Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Савельев, Н. Г. Яговкин, Математическая модель комплекса программ развития для оценки принимаемых в них решений, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 38, 147–154

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 09:07:04

$$H = \frac{1 - (m_0(t)/(aV))^{k-1}}{B},$$

где t — текущее время

$$a = \rho_0 t_1 S, \quad b = \frac{k-1}{k} \frac{g_0}{RT_0}.$$

Учитывая влияние угла атаки на S , можно задать центровочные характеристики ЛА.

При реальных расчетах эта модель будет несколько сложнее за счет более подробного учета тех факторов, которые здесь приведены в упрощенном или неявном виде.

Рассмотренная выше методика представляет баллистическое обоснование реактивного движения ГЛА и позволит в дальнейшем провести согласование внешне- и внутривальностных характеристик ГЛА и ДУ, что поможет оптимально разработать предлагаемую конструкцию ГЛА.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Колготин О. В. Исследование реактивного движения для создания новых классов реактивных двигателей // Сб. научных трудов университет. семинара по системному анализу управления и обработке информации. Пенза: Пенз. гос. ун-т, 2001. 7 с.
2. Феодосьев В. И. Основы техники ракетного полета. М.: Наука, 1979. 496 с.
3. Колготин О. В. Механическая модель движения тела переменной массы в среде. Пенза: Пензенский центр научно-технической информации, 2000. 3 с.
4. Курзинер Р. И. Реактивные двигатели для больших сверхзвуковых скоростей полета. М.: Машиностроение, 1989. 264 с.

Поступила 21.07.2004 г.

УДК 519.6

С. Н. Савельев, Н. Г. Яговкин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМПЛЕКСА ПРОГРАММ РАЗВИТИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПРИНИМАЕМЫХ В НИХ РЕШЕНИЙ

Предлагается математическая модель для анализа комплекса программ развития отрасли (предприятия) на основе построения графа задач для выбора наиболее приоритетных программ по различным критериям.

Развитие любой отрасли невозможно без ее организационно-технического совершенствования, при этом необходимо решить ряд общих задач, таких, как совершенствование структуры, системы управления, внедрение новых информационных технологий в процессы производства и управления и т.д. в связи с изменяющимися внешними условиями. В условиях ограниченного финансирования создания системы одновременное выполнение всей требуемой совокупности программ практически невозможно. В связи с этим возникает необходимость определения совокупности приоритетных программ развития, выполнение которых на данном этапе позволит получить максимальный эффект при ограниченном объеме затрачиваемых средств.

С этой целью возникает необходимость в создании математической модели и основанной на ней методики по оценке программ развития и принимаемых в них решений, предназначенной для выработки оптимальной стратегии исследований в условиях ограниченных ресурсов (финансовых, временных и др.).

Необходимым шагом для оценки программ развития (далее — программ) является их ранжирование по различным критериям в зависимости от требований заказчика: важностному, важностно-стоимостному, важностно-временному и важностно-стоимостно-временному. Под ранжированием понимается присвоение элементам $a, b, c, d, \dots$ некоторого множества порядковых номеров 1, 2, 3, 4... в зависимости от убывания (возрастания) какого-либо количественного или качественного признака, при этом присваиваемый элементу порядковый номер называется рангом этого элемента.

При этом целесообразно рассматривать предметную область (отрасль, предприятие и т.п.) в целом как определенную систему. Представление ее (предметной области) возможно с использованием идеи альтернативно-графового подхода, состоящего в представлении сложного объекта (системы, процесса) в виде совокупности взаимосвязанных элементов различного уровня детализации. Указанный подход базируется на допущении о том, что закон функционирования сложной системы является композицией законов функционирования составляющих ее элементов и позволяет реализовать принципы последовательного синтеза допустимых вариантов построения отдельных элементов, частей и системы в целом с последующим выбором на синтезируемой модели наилучшего варианта ее структуры.

Для формального представления структуры системы используется понятие «функциональный элемент» z , $z \in Z$, которым называется входящий в одну из возможных структур проектируемого объекта типовой элемент a из множества A , каждому контакту которого присвоено обозначение связи s , $s \in S$, осуществляемой элементом a посредством заданного контакта в соответствии с законом его функционирования в составе рассматриваемой структуры. Каждый функциональный элемент характеризуется именем z , вектором параметров или характеристик $\bar{x} = \bar{x}(t)$, множеством входных α_z и выходных β_z связей, типом связей σ и отношением их согласования ρ .

В общем виде задача построения исходного описания структурной схемы системы (предметной области) как объекта заключается в определении И-ИЛИ графа

$$G(Z) = (Z, S, P), \quad (1)$$

где Z и S — множества элементов (вершин) и связей (дуг) графа; P — система правил или ограничений, определяющих какие структуры являются допустимыми (P объединяет тип связей σ (структуру) и отношения связей ρ между элементами z_i и z_j).

Кроме того, в формировании совокупности параметров $\bar{x}(t)$, характеризующих каждый элемент графа z_i в заданный момент времени t , и построении моделей алгоритмов их функционирования (переработки входной информации) $A(x_i(t), z_i)$, по результатам которых должны проводиться оценка эффективности функционирования системы, и принимаются решения по ранжированию программ на момент времени t . Параметр времени t задается из тех соображений, что в разные моменты времени приоритетность различных программ может меняться (например, в зависимости от изменения приоритетности задач предметной области, этапов завершения программ с получением промежуточных результатов и т.п.).

Чтобы обеспечить в рамках принятого методологического подхода требуемый анализ свойств системы, ее структуру целесообразно представить в виде следующего альтернативного И-ИЛИ графа (рис. 1).

Данный граф задает в иерархической системе типа «дерево» взаимосвязи множества задач различного ранга: предметной области (z_0), общих задач (z_1), частных задач (z_2) и подзадач (z_3). Его структура в общем виде выражается через пропозиционное предложение или «цепочку слов»: «в текущий момент времени t в предметной области z_0 для решения общей задачи z_1 и частной задачи z_2 проводится (планируется) решение подзадачи z_3 ». При этом вершинами графа являются элементы системы z , а дугами — взаимосвязи между элементами верхнего (j -го) и нижнего ($j+1$ -го) уровней S_{kl}^j . Элементам (дуги и вершины) графа $G(Z)$ приписываются коэффициенты их значимости или важности. В частности, дугам S_{kl}^j соединяющим z_k элемент j -го ранга с элементами z_l $j+1$ -го ранга могут ставиться в соответствие числа q_{kl}^j (веса),

$$0 \leq q_{kl}^j \leq 1, \quad \sum_{l=1}^{L_{j+1}} q_{kl}^j = 1,$$

которые характеризуют отношение значимости (вклада, важности) реше-

ния l -й задачи ($j+1$) ранга для достижения k -й задачи j -го ранга. На практике q_{kl}^j определяется исходя из значимости решения подзадач для решения конкретной задачи, что возможно оценить путем опроса экспертов. Элементы графа характеризуются важностью, а также стоимостными характеристиками и временем проведения, соответствующими данному элементу.

Р и с. 1. Структура системы в виде И-ИЛИ графа

При построении структуры системы целесообразно установить не только весовые коэффициенты q_{kl}^j значимости дуг, выходящих из вершин j -го ранга, но и коэффициенты v_k^j значимости элемента внутри каждого ранга. Вводится вектор весовых коэффициентов значимости элементов ранга

$$\bar{v}^j = (v_1^j, v_2^j, \dots, v_k^j, \dots, v_{L_j}^j), \quad (2)$$

так что $0 \leq v_k^j \leq 1, \sum_{k=1}^{L_j} v_k^j = 1$.

Компоненты вектора значимости элементов j -го ранга v_k^j будут равны весовым коэффициентам дуг $q_{kl}^{(j-1)}$, выходящих из вершин (элементов) ранга $j-1$,

$$v_k^j = q_{kl}^{(j-1)}, 1 \leq k \leq L_j \quad (3)$$

Автоматизация процесса исследования структуры системы (предметной области) требует кодирования ее исходного описания с использованием формальных правил. Для кодирования структурных свойств системы можно использовать списковые или логические формы.

Представление в виде *списковых* или *z-форм* базируется на использовании рассмотренного выше понятия функциональный элемент $z \in Z$ и его описания в виде $\beta_z = a(\alpha_z)$, где a — типовой элемент, α_z — входные, а β_z — выходные контакты функционального элемента z , соответствующего типовому элементу a . Вводятся также определения: проектируемой системы в виде функциональной пары $U_0 = \langle S_{BX}, S_{BbIX} \rangle$, где S_{BX} — множество входных, S_{BbIX} — множество выходных связей системы, причем $S_{BX} \subset S$, $S_{BbIX} \subset S$ и $S_{BX} \cap S_{BbIX} = \emptyset$; и функциональной пары элемента z , входящего в систему $U_z = \langle \beta_z, \alpha_z \rangle$.

В принятых обозначениях структура проектируемой системы представляется как композиция функциональных элементов:

$$C = z_1 z_2 \dots z_n = \langle G_c, U_c \rangle, \quad (4)$$

где $U_c = U_{z_1} U_{z_2} \dots U_{z_n}$ — композиция функциональных пар элементов $z_i, i = \overline{1, n}$; G_c — структура из элементов $a = \gamma_A(z)$, $z \in C$, соответствующая структуре композиции функциональных пар $U_{z_1} U_{z_2} \dots U_{z_n}$; $\{z\}$ — множество функциональных элементов, процедура формирования которых изложена выше.

Рассмотренное представление как самостоятельное практически не используется, оно является исходным для последующих логических форм, в частности булевой.

Булевой называется функция, принимающая значения на множестве $\{0, 1\}$ и определенная на множестве наборов булевых переменных, каждая из которых принимает значения также на множестве $\{0, 1\}$.

Принято считать все $z_i \in Z$ булевыми переменными: $z_i = 1$ тогда и только тогда, когда функциональный элемент z_i включен в состав некоторой структуры. Вводится в рассмотрение характеристическая булева функция $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ такая, что $f(z) = 1$ тогда и только тогда, когда z соответствует правильному варианту структуры, т.е.:

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) \leftrightarrow \{z_i \in Z \mid z_i = 1\} \in M, \quad (5)$$

где M — множество всевозможных правильных вариантов структуры.

Она является монотонной и может быть представлена в виде дизъюнкции $f(z) = \vee C_z$ всех простых импликант, называемой сокращенной дизъюнктивной нормальной формой (сокр. д. н. ф.).

Представление структуры с помощью сокр. д. н. ф. базируется на существующем изоморфизме между импликантами $f(z)$ и соответствующим (входящим в импликанту) набором элементов $z \in Z$, при котором конъюнкции булевых переменных $C_z = z_1, z_2, \dots, z_m$ соответствует операция композиции элементов $C_z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$. В соответствии с этим для импликант $f(z)$ и набором $c \in M$ в дальнейшем используется одно и то же обозначение, а именно $C_z = z_1, z_2, \dots, z_m$.

Характеристическая функция $f(z)$, представленная в виде сокр. д. н. ф., задает в явном виде все множество альтернативных вариантов структуры. Аналитическая запись этой формы осуществляется следующим образом. Для функциональной пары $\langle S_1, S_n \rangle$ в структурной схеме выбираются все цепи, соединяющие «полюса» S_1 и S_n . Каждой цепи сопоставляется конъюнкция букв — элементов структуры $z_1, z_2, \dots, z_m$, составляющая эту цепь.

Рассмотрим следующий пример, структура которого представлена на рис. 2. Здесь z_0 — предметная область, $z_1 - z_6$ — различные задачи предметной области.

Для данного примера сокр. д. н. ф.

$$f(z_0, z_1, \dots, z_6) = z_0 z_1 z_3 z_5 \vee z_0 z_2 z_4 z_6 \quad (6)$$

В правой части формулы каждая из двух простых импликант представляет собой один из возможных вариантов, по которому в данный момент времени проводится исследование.

В дальнейшем требуется создать способ преобразования характеристической функции $f(z)$, представленной в виде сокр. д. н. ф., в целевую функцию F , позволяющую выбрать наиболее предпочтительную (в зависимости от различных критериев) подзадачу, вносящую наибольший вклад в достижение цели функционирования системы.

Под вариантом структуры системы, представленной в виде графа $G(Z)$ (см. рис. 1), понимается конкретная подзадача z_3 , решаемая в интересах частной задачи z_2 и общей задачи z_1 в предметной области z_0 . Каждый конкретный вариант структуры оценивается набором показателей $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$. Набор показателей Y варианта структуры c зависит от набора параметров X_c элементов z , составляющих c . Как правило, для каждого показателя $Y_i (i = \overline{1, m})$, можно указать направление желательного изменения и допустимые пределы изменения.

Если желательно увеличение (уменьшение) показателя Y_i , то такой показатель называется максимизируемым (минимизируемым). Любой максимизируемый показатель $Y_i^+ \geq 0$ можно преобразовать в минимизируемый положительный, например, если взять $Y_i = Y_{i \max}^+ - Y_i^+$, где $Y_{i \max}^+$ — достаточно большое число, или $Y_i = 1/Y_i^+$. В дальнейшем будем считать, что все показатели максимизируемые и положительные.

Обычно в задачах проектирования вводят допустимые значения каждого показателя $Y_{i \text{ don}}$, причем $Y_i \leq \overline{Y_{i \text{ don}}}, i = \overline{1, m}$.

Р и с. 2. Структура системы в виде $G(Z)$ графа

Удобно ввести нормированные показатели $y_i = Y_i / Y_{i \text{ доп}}$. Тогда, поскольку $y_{i \text{ доп}} = 1$, ограничения технического задания на значения показателей можно записать в виде

$$y \in \Omega_y, \Omega_y = \{y \mid 0 \leq y_i \leq 1, i = \overline{1, m}\}. \quad (7)$$

Отношение предпочтения заказчика (проектировщика) на множестве Ω_y можно выразить с помощью целевой функции $F(y)$, которая должна удовлетворять основному требованию: если набор y' лучше набора y'' , то $F(y') < F(y'')$. В случае $F(y') = F(y'')$ наборы y' и y'' считаются равноценными. Таким образом, целевая функция позволяет создать совершенный квазипорядок на множестве допустимых вариантов проектируемого объекта.

Общую постановку задачи выбора оптимальной структуры можно разделить на две части. В первую часть входит целевая функция $F(y)$ совместно с множеством Ω_y , т. е. пара

$$\langle F(y) \rightarrow \min, y \in \Omega_y \rangle, \quad (8)$$

которая определяет отношение предпочтения для всех значений y , поскольку $y' \in \Omega_y$ заведомо предпочтительней $y'' \notin \Omega_y$.

Во второй части общей постановки должно быть задано множество альтернативных вариантов структуры объекта (системы), причем для каждого варианта $c \in M$ должны быть определены:

1) функциональные зависимости

$$y = f_c(X_c), \quad (9)$$

где X_c — вектор параметров элементов, составляющих структуру c ;

2) ограничения на X_c , вытекающие из физических или других объективных законов и определяющие область Ω_c допустимых значений X_c , т. е.

$$X_c \in \Omega_c. \quad (10)$$

Для каждого варианта структуры совокупность данных формул можно рассматривать как задачу отыскания вектора X_c^* , доставляющего экстремальное значение целевой функции $F(f_c(X_c))$:

$$F(f_c(X_c^*)) = \min_{X_c} F(f_c(X_c)), F(f_c(X_c)) \in \Omega_y, X_c \in \Omega_c. \quad (11)$$

Тогда задачу оптимизации структуры можно сформулировать как задачу отыскания подмножества M^* множества M :

$$M^* = \left\{ c^* \mid \min_c F(f_c(X_c^*)) = F(f_{c^*}(X_{c^*}^*)); c, c^* \in M \right\}. \quad (12)$$

Таким образом, задача оптимизации структуры состоит в том, чтобы для каждого варианта структуры $c \in M$ определить и зафиксировать оптимальное значение набора параметров X_c^* , а затем выбрать вариант структуры с наименьшим значением целевой функции.

Основываясь на приведенном выше математическом аппарате, ранжирование программ проводится в следующем порядке. Сначала определяется предметная область проводимых программ z_0 . Данная предметная область является верхним узлом графа (ранг графа $j = 0$), значимость этого элемента $v_0 = 1$. Далее определяется набор K общих задач z_k , необходимых для решения в рамках данной предметной области. Общие задачи являются узлами графа ранга $j = 1$ и имеют коэффициенты значимости v_k , совпадающие с коэффициентами значимости связанных дуг между элементами нулевого и первого рангов. Далее аналогичным образом определяется ряд L_k частных задач (подзадач), необходимых для решения каждой k -ой общей задачи z_k . Частные задачи являются узлами графа ранга $j = 2$ и имеют коэффициенты значимости v_{kl} , совпадающие с коэффициентами значимости связанных дуг между элементами первого и второго рангов. Далее проводится выделение M проводимых программ по конкретным решаемым в них l_k -ым частным задачам, в результате чего все программы будут являться узлами графа z_{klm} ранга $j = 3$ с весовыми коэффициентами v_{klm} , совпадающими с коэффициентами значимости связанных дуг между элементами второго и третьего рангов.

В результате получается граф системы (предметной области) в виде, представленном на рис. 3.

Каждый из элементов z системы имеет набор характеризующих его параметров X , при этом все эти элементы можно разбить на две группы:

элементы, имеющие один параметр — важность (такие элементы как предметная область, общие задачи, частные задачи (подзадачи));

элементы (конкретные программы), имеющие три параметра — важность, стоимость и время проведения программы.

При этом на такие параметры программы как стоимость и время выполнения накладываются ограничения.

Таким образом, наименования показателей системы и параметров элементов системы совпадают, т. е. показатели и параметры являются одноименными, причем важность является мультипликативным показателем, а стоимость и время выполнения — аддитивными показателями.

Под вариантом $c = z_{klm}$ структуры системы, представленной в виде графа $G(Z)$, понимается конкретная программа m , выполняемая в интересах частной задачи l и общей задачи k в предметной области z_0 . Под правильными (рациональными) вариантами структуры системы понимаются те программы, параметры стоимости и времени выполнения которых не превышают допустимых, заданных заказчиком. Под оптимальным вариантом структуры системы (предметной области) понимается конкретная программа из числа рациональных, «лучшая» среди других по заданному заказчиком критерию.

Для рациональных вариантов структуры (таких программ, характеристики которых по стоимости и по времени выполнения не превышают предельно допустимые) вычисляются:

1) нормированные максимизированные показатели, характеризующие важности вариантов структуры системы c^* , т.е. фактически величины, отражающая значимость рассматриваемых рациональных m -ых программ (c^* -ых вариантов структуры системы) для всей системы (предметной области) в целом:

$$y^{важ}(c^*) = f(c^*) = v_{klm} v_{kl} v_k v_0, \quad (13)$$

причем запись в виде (13) предполагает, что конкретная программа предназначена для решения одной частной задачи (подзадачи). В случае если одной программой решается несколько частных задач, показатели важности рассчитываются отдельно для каждой импликант, в которых присутствует данная программа, а затем эти показатели суммируются;

2) нормированные максимизированные показатели, характеризующие стоимость рациональных вариантов структуры системы c^* :

$$y^{cm}(c^*) = \frac{C_{\max} - C_{c^*}}{C_{\max}}, \quad (14)$$

3) нормированные максимизированные показатели, характеризующие время проведения рациональных вариантов структуры системы c^* :

$$y^{ep}(c^*) = \frac{T_{\max} - T_{c^*}}{T_{\max}}, \quad (15)$$

где C_{c^*} — стоимость рационального варианта структуры системы (измеряется в тыс. руб., \$ и т. п.); $C_{\max}$ — максимально возможная стоимость программы; T_{c^*} — время проведения программы, соответствующее рациональному варианту структуры системы (измеряется в сутках, человеко-часах и т.п.); $T_{\max}$ — максимально возможное время проведения программы.

Р и с. 3. Граф системы (предметной области)

Перед вычислением показателей $y^{важ}(c)$, $y^{cm}(c)$ и $y^{ep}(c)$, характеризующих важность, стоимость и время разработки c -го варианта структуры системы, необходимо выделить из всего возможного набора вариантов системы C множество M рациональных (правильных) вариантов $c^* \in M$, т. е. такие программы, характеристики которых по стоимости x_{CT} и по времени выполнения x_{BP} не превышают предельно допустимые значения $C_{\max}$ и $T_{\max}$.

Так как данные показатели вычисляются для рациональных вариантов структуры системы c^* , они удовлетворяют условию $y \in \Omega_y$, где $\Omega_y = \{y | 0 \leq y \leq 1\}$ является областью допустимых значений y .

Целевая функция для заданной в формулах совокупности показателей может задаваться следующим выражением:

$$F(y) = K_{важ} y^{важ} + K_{cm} y^{cm} + K_{ep} y^{ep}, \quad (16)$$

где $K_{важ}$ — вес показателя $y^{важ}$; K_{cm} — вес показателя y^{cm} ; K_{ep} — вес показателя y^{ep} ; $K_{важ} + K_{cm} + K_{ep} = 1$.

Значение величин $K_{важ}$, $K_{ст}$ и $K_{вр}$ задаются экспертным путем и определяют, что предпочтительнее при данной оценке программы: минимизация затрачиваемых средств или минимизация времени (достижение желаемого эффекта как можно быстрее).

Данное представление целевой функции позволяет оценить один конкретный вариант системы. Для оценки всей системы (ранжирования программ) используется представление системы в виде сокр. д. н. ф, при этом операция дизъюнкции заменяется взятием максимума, а каждая из простых импликант – значением функции $F(y)$. Таким образом

$$F(c^*) = \max_{c^* \in M} (K_{важ} y^{важ}(c^*) + K_{ст} y^{ст}(c^*) + K_{вр} y^{вр}(c^*)), \quad (17)$$

где M — множество всевозможных рациональных (правильных) вариантов структуры; c^* — рациональный (правильный) вариант структуры.

При анализе программ возможны три предельных случая:

$K_{ст} = 0$ — оценка производится без учета стоимостных характеристик;

$K_{вр} = 0$ — оценка производится без учета временных характеристик;

$K_{важ} = 1, K_{вр} = 0, K_{ст} = 0$ — оценка производится только по важности ИС.

Рассмотренная выше методика позволяет ранжировать различные программы развития по следующим критериям:

- важность;
- важность-стоимость;
- важность-время;
- комбинированный (важность-стоимость-время).

Кроме того, по заданию заказчика возможно введение дополнительных показателей и критериев. Например, одним из дополнительных показателей может стать $y^{вып}(c^*) = 1 - \frac{t_c^*}{T_c^*}$, характеризующий текущую (по времени) степень выполнения программы и позволяющий исключить из рассмотрения работы, близящиеся к завершению, где t_c^* — время, в течение которого работа уже выполняется; T_c^* — запланированное время выполнения программы.

В данной модели рассмотрено разбиение предметной области на три уровня детализации (по общим задачам, частным задачам и конкретным программам). Однако предложенный математический аппарат позволяет произвести разбиение предметной области на большее (меньшее) число уровней, а также производить ранжирование программ по ряду предметных областей (в этом случае верхним узлом графа будет предметная область высшего уровня).