56), как составляющие решения однородных уравнений Бесселя будем вновь искать в виде [6]

$$\overline{T}_2(x, n, p) = C_4(n, p) I_0(x \sqrt{p + A(n)}) + C_5(n, p) K_0(x \sqrt{p + A(n)}); \quad (57)$$

$$\overline{\theta}_{12}(x, n, p) = C_6(n, p) I_0(x \sqrt{p + A(n)}). \quad (58)$$

Введем обозначения:

$$s = \sqrt{p + A(n)}, \quad \sigma = \sqrt{p + A(n) + \Delta}.$$

Постоянные интегрирования $C_4(n, p)$, $C_5(n, p)$ и $C_6(n, p)$ находятся из решения системы уравнений (56), составленных для поверхности сопряжения двух цилиндрических тел и условия теплообмена внешнего цилиндра с окружающей средой, но уже для новой переменной $\overline{T}_2(x, n, p)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \overline{\theta}_{12}(0, n, p)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \overline{T}_2(1, n, p)}{\partial x} = 0, \\ \overline{\theta}_{12}(x_1, n, p) &= k^* \overline{T}_2(x_1, n, p + \Delta), \\ \chi \cdot \frac{d \overline{\theta}_{12}(x_1, n, p)}{dx} &= k^* \frac{d \overline{T}_2(x_1, n, p + \Delta)}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Подставляя в (59) выражения для изображений температурных полей $\overline{\theta}_{12}(x, n, p)$ и $\overline{T}_2(x, n, p)$ в точках с координатами $x = x_l$ и $x = 1$, решая (59) относительно $C_4(n, p)$, $C_5(n, p)$, $C_6(n, p)$ и переходя в область оригиналов для косинус-преобразований Фурье, увидим, что при отсутствии внутренних теплоисточников изображения по Лапласу $\overline{\theta}_{12}(x, l, p)$ и $\overline{T}_2(x, l, p)$ равны нулю.

Таким образом, в выражениях (18) и (19) для составляющих $\overline{\theta}_{11}(x, p)$ и $\overline{\theta}_{21}(x, p)$ представлено температурное распределение для проводника и кабельной изоляции соответственно. Полученные результаты позволяют построить структурную модель процесса формирования температурного поля при охлаждении изолированной кабельной жилы при ее изготовлении на экструзионной линии как объекта управления с распределенными параметрами для последующего синтеза системы управления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИ СПИСОК

1. Laurich K., Muller G., Wallau H. Automatisierungssystem für kabelummantelungsanlagen // Mess. – Steuern – Regeln, 1979. В. 22. N/ 7. S. 370–374.
2. Митрошин В. Н. Математическое моделирование процессов теплопереноса при охлаждении экструдированной кабельной жилы с учетом фазовых превращений полимерной изоляции // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Техн. науки, 2005. № 32. С. 184–188.
3. Карпашов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.
4. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Высш. шк., 1966. 456 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
6. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 287 с.

Поступила 8.07.2005 г.
После переработки 20.09.2005 г.

УДК 66.046.4.001.57

В. В. Концев, А. В. Концев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАГРЕВА ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ

Предложена математическая модель нагрева при технологическом процессе получения металлургической извести, которая моделируется гранулированной средой, элементами системы которой являются сферы. Вводится кусочно-постоянная аппроксимация коэффициента теплопроводности. Задача решена численно. Наблюдается хорошее согласование с результатами экспериментов.

Для ведения технологического процесса при получении металлургической извести во вращающихся печах необходима достоверная информация о протекании обжига материала. В первую очередь требуются данные о протекании процессов сушки, дегидратации и декарбонизации $MgCO_3$ и $CaCO_3$, которые в итоге определяют основной показатель качества производимой извести – потери материала при прокаливании (ПМП). Эта задача может быть решена с помощью модели нагрева известняка, предлагаемой автором, которая отличается от существующих (например [1]) тем, что обрабатываемый материал рассматривается не как слой, представляющий термически тонкое тело, а как слой, состоящий из частиц сферической формы различного фракционного состава.

При создании модели вся длина вращающейся печи разбивается на N_1 зон малой протяженности (длина каждой зоны равна 1 м). Для каждой зоны рассчитываются скорости движения обрабатываемого материала и газового потока, их температуры и коэффициенты теплообмена. При этом температура материала определяется как среднемассовая температура системы, состоящей из сфер различных радиусов, размеры которых соответствуют размерам частиц фракции известняка (см. таблицу).