Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский, Установившаяся ползучесть слоисто-волокнуистых изгибаемых металлокомпозитных пластин, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 66–76

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu392>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:50:06

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376

УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ СЛОИСТО-ВОЛОКНИСТЫХ ИЗГИБАЕМЫХ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090, г. Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

E-mails: nemirov@itam.nsc.ru, shulgin@itam.nsc.ru

Сформулирована задача поперечного изгиба кирхгофовских слоистых пластин переменной толщины, армированных волокнами постоянного поперечного сечения и работающих в условиях установившейся ползучести всех фаз композиции. Проанализирована система разрешающих уравнений и соответствующие ей граничные условия. Разработан метод решения поставленной задачи. Проведены конкретные расчёты, показавшие, что скорость прогиба установившейся ползучести пластин существенно зависит от способа их закрепления, структуры армирования и разнесения несущих слоев, распределения толщины конструкции и её слоев. Указан путь приближенного решения таких задач в условиях установившейся ползучести.

Ключевые слова: установившаяся ползучесть, слоистые пластины, поперечный изгиб, сложное армирование.

Вопросу изгиба анизотропных и армированных слоистых пластин посвящены многие исследования, например [1–4 и др.]. Существенной особенностью этих исследований является то, что в них рассматривается лишь упругий или упругопластический изгиб без учёта явления ползучести. Однако известно [5], что при длительной эксплуатации изделий в случае статического нагружения подавляющую часть времени металлокомпозитная конструкция работает в условиях установившейся ползучести, поэтому актуальной является проблема расчёта тонкостенных конструкций при установившейся ползучести всех фаз композиции. Изучению этого вопроса применительно к сложно армированным слоистым пластинам, нагруженным в поперечном направлении, посвящено настоящее исследование.

Рассмотрим поперечный изгиб кирхгофовой пластины (допустимость гипотез Кирхгофа при расчёте установившейся ползучести тонких изгибаемых пластин обоснована в [5]) переменной толщины $2h$, состоящей из нечётного числа армированных слоев, расположенных симметрично относительно среднего слоя: именно, к среднему слою с обеих сторон примыкают два слоя

*Немировский Юрий Владимирович — главный научный сотрудник лаборатории «Физика быстротекущих процессов» ИТПМ СО РАН, д.ф.-м.н., профессор, академик Академии транспорта РФ; профессор кафедры «Строительная механика» Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (НГАСУ—СибСТРИН).
Янковский Андрей Петрович — старший научный сотрудник лаборатории «Физика быстротекущих процессов» ИТПМ СО РАН, д.ф.-м.н.*

одинаковой толщины и с одинаковыми структурами армирования и фазовыми материалами; к внешним поверхностям этих слоев примыкают ещё два одинаковых слоя и т. д. Предполагается: к рассматриваемому моменту времени деформации ползучести получили настолько значительное развитие, что по сравнению с ними можно пренебречь начальными упругими и пластическими деформациями [5]; по толщине каждый слой имеет регулярную и квазиоднородную структуру; на границах слоев выполняется идеальный механический контакт; прогибы считаются малыми.

Пластина рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат x_1x_2z ; плоскость x_1x_2 совмещена со срединной плоскостью центрального слоя (она же срединная плоскость пластины) до изгиба, а ось z перпендикулярна этой плоскости. Средний слой будем называть «нулевым»; выше него ($z > 0$) последовательно располагаются слои с номерами $m = 1, 2, \dots, M$; ниже ($z < 0$) — слои с номерами $m = M + 1, M + 2, \dots, 2M$ (всего $2M + 1$ слоев, причём M -тый слой является верхним, а $2M$ -тый слой — нижним). Каждый m -тый слой армирован $N^{(m)}$ семействами волокон (металлических проволок, возможно, различной физической природы), которые уложены в плоскостях, параллельных плоскости x_1x_2 (плоское армирование), или на поверхностях, расстояния между которыми по оси z изменяются пропорционально изменению толщины слоя (пространственное армирование).

Обозначим через $H_m \geq 0$ аппликату границы между m -тым и $(m + 1)$ -вым слоями ($0 \leq m \leq M$, $H_M = h$), тогда $z = -H_m \leq 0$ будет задавать границу между $(m + M)$ -тым и $(m + M + 1)$ -вым слоями ($1 \leq m \leq M$), а $z = -H_0 \leq 0$ — границу между средним слоем и соседним нижним $(M + 1)$ -вым слоем, при этом $2H_0 \geq 0$ — толщина среднего слоя, $H_m - H_{m-1} \geq 0$ — толщина m -того и $(m + M)$ -того слоев ($1 \leq m \leq M$).

Для формулировки задачи поперечного изгиба слоистых армированных пластин в условиях установившейся ползучести необходимо использовать общеизвестные уравнения равновесия в перерезывающих силах F_i и моментах M_{ij} [1, 5]:

$$F_{1,1} + F_{2,2} + p = 0, \quad M_{i1,1} + M_{i2,2} = F_i, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

связь между средними напряжениями в композиции σ_{ij} и моментами:

$$M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} z dz = 2 \sum_{m=0}^M \int_{H_{m-1}}^{H_m} \sigma_{ij}^{(m)} z dz \quad (i, j = 1, 2, H_{-1} \equiv 0); \quad (2)$$

соотношения между скоростями изгибных деформаций ξ_{ij} и скоростью прогиба v :

$$\xi_{ij} = -zv_{,ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad |z| \leq h, \quad (3)$$

а также выражения для осреднённых напряжений $\sigma_{ij}^{(m)}$ в m -том слое через напряжения в фазовых материалах (используется модель армированного слоя из [6]):

$$\sigma_{ij}^{(m)} = a^{(m)} \sigma_{cij}^{(m)} + \sum_k \sigma_k^{(m)} \omega_k^{(m)} l_{ki}^{(m)} l_{kj}^{(m)}, \quad i, j = 1, 2; \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{cii}^{(m)} &= 2g^{(m)}(H)(2\xi_{ii} + \xi_{jj}), \quad \sigma_{cij}^{(m)} = 2g^{(m)}(H)\xi_{ij} \quad (j = 3 - i, i = 1, 2); \\
 H &= 2\sqrt{\xi_{11}^2 + \xi_{11}\xi_{22} + \xi_{22}^2 + \xi_{12}^2}, \quad \sigma_k^{(m)} = g_k^{(m)}(\xi_k^{(m)})\xi_k^{(m)}, \\
 \xi_k^{(m)} &= \xi_{11}l_{k1}^{(m)}l_{k1}^{(m)} + \xi_{22}l_{k2}^{(m)}l_{k2}^{(m)} + 2\xi_{12}l_{k1}^{(m)}l_{k2}^{(m)}, \\
 l_{k1}^{(m)} &= \cos \psi_k^{(m)}, \quad l_{k2}^{(m)} = \sin \psi_k^{(m)} \quad (k = 1, 2, \dots, N^{(m)}); \\
 a^{(m)} &= 1 - \sum_k \omega_k^{(m)},
 \end{aligned} \tag{5}$$

где $p(x_1, x_2)$ — распределённая поперечная нагрузка; $\sigma_{cij}^{(m)}$, $\sigma_k^{(m)}$ — напряжения в связующем и арматуре k -того семейства в m -том слое соответственно; $\xi_k^{(m)}$ — скорость деформации ползучести в k -том семействе арматуры m -того слоя, связанная с напряжением $\sigma_k^{(m)}$ коэффициентом пропорциональности $g_k^{(m)}(\xi_k^{(m)})$ (зависимость $g_k^{(m)} \sim \xi_k^{(m)}$ известна); $g^{(m)}(H)$ — заданная функция, являющаяся коэффициентом пропорциональности между интенсивностью касательных напряжений $T^{(m)}$ и интенсивностью скоростей деформаций H в связующем m -того слоя: $T^{(m)} = g^{(m)}(H)H$; $\omega_k^{(m)}$, $\psi_k^{(m)}$ — интенсивность и угол (отсчитываемый от направления x_1) армирования m -того слоя волокнами k -того семейства; суммирование производится по указанному индексу от 1 до $N^{(m)}$, если не указаны пределы; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по переменной x_i соответственно; верхний индекс в скобках означает номер армированного слоя.

В случае степенного закона $\xi = B\sigma^n$, связывающего скорость деформации ξ установившейся ползучести и напряжение σ в материале каждой фазы композиции, имеем следующие зависимости [5]:

$$\begin{aligned}
 g^{(m)}(H) &= \bar{B}^{(m)} H^{\mu^{(m)}-1}, \quad g_k^{(m)}(\xi_k^{(m)}) = \bar{B}_k^{(m)} (\xi_k^{(m)})^{\mu_k^{(m)}-1}, \\
 \bar{B}^{(m)} &= (B^{(m)})^{-\mu^{(m)}}, \quad \bar{B}_k^{(m)} = (B_k^{(m)})^{-\mu_k^{(m)}}, \\
 \mu^{(m)} &= \frac{1}{n^{(m)}}, \quad \mu_k^{(m)} = \frac{1}{n_k^{(m)}}, \quad 1 \leq k \leq N^{(m)}, \quad 0 \leq m \leq 2M,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $B^{(m)}$, $n^{(m)}$, $B_k^{(m)}$, $n_k^{(m)}$ — известные характеристики материалов связующего и арматуры k -того семейства m -того слоя.

К приведённым выше уравнениям и соотношениям необходимо добавить условия постоянства поперечных сечений непрерывных волокон, которые при пространственном армировании тонких слоев имеют такой вид [7] ($H_{-1} \equiv 0$):

$$\left[\omega_k^{(m)} (H_m - H_{m-1}) \cos \psi_k^{(m)} \right]_{,1} + \left[\omega_k^{(m)} (H_m - H_{m-1}) \sin \psi_k^{(m)} \right]_{,2} = 0, \tag{7}$$

а при плоском армировании редуцируются к

$$\left(\omega_k^{(m)} \cos \psi_k^{(m)} \right)_{,1} + \left(\omega_k^{(m)} \sin \psi_k^{(m)} \right)_{,2} = 0, \quad 1 \leq k \leq N^{(m)}, \quad 0 \leq m \leq M. \tag{8}$$

Пусть область G , занимаемая пластиной в плане, ограничена контуром Γ , тогда на одной части этого контура (обозначим её Γ_p) могут быть заданы статические граничные условия по изгибающему моменту [1, 5]:

$$\begin{aligned} M_{11}n_1^2 + M_{22}n_2^2 + 2M_{12}n_1n_2 &= M_n, \\ n_1 &= \cos \beta, \quad n_2 = \sin \beta, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p \end{aligned} \quad (9)$$

и приведённой поперечной силе Кирхгофа:

$$\begin{aligned} F_1n_1 + F_2n_2 + \partial_\tau (M_{n\tau}) &= F_{nz}, \\ M_{n\tau} &\equiv (M_{22} - M_{11})n_1n_2 + M_{12}(n_1^2 - n_2^2), \\ \partial_\tau (M_{n\tau}) &= -n_2M_{n\tau,1} + n_1M_{n\tau,2}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p, \end{aligned} \quad (10)$$

а на другой части (обозначим её Γ_u) — кинематические условия:

$$v(\Gamma_u) = v_0, \quad v_{,1}n_1 + v_{,2}n_2 = \theta_n, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_u, \quad (11)$$

где M_n , F_{nz} — изгибающий момент и приведённая поперечная сила Кирхгофа, заданные на Γ_p ; v_0 , θ_n — скорость прогиба на Γ_u и производная от скорости прогиба по направлению внешней нормали к контуру, задаваемой углом β ; ∂_τ — производная вдоль контура (на контуре Γ могут быть заданы и смешанные из (9)–(11) граничные условия, например, условия свободного опирания).

На той части контура Γ (обозначим её $\Gamma_k^{(m)}$), на которой волокна k -того семейства m -того слоя входят в область G , необходимо задать краевые условия для интенсивностей армирования [7]:

$$\omega_k^{(m)}(\Gamma_k^{(m)}) = \omega_{0k}^{(m)}, \quad k = 1, 2, \dots, N^{(m)}, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (12)$$

где $\omega_{0k}^{(m)}$ — заданные на $\Gamma_k^{(m)}$ функции.

Структура армирования должна удовлетворять физическим ограничениям:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \omega_k^{(m)} \quad (k = 1, 2, \dots, N^{(m)}), \\ \sum_k \omega_k^{(m)} &\leq \omega_*^{(m)} \leq 1 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, M), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\omega_*^{(m)} = \text{const}$ — предельно допустимая суммарная интенсивность армирования m -того слоя (на практике $\omega_*^{(m)} \approx 0,7$).

Прежде чем получить разрешающее уравнение и соответствующие ему статические граничные условия, исходя из (2)–(6) определим связь между моментами и скоростью прогиба установившейся ползучести:

$$M_{ij} = - \sum_{n=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijnl} v_{,nl}, \quad i, j = 1, 2, \quad (14)$$

где

$$C_{iiii} = \sum_{m=0}^M \left[2D^{(m)} a^{(m)} \kappa^{\mu^{(m)}-1} + \sum_k D_k^{(m)} \omega_k^{(m)} \kappa_{mk}^{\mu_k^{(m)}-1} (l_{ki}^{(m)})^4 \right],$$

$$\begin{aligned}
 C_{ijj} &= \sum_{m=0}^M \left[D^{(m)} a^{(m)} \kappa^{\mu^{(m)}-1} + \sum_k D_k^{(m)} \omega_k^{(m)} \kappa_{mk}^{\mu_k^{(m)}-1} (l_{ki}^{(m)})^2 (l_{kj}^{(m)})^2 \right], \\
 C_{iji} &= \sum_{m=0}^M \left[\frac{1}{2} D^{(m)} a^{(m)} \kappa^{\mu^{(m)}-1} + \sum_k D_k^{(m)} \omega_k^{(m)} \kappa_{mk}^{\mu_k^{(m)}-1} (l_{ki}^{(m)})^2 (l_{kj}^{(m)})^2 \right], \\
 C_{iii} &= \sum_{m=0}^M \sum_k D_k^{(m)} \omega_k^{(m)} \kappa_{mk}^{\mu_k^{(m)}-1} (l_{ki}^{(m)})^3 l_{kj}^{(m)} \quad (j = 3 - i, i = 1, 2); \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$D^{(m)} = \frac{4\bar{B}^{(m)}}{\mu^{(m)} + 2} \left(H_m^{\mu^{(m)}+2} - H_{m-1}^{\mu^{(m)}+2} \right), \quad D_k^{(m)} = \frac{2\bar{B}_k^{(m)}}{\mu_k^{(m)} + 2} \left(H_m^{\mu_k^{(m)}+2} - H_{m-1}^{\mu_k^{(m)}+2} \right),$$

$$a^{(m)} = 1 - \sum_k \omega_k^{(m)}, \quad \kappa = 2\sqrt{v_{,11}^2 + v_{,11}v_{,22} + v_{,22}^2 + v_{,12}^2},$$

$$\kappa_{mk} = -v_{,11}l_{k1}^{(m)}l_{k1}^{(m)} - v_{,22}l_{k2}^{(m)}l_{k2}^{(m)} - 2v_{,12}l_{k1}^{(m)}l_{k2}^{(m)} \quad (1 \leq k \leq N^{(m)}, 0 \leq m \leq M).$$

Замечание 1. Если используется более сложный, чем степенной (6), закон связи $\sigma \sim \xi$, то зависимость $\sigma = \sigma(\xi)$ для каждого фазового материала можно с наперёд заданной точностью аппроксимировать многозвенной ломаной. При этом в (14) коэффициенты C_{ijnl} вместо (15) можно определить по схеме, изложенной в [4]. В частности, при аппроксимации этой зависимости двухзвенной ломаной для C_{ijnl} получим выражения (2.2) из [4] (при этом в отличие от (14) моменты определяются равенствами (2.5) из [4]), которые нужно умножить на $\frac{2}{3}$ и в которых следует принять $\nu^{(m)} = \frac{1}{2}$ (применение алгоритма вывода выражений для C_{ijnl} , использованного в [4], допустимо в силу формального сходства [5] определяющих уравнений деформационной теории пластичности, использованной в [4], и теории течения установившейся ползучести, на соотношениях которой базируется настоящее исследование).

Подставим соотношения (14) в уравнения (1) и граничные условия (9), (10) и исключим из рассмотрения поперечные силы. Тогда уравнение равновесия примет вид

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{l=1}^2 (C_{ijnl} v_{,nl})_{,ij} = p(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G, \quad (16)$$

а статические граничные условия преобразуются к следующему виду:

– по изгибающему моменту:

$$\begin{aligned}
 & - (C_{1111} \cos^2 \beta + C_{1122} \sin^2 \beta + C_{1112} \sin 2\beta) v_{,11} - \\
 & - (C_{2211} \cos^2 \beta + C_{2222} \sin^2 \beta + C_{2212} \sin 2\beta) v_{,22} - \\
 & - 2(C_{1211} \cos^2 \beta + C_{1222} \sin^2 \beta + C_{1212} \sin 2\beta) v_{,12} = M_n; \quad (17)
 \end{aligned}$$

– по приведённой силе Кирхгофа:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^2 \sum_{l=1}^2 (C_{ijnl} v_{,nl})_{,j} n_i - \\
 & \quad - \frac{1}{2} \partial_\tau \left\{ [(C_{1122} - C_{1111}) \sin 2\beta + 2C_{1112} \cos 2\beta] v_{,11} + \right. \\
 & \quad + [(C_{2222} - C_{2211}) \sin 2\beta + 2C_{2212} \cos 2\beta] v_{,22} + \\
 & \quad \left. + 2[(C_{1222} - C_{1211}) \sin 2\beta + 2C_{1212} \cos 2\beta] v_{,12} \right\} = F_{nz}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p \quad (18)
 \end{aligned}$$

(кинематические граничные условия (11) остаются без изменения).

Если толщины слоёв (или, что то же самое, аппликаты границ между слоями $z = H_m$) и траектории армирования (т.е. углы $\psi_k^{(m)}$) каждого слоя заданы, то начально-краевая задача (7), (12) (или (8), (12)) определяет интенсивности армирования $\omega_k^{(m)}$ m -того слоя волокнами k -того семейства (начально-краевые задачи для линейных уравнений в частных производных первого порядка (7), (8) хорошо изучены [8], поэтому не будем останавливаться на этом вопросе более подробно; отметим лишь, что уравнения (7), (8) имеют действительные характеристики, совпадающие с траекториями армирования k -того семейства m -того слоя). Если функции $\psi_k^{(m)}$, $\omega_k^{(m)}$, H_m известны (заданы) и удовлетворяют физическим ограничениям (13), то уравнение равновесия (16) замкнуто относительно скорости прогиба v установившейся ползучести. Этому квазилинейному (в силу того, что коэффициенты C_{ijnl} зависят нелинейно от $v_{,sr}$; см. (15)) эллиптическому дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка соответствуют нелинейные (17), (18) и линейные (11) граничные условия.

Для линеаризации рассматриваемой граничной задачи (11), (16)–(18) можно использовать следующий итерационный процесс, базирующийся на применении идеи метода секущего модуля, предложенного в [5] для линеаризации уравнений установившейся ползучести. Предположим, что коэффициенты C_{ijnl} в (16)–(18) известны из решения на предыдущей итерации, тогда для определения приближения скорости прогиба имеем линейную граничную задачу с переменными коэффициентами, формально совпадающую с задачей упругого поперечного изгиба неоднородных анизотропных пластин [1, 2] (методы решения таких задач хорошо разработаны: МКЭ, МКР, вариационные методы и др.). При известном приближении скорости прогиба по формулам (15) определяем новые приближения коэффициентов C_{ijnl} и т.д., пока итерационный процесс не сойдётся (сходимость метода секущего модуля доказана [5]).

Используя общеизвестные формулы [1] перехода от прямоугольной декартовой системы координат к цилиндрической, можно записать уравнения (7), (8), (16), а также граничные (11), (17), (18) и краевые (12) условия в полярной системе координат. При этом углы армирования $\psi_k^{(m)}$ отсчитываются от направления полярного радиуса r , а выражения для моментов по-прежнему определяются равенствами (14), в которых, а также в (15), (17), следует

сделать замены $-v_{,ij}$ на κ_{ij} , где в случае осевой симметрии $\kappa_{11} = -\frac{d^2v}{dr^2}$, $\kappa_{22} = -r^{-1}\frac{dv}{dr}$, $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$.

В качестве примера рассмотрим расчёт установившейся ползучести кольцевых пластин, ограниченных кромками радиусов $r_0 = 0,05$ м, $r_1 = 0,5$ м и нагруженных равномерной поперечной нагрузкой $p = 1$ МПа. Слои пластин осесимметрично армированы двумя семействами волокон ($N^{(m)} = 2$, $\psi_1^{(m)}(r) = -\psi_2^{(m)}(r)$, $\omega_1^{(m)}(r) = \omega_2^{(m)}(r)$), изготовленных из одного материала ($n_1^{(m)} = n_2^{(m)}$, $B_1^{(m)} = B_2^{(m)}$, $0 \leq m \leq 2M$). Пластины могут иметь постоянную $2h_*$ или переменную

$$2h(r, s) = 2sh_* + 12h_*(r_1 - r_0)^{-2}(1 - s)(r_1 - r)(r - r_0) \quad (r_0 \leq r \leq r_1, 0 < s \leq 1) \quad (19)$$

толщину.

При задании толщины конструкции в виде (19) её объём равен объёму пластины постоянной толщины $2h_*$. Из (19) следует, что при $0 < s < 1$ толщина пластины на кромках $r = r_0, r_1$ меньше, чем во внутренних точках (максимум толщины достигается в точке $r = \frac{1}{2}(r_0 + r_1)$); при $s = 1$ получаем пластину постоянной толщины $2h_*$. В расчётах будем принимать $2h_* = 2$ см.

Так как армирование пластин и слоёв осуществляется непрерывными волокнами постоянного поперечного сечения, то функции $\psi_k^{(m)}$, $\omega_k^{(m)}$ в осесимметричном случае при пространственном армировании слоёв связаны равенством

$$\begin{aligned} r\omega_k^{(m)}(H_m - H_{m-1})\cos\psi_k^{(m)} &= r_0\omega_{0k}^{(m)}(H_{0m} - H_{0m-1})\cos\psi_{0k}^{(m)} \\ (H_{-1} &\equiv 0, \omega_{0k}^{(m)} \equiv \omega_k^{(m)}(r_0), \psi_{0k}^{(m)} \equiv \psi_k^{(m)}(r_0), H_{0m} \equiv H_m(r_0), \\ &k = 1, 2, 0 \leq m \leq 2M), \end{aligned} \quad (20)$$

а при плоском армировании в (20) следует формально принять $H_m - H_{m-1} = 1$, $H_{0m} - H_{0m-1} = 1$ [7].

Предполагается, что пластины изготовлены из меди и армированы стальной проволокой У8А. Механические характеристики фаз композиции имеют значения [9, 10]: $n^{(m)} = 1,6$, $B^{(m)} = 3,65 \cdot 10^{-10} (\text{МПа})^{-n^{(m)}} \cdot \text{ч}^{-1}$, $n_1^{(m)} = 24,98$, $B_1^{(m)} = 1,054 \cdot 10^{-84} (\text{МПа})^{-n_1^{(m)}} \cdot \text{ч}^{-1}$, соответствующие температуре около 200°C .

На рис. 1 изображены зависимости максимального значения скорости прогиба установившейся ползучести ($v_m = \max_{r_0 \leq r \leq r_1} v(r)$) пластин постоянной тол-

щины $2h_*$ от угла армирования по логарифмическим спиральям ($\psi_1^{(m)}(r) = -\psi_2^{(m)}(r) = \psi = \text{const}$). Горизонтальные прямые 1, 2 соответствуют изотропным медным пластинам ($\omega_{0k}^{(m)} = 0$); кривые 1', 2' рассчитаны для однослойных пластин ($M = 0$), армированных на внутренней кромке с интенсивностями $\omega_{01}^{(0)} = \omega_{02}^{(0)} = 0,2$; линии же 1'', 2'' получены для трёхслойных ($M = 1$) пластин, изготовленных из тех же материалов, внутренний слой которых не армирован ($\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)} = 0$) и имеет полутолщину $H_0 = \frac{4}{7}h_*$, а внешние несущие слои армированы с интенсивностями (20), причём на внутренней

Рис. 1

кромке $\omega_{01}^{(m)} = \omega_{02}^{(m)} = 0,35$ (при этом удельная суммарная плотность армирования во внешних слоях на внутренней кромке $\omega_{01}^{(m)} + \omega_{02}^{(m)} = 0,7$ ($m = 1, 2$) близка к предельно допустимой; при таких структурах армирования общий расход арматуры в трёхслойных пластинах постоянной толщины такой же, как и в однослойных). Линии 1, 1', 1'' определены для шарнирно опёртых пластин; линии же 2, 2', 2'' рассчитаны для пластин, шарнирно опёртых на внутренней кромке и жёстко закреплённых на внешней кромке.

Кривые 1', 1'' и 2', 2'' лежат ниже прямых 1 и 2 соответственно, следовательно, армирование пластин позволяет уменьшить скорость прогиба установившейся ползучести конструкций рассматриваемой геометрии. Поведение кривых на рис. 1 указывает на то, что при рассматриваемых размерах конструкций наименьшая скорость прогиба установившейся ползучести развивается в радиально армированных ($\psi = 0$) пластинах (с точки зрения минимизации скорости прогиба установившейся ползучести такие структуры армирования можно считать рациональными). При увеличении углов спиральной намотки величина $v_m(\psi)$ существенно возрастает (при углах армирования $\psi \approx \frac{\pi}{4}$ — в 1,5–2 раза). При всех углах армирования кривые 1'', 2'' лежат ниже линий 1', 2' соответственно, т.е. разнесение несущих слоев позволяет уменьшить скорость прогиба установившейся ползучести (например, при $\psi = 0$ — на 31 и 28% соответственно).

Сопоставление линий 1, 1', 1'' и 2, 2', 2'' показывает, что замена шарнирного опирания внешней кромки пластины на жёсткую заделку приводит к существенному (в разы) снижению скорости прогиба установившейся ползучести.

Варьируя форму профиля пластины или слоев, можно управлять скоростью прогиба. На рис. 2 приведены зависимости v_m от параметра профилирования s (см. (19)) для шарнирно опёртых пластин. Кривая 1 рассчитана для изотропной медной пластины, а остальные линии — для радиально ($\psi = 0$) армированных конструкций. Кривые 2, 3 определены при плоском, а линии 2', 3' — при пространственном армировании. Кривые 2, 2' соответствуют однослойным ($M = 0$) пластинам ($\omega_{01}^{(0)} = \omega_{02}^{(0)} = 0,2$); линии 3, 3' — трёхслойным

Рис. 2

($M = 1$) конструкциям, внутренний слой которых по-прежнему не армирован ($\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)} = 0$) и имеет полутолщину $H_0(r) = \frac{4}{7}h(r)$, а внешние слои армированы в радиальном направлении с интенсивностями $\omega_{01}^{(m)} = \omega_{02}^{(m)} = 0,35$, $m = 1, 2$ (значения v_m при $s = 1$ на рис. 2 равны значениям v_m на кривых 1, 1', 1'' рис. 1 при $\psi = 0$). Кривые 1–3, 2' на рис. 2 имеют локальные минимумы при $s \approx 0,55$, $s \approx 0,4$, $s \approx 0,35$, $s \approx 0,9$ соответственно; линия же 3' имеет минимум при $s = 1$. Поведение кривых 2, 3 на рис. 2 указывает на то, что за счёт профилирования (по формуле (19)) плоско армированных одно- и трёхслойных пластин скорость прогиба установившейся ползучести в них можно уменьшить на 35 и 43 % соответственно. Поэтому в этих случаях (а также в случае изотропной пластины, см. кривую 1) целесообразно формулировать задачи рационального или оптимального профилирования изотропных и армированных пластин (и их слоев), работающих в условиях установившейся ползучести. При пространственном радиальном армировании (кривые 2', 3') профилирование пластины по формуле (19) практически не приводит к уменьшению скорости прогиба (для кривой 2' такое уменьшение составляет менее 0,4 %, и поэтому визуально не заметно), т. е. при таком армировании пластины со слоями постоянной толщины можно рассматривать как близкие к рациональным.

На рис. 3 изображены эшоры скорости прогиба установившейся ползучести для различных кольцевых пластин. Кривые 1–4, 3', 4' получены для шарнирно опёртых конструкций, линии же 5, 5', 6 — для пластин, шарнирно опёртых на внутренней кромке и жёстко закреплённых на внешней. Все кривые, за исключением линий 2, рассчитаны для пластин постоянной толщины; кривые же 2 — для изотропной пластины переменной толщины с параметром профилирования $s = 0,55$ (см. (19)) — рациональный проект. Линии 1, 2 соответствуют изотропным медным пластинам, остальные кривые — армированным конструкциям. Линии 3, 3', 5, 5' получены для однослойных, а кривые 4, 4', 6 — для трёхслойных пластин. Линии 3–6 определены при радиальном ($\psi = 0$), а кривые 3', 4', 5' — при спиральном армировании (линии 3', 4' — при $\psi = \frac{\pi}{4}$, кривые 5' — при $\psi = \frac{11}{40}\pi$; эти эшоры соответствуют точкам максимумов на кривых 1', 1'', 2' рис. 1). Сравнение кривых, приведённых

Рис. 3

на рис. 3, позволяет проследить за качественным и количественным изменением эпюр скоростей прогиба установившейся ползучести в зависимости от способа закрепления кромок пластины, структуры её армирования (с учётом разнесения армированных слоев) и профилирования.

Замечание 2. Зная из граничной задачи (11), (16)–(18) скорость прогиба v , по формуле (14) можно определить моменты M_{ij} в пластине (а по формулам (3)–(5) — напряжённое состояние во всех фазовых материалах), работающей в условиях установившейся ползучести. Если известно помимо этого и начальное моментное состояние $\bar{M}_{ij}$ (порождаемое напряжениями $\bar{\sigma}_{ij}^{(m)}$, см. (2)) в конструкции (его можно определить, например, методами, изложенными в [1, 2, 4, 11]), то решение о неустановившейся ползучести на первой её стадии можно получить приближённо, используя методику, предложенную в [5]. Для этого представим текущее моментное состояние в пластине в виде $\bar{M}_{ij} = (1 - \tau(t))\bar{M}_{ij} + \tau(t)M_{ij}$ (а текущее напряжённое состояние в m -том слое: $\bar{\sigma}_{ij}^{(m)} = (1 - \tau(t))\bar{\sigma}_{ij}^{(m)} + \tau(t)\sigma_{ij}^{(m)}$, $i, j = 1, 2$), где $\tau(t)$ — монотонная функция времени t , возрастающая от значения $\tau = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ до $\tau = 1$ при $t \rightarrow \infty$. Функцию $\tau(t)$ можно определить исходя из экстремальных принципов теории ползучести (см. § 34 в [5]). В случае изотропных пластин реализация такого подхода не вызывает особых трудностей, а в случае сложно армированных и слоистых пластин требует дополнительного более тщательного исследования, выходящего за рамки настоящей работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00046-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лехницкий, С. Г. Анизотропные пластинки [Текст] / С. Г. Лехницкий. — М.: ГТТИ, 1957. — 436 с.
2. Амбарцумян, С. А. Теория анизотропных пластин [Текст] / С. А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1967. — 268 с.
3. Андреев, А. Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания [Текст] / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. — Новосибирск: Наука, 2001. — 287 с.

4. Немировский, Ю. В. Упругопластический поперечный изгиб слоистых армированных пластин [Текст] / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2005. — Т. 11, № 1. — С. 3–20.
5. Качанов, Л. М. Теория ползучести [Текст] / Л. М. Качанов. — М.: Физматгиз, 1960. — 456 с.
6. Немировский, Ю. В. Ползучесть однородных и композитных оболочек [Текст] / Ю. В. Немировский / Актуальные проблемы механики оболочек: Тр. междунар. конф., посвящённой 100-летию проф. Х. М. Муштари, 90-летию проф. К. З. Галимова и 80-летию проф. М. С. Корнишина (Казань, 26–30 июня 2000 г.). — Казань: Новое знание, 2000. — С. 42–49.
7. Немировский, Ю. В. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения [Текст] / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. — 1997. — Т. 3, № 2. — С. 20–40.
8. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка [Текст] / Э. Камке. — М.: Наука, 1966. — 260 с.
9. Писаренко, Г. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести [Текст]: Справ. пособ. / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский. — Киев: Наукова думка, 1981. — 496 с.
10. Композиционные материалы [Текст]: Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. — Киев: Наукова думка, 1985. — 592 с.
11. Немировский, Ю. В. Термоупругопластический изгиб слоисто-волоконистых пластин [Текст] / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2005. — Т. 11, № 4. — С. 467–493.

Поступила в редакцию 23/VI/2008;
в окончательном варианте — 15/VII/2008.

MSC: 74K20, 74R20

THE STEADY CREEP LAYER-FIBROUS BENDINGS METAL-COMPOSITES PLATES

Yu. V. Nemirovskii, A. P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
630090, Novosibirsk, Institutskaya st., 4/1.

E-mails: nemirov@itam.nsc.ru, shulgin@itam.nsc.ru

The problem of cross bending the Kirchhoff layers plates of the variable thickness reinforced by filaments of a constant cross-section and working in conditions of steady creep of all phases of a composition is formulated. The system of the resolving equations and boundary conditions corresponding it is analysed. The method of a solution of a task in view is developed. The concrete calculations which have shown are lead, that the velocity of a sag of the steady creep of plates essentially depends on a mode of their fastening, structure of reinforcing and a diversity of distant layers, distribution of thickness of a design and its layers. The path of the approximated solution of such problems in conditions of the unsteady creep is specified.

Key words: steady creep, layered plates, cross-bending, complex reinforcement.

Original article submitted 23/VI/2008;
revision submitted 15/VII/2008.

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. (Phis. & Math.) Prof., Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
Yankovskii Andrey Petrovich, Dr. Sci. (Phis. & Math.), Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.*