Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. А. Балкизов, Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа третьего порядка с оператором Трикоми в гиперболической части, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 21–28

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu391>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 02:48:05

УДК 517.946

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ ТРИКОМИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТИ

Ж.А. БалкизовКабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-mail: eleev@yandex.ru

Доказывается существование и единственность решения локальной краевой задачи для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками. Единственность решения задачи устанавливается методом интегралов энергии, а существование — методом эквивалентной редукции к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с помощью функции Грина.

Ключевые слова: локальная краевая задача, нелокальная краевая задача, уравнение смешанного типа, функция Грина, интегральное уравнение Фредгольма.

Рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y + \sum_{k=0}^2 a_k(x, y) \frac{\partial^k u}{\partial x^k}, & \text{при } y > 0, \\ yu_{xx} + u_{yy}, & \text{при } y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной при $y > 0$ отрезками AA_0 , A_0B_0 , B_0B прямых $x = 0$, $y = h$, $x = 1$ соответственно и двумя характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad \text{и} \quad BC : x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 1$$

уравнения (1) при $y < 0$, выходящими из точек $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$ соответственно и пересекающимися в точке $C(\frac{1}{2}, -\sqrt[3]{\frac{9}{16}})$; $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Регулярным решением уравнения (1) назовём всякую функцию $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup AA_0) \cap C^2(\Omega) \cap C_{x,y}^{(3,1)}(\Omega_1)$, обращающую уравнение (1) в тождество.

ЗАДАЧА 1. Требуется определить функцию $u = u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1) в области Ω ;
- 2) $u_x(x, y) \in C(\Omega_1 \cup AA_0)$;
- 3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h; \quad (2)$$

$$u|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Балкизов Жираслан Анатольевич — старший преподаватель кафедры теории функции и функционального анализа Кабардино-Балкарского государственного университета.

ЗАДАЧА 2. Требуется определить функцию $u = u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1) в области Ω ;
- 2) $u_x(x, y) \in C(\Omega_1 \cup B_0 B)$;
- 3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \\ u_x(0, y) - u_x(1, y) &= \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h; \end{aligned} \quad (4)$$

$$u \Big|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \quad (5)$$

ЗАДАЧА 3. Требуется определить функцию $u = u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1) в области Ω ;
- 2) $u_x(x, y) \in C(\Omega_1 \cup B_0 B)$;
- 3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \varphi_1(y), \quad u_x(1, y) = \varphi_2(y), \\ u_{xx}(1, y) - \beta(y)u(1, y) &= \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h; \end{aligned} \quad (6)$$

$$u \Big|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \quad (7)$$

ЗАДАЧА 4. Требуется определить функцию $u = u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1) в области Ω при $y \neq 0$;
- 2) $u_x(x, y), u_{xx}(x, y) \in C(\overline{\Omega}_1)$;
- 3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\alpha_k(y) \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Big|_{x=0} + \beta_k(y) \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \Big|_{x=1} = \varphi_k(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad k = 0, 1, 2; \quad (8)$$

$$u \Big|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \quad (9)$$

В задачах 1–4 предполагается, что $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y), \psi(x)$ — известные функции, причём выполнены условия согласования.

Отметим, что исследование спектра локальных и нелокальных краевых задач для вырождающихся эллиптических и гиперболических уравнений второго порядка было выполнено в работах [1–4]. В работе [5] была подобным методом исследована нелокальная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа второго порядка.

ТЕОРЕМА 1. Если коэффициенты уравнения (1) обладают свойствами

$$\begin{aligned} a_2(x, y) &\in C_x^2(\overline{\Omega}_1), \quad a_1(x, y) \in C_x^1(\overline{\Omega}_1), \quad a_0(x, y) \in C(\overline{\Omega}_1), \\ a_2(x, y) &\geq 0, \quad a_2''(x, 0) - a_1'(x, 0) + 2a_0(x, 0) < 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega_1, \end{aligned}$$

то существует единственное решение задач 1–2.

Доказательство. Доказательство проведём для задачи 1. Сначала докажем единственность решения задачи (1)–(3). Обозначим $u(x, 0) = \tau(x)$,

$u_y(x, 0) = \nu(x)$. В уравнении (1) в области Ω_1 перейдём к пределу при $y \rightarrow 0+$. С учётом граничных условий (2) получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесённое из параболической части ($y > 0$) на прямую $y = 0$:

$$\tau'''(x) + a_2(x, 0)\tau''(x) + a_1(x, 0)\tau'(x) + a_0(x, 0)\tau(x) = \nu(x), \quad (10)$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(1) = \varphi_2(0), \quad \tau'(0) = \varphi_3(0). \quad (11)$$

Для того чтобы получить функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесённое из гиперболической части ($y < 0$) на прямую $y = 0$, выпишем решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω_2 [6]:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma^2(\frac{1}{6})} \int_0^1 \tau \left[x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1) \right] t^{-\frac{5}{6}}(1-t)^{-\frac{5}{6}} dt + \\ & + \frac{\Gamma(\frac{5}{3})}{\Gamma^2(\frac{5}{6})} \int_0^1 \nu \left[x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}(2t-1) \right] t^{-\frac{1}{6}}(1-t)^{-\frac{1}{6}} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Приравнявая выражение (12) на характеристике AC к функции $\psi(x)$ и применяя известную формулу обращения интегрального уравнения Абеля, получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесённое из гиперболической области Ω_2 на линию $y = 0$, в виде:

$$\nu(x) = \bar{\psi}(x) + \gamma_1 D_{0x}^{\frac{2}{3}} \tau(x), \quad (13)$$

где

$$D_{0x}^\alpha \varphi(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\alpha} \right)$$

— оператор дробного дифференцирования Римана—Лиувилля порядка α ($0 < \alpha < 1$); $\gamma_1 = \frac{2\pi}{\sqrt[6]{3}\Gamma^4(\frac{1}{3})}$, $\bar{\psi}(x) = -\frac{x^{\frac{1}{6}}\Gamma(\frac{2}{3})\gamma_1}{\sqrt[3]{4}\sqrt{\pi}} D_{0x}^{\frac{5}{6}} \psi(\frac{x}{2})$.

Исключая из (10) и (13) неизвестную функцию $\nu(x)$ и учитывая граничные условия (2), получим краевую задачу для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка:

$$\tau'''(x) + a_2(x, 0)\tau''(x) + a_1(x, 0)\tau'(x) + a_0(x, 0)\tau(x) = \bar{\psi}(x) + \gamma_1 D_{0x}^{\frac{2}{3}} \tau(x), \quad (14)$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(1) = \varphi_2(0), \quad \tau'(0) = \varphi_3(0), \quad (15)$$

Пусть $\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = \varphi_3(y) = \psi(x) = 0$. Рассмотрим интеграл $I^* = \int_0^1 \tau(x)\nu(x) dx$. В области Ω_1 с учётом (10) имеем:

$$\begin{aligned} I^* = \int_0^1 \tau(x)\nu(x) dx = & \int_0^1 \tau(x)\tau'''(x) dx + \int_0^1 a_2(x, 0)\tau(x)\tau''(x) dx + \\ & + \int_0^1 a_1(x, 0)\tau(x)\tau'(x) dx + \int_0^1 a_0(x, 0)\tau^2(x) dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя формулу интегрирования по частям и учитывая однородные краевые условия, из равенства (16) получим, что

$$I^* = -\frac{1}{2} [\tau'(1)]^2 + \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (a_2''(x, 0) - a_1'(x, 0)) + a_0(x, 0) \right] \tau^2(x) dx - \int_0^1 a_2(x, 0) [\tau'(x)]^2 dx. \quad (17)$$

Очевидно, что если выполнены условия теоремы, то, как следует из (17), будем иметь неравенство $I^* \leq 0$.

Подставляя $\nu(x)$ из выражения (13) в интеграл I^* , будем иметь:

$$I^* = \int_0^1 \tau(x) \nu(x) dx = \gamma_1 \int_0^1 \tau(x) D_{0x}^{\frac{2}{3}} \tau(x) dx = \gamma_1 \left(D_{0x}^{\frac{2}{3}} \tau(x), \tau(x) \right).$$

Положительная определённость выражения $\left(D_{0x}^{\frac{2}{3}} \tau(x), \tau(x) \right)$ доказана в работе [7, с. 54], т.е. в области Ω_2 имеем неравенство $I^* \geq 0$. Таким образом, $I^* = 0$, а $\left(D_{0x}^{\frac{2}{3}} \tau(x), \tau(x) \right) = 0$ тогда и только тогда, когда $\tau(x) \equiv 0$. Это ясно и из того факта, что все слагаемые, стоящие справа в выражении (17), отрицательные, а потому $\tau(x) \equiv 0$. При этом из (10) и (13) получаем, что и $\nu(x) = 0$.

Далее, предполагая существование регулярного решения, умножим уравнение (1) при $y > 0$ скалярно на функцию $u(x, y)$ и получим

$$(u_{xxx}, u) + (a_2(x, y)u_{xx}, u) + (a_1(x, y)u_x, u) + (a_0(x, y)u, u) - (u_y, u) = 0, \quad (18)$$

где $(u, v) = \int_0^1 u(x, y)v(x, y) dx$, а $(u, u) = \|u\|^2$.

Считая краевые условия (2) однородными, отдельные слагаемые, входящие в равенство (18), можем записать так:

$$\begin{aligned} (u_{xxx}, u) &= uu_{xx} \Big|_0^1 - \int_0^1 u_{xx}u_x dx = -\frac{1}{2}u_x^2 \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}u_x^2(1, y); \\ (a_2(x, y)u_{xx}, u) &= \int_0^1 a_2(x, y)(uu_x)_x dx - \int_0^1 a_2(x, y)u_x^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 a_{2xx}(x, y)u^2 dx - \int_0^1 a_2(x, y)u_x^2 dx; \\ (a_1(x, y)u_x, u) &= \int_0^1 a_1(x, y)d\left(\frac{1}{2}u^2\right) = -\frac{1}{2} \int_0^1 a_{1x}(x, y)u^2 dx; \\ (u_y, u) &= \int_0^1 u_y u dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^1 u^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \|u\|^2. \end{aligned}$$

С учётом последних равенств выражение (18) перепишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \|u\|^2 + 2 \int_0^1 a_2(x, y)u_x^2 dx + u_x^2(1, y) = \int_0^1 (a_{2xx} - a_{1x} + 2a_0)u^2 dx. \quad (19)$$

Интегрируя равенство (19) по переменной y в пределах $(0, y)$, получим

$$\begin{aligned} \|u\|^2 + 2 \int_0^y \left(\int_0^1 a_2(x, y) u_x^2 dx \right) dy + \int_0^y u_x^2(1, y) dy = \\ = \int_0^y \left(\int_0^1 (a_{2xx} - a_{1x} + 2a_0) u^2 dx \right) dy + \|\tau(x)\|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

В силу условий, наложенных на коэффициенты $a_0(x, y)$, $a_1(x, y)$, $a_2(x, y)$, выражение $|a_{2xx} - a_{1x} + 2a_0|$ будет ограничено некоторым числом M_1 . Тогда из (20) имеем

$$\|u\|^2 \leq M_1 \int_0^y \|u\|^2 dy + \|\tau(x)\|^2.$$

Применяя к последнему неравенству лемму 1.1 из [8], окончательно получаем оценку

$$\|u\|^2 \leq M \|\tau(x)\|^2,$$

где M — некоторая известная постоянная, зависящая от M_1 . Из полученной оценки, в частности, вытекает единственность решения поставленной задачи.

Перейдём к доказательству существования решения. Рассмотрим сначала случай, когда коэффициенты уравнения (14) являются постоянными действительными числами, т. е. $a_2(x, 0) = a_2 = \text{const}$; $a_1(x, 0) = a_1 = \text{const}$; $a_0(x, 0) = a_0 = \text{const}$. Задачу (14)–(15) будем решать методом функции Грина. Характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению (14), можно записать в виде

$$k^3 + a_2 k^2 + (a_1 - 1)k + a_0 = 0. \quad (21)$$

С помощью замены $k = y - \frac{1}{3}a_2$ уравнение (21) приводится к виду

$$y^3 + py + q = 0, \quad (22)$$

где $p = \frac{1}{3}a_2^3 + a_1 - 1$; $q = \frac{2}{27}a_2^3 + \frac{1}{3}a_2(1 - a_1)$.

В зависимости от знака дискриминанта $D = 27q^2 + 4p^3$ возможны три случая: $D < 0$, $D = 0$ и $D > 0$.

Рассмотрим первый случай, когда $D < 0$. В этом случае характеристическое уравнение (22) имеет три различных действительных корня [9]:

$$y_i = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi + 2\pi i}{3}\right), \quad i = 0, 1, 2,$$

где $\cos \varphi = -\frac{1}{2}qr$, $\sin \varphi > 0$, $r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$. Тогда общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (14), можно записать в виде $\tau(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + c_3 e^{k_3 x}$, где $k_i = y_i - \frac{1}{3}a_2$ ($i = 0, 1, 2$).

Поэтому функцию Грина будем искать в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1 e^{k_1 x} + a_2 e^{k_2 x} + a_3 e^{k_3 x}, & 0 \leq x < \xi, \\ b_1 e^{k_1 x} + b_2 e^{k_2 x} + b_3 e^{k_3 x}, & \xi < x \leq 1, \end{cases} \quad (23)$$

где a_j, b_j ($j = 1, 2, 3$) — пока неопределённые коэффициенты.

Пользуясь определением функции Грина, для вычисления значений коэффициентов a_j , b_j приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (b_1 - a_1)e^{k_1\xi} + (b_2 - a_2)e^{k_2\xi} + (b_3 - a_3)e^{k_3\xi} = 0, \\ k_1(b_1 - a_1)e^{k_1\xi} + k_2(b_2 - a_2)e^{k_2\xi} + k_3(b_3 - a_3)e^{k_3\xi} = 0, \\ k_1^2(b_1 - a_1)e^{k_1\xi} + k_2^2(b_2 - a_2)e^{k_2\xi} + k_3^2(b_3 - a_3)e^{k_3\xi} = 1, \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3 = 0, \\ b_1e^{k_1} + b_2e^{k_2} + b_3e^{k_3} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Решая систему (24), найдём значения неизвестных a_j , b_j . Подставляя найденные значения a_j , b_j в (23), найдём явный вид функции Грина:

$$G_1(x, \xi) = \begin{cases} \frac{L_1(1, \xi)L_1(x, 0)}{\Delta_1 L_1(1, 0)}, & 0 \leq x < \xi, \\ \frac{L_1(1, \xi)L_1(x, 0) - L_1(x, \xi)L_1(1, 0)}{\Delta_1 L_1(1, 0)}, & \xi < x \leq 1, \end{cases}$$

где $L_1(x, \xi) = (k_2 - k_3)e^{k_1(x-\xi)} + (k_3 - k_1)e^{k_2(x-\xi)} + (k_1 - k_2)e^{k_3(x-\xi)}$; $\Delta_1 = (k_3 - k_2)(k_3 - k_1)(k_2 - k_1) \neq 0$, так как корни k_1 , k_2 , k_3 — различные.

Анализируя два оставшихся случая, аналогично строим соответствующие функции Грина. При $D = 0$ она имеет вид

$$G_2(x, \xi) = \begin{cases} \frac{L_2(1, \xi)L_2(x, 0)}{\Delta_2 L_2(1, 0)}, & 0 \leq x < \xi, \\ \frac{L_2(1, \xi)L_2(x, 0) - L_2(x, \xi)L_2(1, 0)}{\Delta_2 L_2(1, 0)}, & \xi < x \leq 1, \end{cases}$$

где $L_2(x, \xi) = e^{k_1(x-\xi)} + ((k_2 - k_1)(x - \xi) - 1)e^{k_2(x-\xi)}$, $\Delta_2 = (k_2 - k_1)^2 \neq 0$; а в случае $D > 0$ —

$$G_3(x, \xi) = \begin{cases} \frac{L_3(1, \xi)L_3(x, 0)}{\Delta_3 L_3(1, 0)}, & 0 \leq x < \xi, \\ \frac{L_3(1, \xi)L_3(x, 0) - L_3(x, \xi)L_3(1, 0)}{\Delta_3 L_3(1, 0)}, & \xi < x \leq 1, \end{cases}$$

где $L_3(x, \xi) = \gamma e^{k_1(x-\xi)} - \left(3k_1 \sin \gamma \frac{x-\xi}{2} + \gamma \cos \gamma(x-\xi)\right) e^{-k_1(x-\xi)/2}$, $\Delta_3 = 9\gamma \times (k_1^2 - \gamma^2) \neq 0$.

Итак, функции Грина построены для всевозможных расположений корней характеристического уравнения (21). Тогда решение задачи (14)–(15) эквивалентно редуцируется к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\tau(x) = \int_0^1 L(x, \xi)\tau(\xi) d\xi + F(x), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} L(x, \xi) &= \gamma_1 \int_{\xi}^1 G_i(x, s) D_{0s}^{\frac{2}{3}} \tau(s) ds; \\ F(x) &= f(x) + \int_0^1 G_i(x, \xi) f(\xi) d\xi; \\ f(x) &= \bar{\psi}(x) + (\varphi_2(0) - \varphi_1(0) - \varphi_3(0)) (2a_2 + 2a_1x + a_0x^2) + \\ &\quad + (a_1 + a_0x) \varphi_3(0) + \varphi_1(0) a_0. \end{aligned}$$

В случае когда коэффициенты $a_i(x, y)$ ($i = 0, 1, 2$) не являются постоянными числами, после трёхкратного интегрирования уравнения (14) в пределах $(0, x)$, с учётом краевых условий (15), опять приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$\tau(x) = \int_0^1 K(x, \xi) \tau(\xi) d\xi + F_1(x), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} K(x, \xi) &= \begin{cases} -x^2 N(1, \xi), & 0 \leq x < \xi, \\ N(x, \xi) - x^2 N(1, \xi), & \xi < x \leq 1; \end{cases} \\ F_1(x) &= g(x) + \varphi_2(0)x^2 - g(1)x^2; \\ N(x, \xi) &= a_2(\xi, 0) + (x - \xi) [a_1(\xi, 0) - 2a'_2(\xi, 0)] + \\ &\quad + (x - \xi)^2 \frac{1}{2} [a''_2(\xi, 0) - a'_1(\xi, 0) + a_0(\xi, 0)] + \frac{9\sqrt{3}}{8\pi\gamma} (x - \xi)^{\frac{4}{3}}; \\ g(x) &= \left(x + a_2(0, 0) \frac{x^2}{2} \right) \varphi_3(0) + \left[1 + a_2(0, 0)x + \left(a_1(0, 0) - a'_2(0, 0) \right) \frac{x^2}{2} \right] \varphi_1(0). \end{aligned}$$

Безусловная разрешимость интегральных уравнений (25) и (26) следует из единственности решения задачи. По найденному значению $\tau(x)$ можно найти и $\nu(x)$ из формул (10) или (19). Тогда решение задачи (1)–(3) в области Ω_2 определяется по формуле (18) как решение задачи Коши, а в области Ω_1 приходим к задаче (1)–(2) и $u(x, 0) = \tau(x)$, исследованной в работе [10]. Теорема 1 доказана. $\square$

Аналогичным методом устанавливается справедливость следующих теорем.

ТЕОРЕМА 2. Если коэффициенты $a_k(x, y)$ ($k = 0, 1, 2$) и $\beta(y)$ таковы, что

$$a_2(x, y) \in C_x^2(\bar{\Omega}_1), \quad a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{\Omega}_1), \quad a_0(x, y) \in C(\bar{\Omega}_1),$$

$$a_1(0, y) \leq 0, \quad a_2(x, y) \geq 0, \quad a_{0xx}(x, y) > 0,$$

$$\beta^2(y) + a_{0x}(1, y) \leq 0, \quad 2a_0(x, y) + a_{1x}(x, y) \leq 0,$$

и при этом $\varphi_j(y) \in C^2[0, 1]$ ($j = 1, 2, 3$), то существует единственное решение задачи 3.

ТЕОРЕМА 3. Если коэффициенты $a_k(x, y)$, $\alpha_k(y)$, $\beta_k(y)$ ($k = 0, 1, 2$) таковы, что

$$a_0(x, y), \quad a_{1x}(x, y), \quad a_{2xx}(x, y) \in C(\bar{\Omega}_1);$$

$$a_2''(x, 0) - a_1'(x, 0) + 2a_0(x, 0) \leq 0, \quad a_2(x, y) \geq 0, \quad \alpha_0(y)\alpha_2(y) = \beta_0(y)\beta_2(y),$$

$$\alpha_0^2(y)a_1(1, y) \leq \beta_0^2(y)a_1(0, y), \quad \beta_1^2(y) < \alpha_1^2(y), \quad \alpha_0(y)\alpha_1(y)\beta_2(y) \neq 0,$$

и при этом $\varphi_j(y) \in C^2[0, 1]$ ($j = 1, 2, 3$), то задача 4 имеет единственное решение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лернер, М. Е. О задачах типа задачи Франкля для некоторых эллиптических уравнений с вырождением разного рода [Текст] / М. Е. Лернер, О. А. Репин // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 8. — С. 1087–1093.
2. Лернер, М. Е. Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа [Текст] / М. Е. Лернер, О. А. Репин // Сиб. матем. журн. — 1999. — Т. 40, № 6. — С. 1260–1275.
3. Сабитов, К. Б. Об однозначной разрешимости нелокальной задачи для вырождающегося эллиптического уравнения спектральным методом [Текст] / К. Б. Сабитов, О. Г. Сидоренко / Тр. Международн. научн. конф. — Стерлитамак, 2003. — Т. 1. — С. 213–219.
4. Сабитов, К. Б. Нелокальная задача для вырождающегося гиперболического уравнения [Текст] / К. Б. Сабитов, О. Г. Сидоренко / Тр. Всерос. научн. конф. — Стерлитамак, 2004. — Т. 1. — С. 80–86.
5. Рахманова, Л. Х. Решение нелокальной задачи спектральным методом для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области [Текст] / Л. Х. Рахманова // Изв. вузов. Матем. — 2007. — 11. — С. 36–40.
6. Трикоми, Ф. Лекции по уравнениям с частными производными [Текст] / Ф. Трикоми. — М.: ИЛ, 1957. — 443 с.
7. Нахушев, А. М. Элементы дробного исчисления и их применение [Текст] / А. М. Нахушев. — Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. — 298 с.
8. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики [Текст] / О. А. Ладыженская. — М.: Наука, 1973. — 498 с.
9. Фаддеев, Д. К. Лекции по алгебре [Текст] / Д. К. Фаддеев. — СПб.: Лань, 2002. — 416 с. — ISBN 5-8114-0447-6.
10. Иргашев, Ю. Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками [Текст] / Ю. Иргашев / В сб.: Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения. — Ташкент: Фан, 1976. — С. 17–27.

Поступила в редакцию 1/VII/2008;
в окончательном варианте — 15/VII/2008.

MSC: 35M10, 65N99

LOCAL AND NONLOCAL VALUE BOUNDARY PROBLEMS FOR A THIRD-ORDER MIXED-TYPE EQUATION EQUIPPED WITH TRICOMI OPERATOR IN ITS HYPERBOLIC PART

Z. A. Balkizov

H. M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University,
360004, Nal'chik, Chernyshevskogo str., 173
E-mail: eleev@yandex.ru

The existence and uniqueness of local and nonlocal value boundary problems for third-order mixed-type equations with multiple characteristics is proved. Uniqueness of the problem solution is proved with energy-integral method. The existence of the solution is proved with equivalent reduction method to Fredholm integral equations of the second kind with the help of Green's function.

Key words: local value boundary problem, nonlocal value boundary problem, mixed-type equations, Green's function, Fredholm integral equation.

Original article submitted 1/VII/2008;
revision submitted 15/VII/2008.

Balkizov Zhiraslan Anatolievich, Senior Lecturer, Dept. of the Theory of Functions and Functional Analysis of Kabardino-Balkarian State University.