Общероссийский математический портал

О. В. Фадеева, Краевая задача с сопряжением производной по нормали с дробной производной для уравнения смешанного типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 38, 163–165

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu395>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 05:55:08

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.9

О. В. Фадеева

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С СОПРЯЖЕНИЕМ ПРОИЗВОДНОЙ ПО НОРМАЛИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Для рассматриваемого уравнения смешанного типа изучена новая краевая задача с сопряжением производной по нормали с дробной производной. В терминах коэффициентов уравнения и условия сопряжения и граничных значений искомой функции доказана теорема о существовании и единственности решения поставленной задачи.

Уравнение

$$V(U) = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } V(U) = \begin{cases} U_{xx} + U_{yy} + \frac{2p}{x}U_x + \frac{2q}{y}U_y, & y > 0, \\ U_{xy} - \frac{2p}{x^2 - y^2}(yU_x - xU_y), & y < 0, \end{cases} \quad 0 < 2p < 1, \quad 0 < 2q < 1,$$

рассмотрим на множестве $D = D_- \cup D_+$, где $D_- = \{(x, y) : -1 < -x < y < 0\}$, D_+ — область, ограниченная гладкой кривой Γ , лежащей в полуплоскости $y > 0$, опирающейся на оси Ox и Oy в т. $A(1, 0)$ и $B(0, 1)$ соответственно, и отрезками OA оси Ox и OB оси Oy .

Задача V_1 . Найти функцию $U(x, y)$ со свойствами:

- 1) $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$;
- 2) $U(x, y)$ — решение уравнения (1) на множестве D ;
- 3) $U(x, y)$ подчиняется краевым условиям:

$$U|_{\Gamma} = f(s), \quad s \in [0, L], \quad (2)$$

L — длина кривой Γ , отсчитываемая от т. $A(1, 0)$,

$$U(x, -x) = w(x), \quad y \in [0, 1], \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} U_x \cdot x^{2q} = v_0(y), \quad y \in (0, 1); \quad (4)$$

- 4) $U(x, y)$ подчиняется условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} U_y \cdot y^{2p} = V_1(x), \quad x \in (0, 1), \quad (5)$$

$$V_1(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\lambda} [U_1(y, 0) + U_2(x, -t)] dt, \quad \text{где } U(x, y) = U_1(x, y) + U_2(x, y) \text{ — решение задачи}$$

Дарбу в D_- для уравнения (1) с данными (3) и

$$U(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (6)$$

Доказательство единственности решения задачи V_1 изложено в [1].

Доказательство существования решения задачи V_1 проводится в случае, когда кривая Γ задается уравнением $y = \sqrt{1-x^2}$ и $q = p$.

Напомним, что решение задачи Дарбу в D_- для уравнения (1) ([1]) имеет вид

$$U(x, y) = \int_0^x V(t, 0, x, y) \left[\tau'(t) + \frac{2p}{t} \tau(t) \right] dt + \frac{k_1(1-2p)}{p} \int_0^y w'(t) \left(\frac{y^2 + t^2}{x^2 - t^2} \right) F \left(2p, p; 1+p; \frac{y^2 - t^2}{x^2 - t^2} \right) dt, \\ \tau(x) \in C[0, 1] \cap C^1[0, 1], \quad w(x) \in C^1[0, 1], \quad V(x, y, x_0, y_0) \text{ — функция Римана-Адамара уравнения (1)}$$

(см., например [1]), $k_1 = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(p)\Gamma(2-2p)}$ и краевая задача с сопряжением производной по нормали с дробной производной для уравнения смешанного типа

$$V_1(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\lambda} \tau'(t) dt + k \int_0^x (x^2 - t^2)^{1-\lambda} w'(t) dt, \quad k = \frac{(1-2p)(2-\lambda-p)}{p(1-\lambda)} k_1 \cdot B(1+p, 2-\lambda-2p).$$

В области D_+ для уравнения (1) используем решение задачи N ([2], гл. III, §3) с данными (2), (4) и

$$\lim_{y \rightarrow +0} U_y \cdot y^{2q} = v_1(x), \quad x \in (0, 1). \quad (7)$$

Согласно условию сопряжения (5) доказательство существования решения задачи V_1 сводится к доказательству существования решения уравнения (8) относительно функции $\tau'(x)$:

$$\tau'(x) - \int_0^1 \tau'(s) K(x, s) ds = Q(x), \quad (8)$$

$$\text{где } K(x, s) = \begin{cases} K_1(x, s) + K_2(x, s) + K_3(x, s) + K_4(x, s), & 0 \leq s \leq x, \\ K_1(x, s) + K_2(x, s) + K_5(x, s), & x \leq s \leq 1; \end{cases}$$

$$K_1(x, s) = \frac{2Kp}{1-\lambda} x s^2 (1-s^2 x^2)^{-1} (1-s^2)^{1-\lambda} (1-x^2)^{-2p} F_1 \left(1, \frac{1}{2} - p, 2p; 2-\lambda; 1-s^2, -\frac{x^2(1-s^2)}{1-x^2} \right);$$

$$K_2(x, s) = \frac{2Kp}{2-\lambda} x (1-s^2)^{2-\lambda} (1-x^2 s^2)^{-2} (1-x^2)^{-2p} F_1 \left(1, \frac{1}{2} - p, 2p; 3-\lambda; 1-s^2, -\frac{x^2(1-s^2)}{1-x^2} \right);$$

$$K_3(x, s) = -kB(1-2p, 1-\lambda)(1-\lambda-2p)x^{2p}(x^2-s^2)^{-\lambda-2p} F \left(-2p, \frac{1}{2} - p; 1-2p-\lambda; \frac{x^2-s^2}{x^2} \right);$$

$$K_4(x, s) = -kx(1-x^2)^{-2p}(1-s^2)^{-\lambda} F_1 \left(1, \frac{1}{2} - p; \lambda; 1-2p; 1-x^2, \frac{1-x^2}{1-s^2} \right);$$

$$K_5(x, s) = -\frac{2Kp}{1-\lambda} x(1-x^2)^{-2p-1}(1-s^2)^{1-\lambda} F_1 \left(1, \frac{1}{2} - p, 2p+1; 2-\lambda; 1-s^2, \frac{1-s^2}{1-x^2} \right).$$

Свободный член уравнения $Q(x)$ зависит от краевых функций $v_0(y)$, $w(x)$ и $f(s)$ и в силу своей громоздкости в данной работе не приводится.

Исследования показали, что ядро $K(x, s)$ является ядром со слабой особенностью при условии, что $2\lambda - 1 \leq 2p < 1 - \lambda$. Функция $Q(x) \in C[0, 1]$, если $f(s) \in C[0, 1]$, $f(L) = 0$, $v_0(y) = y^r \cdot f_0(y)$, $r \geq 1 + 2p$, $f_0(y) \in C[0, 1]$ и $\lambda + 2p < 1$.

Таким образом, уравнение (8) есть уравнение Фредгольма II рода с ядром со слабой особенностью.

Тогда из единственности решения уравнения Фредгольма [3] следует существование решения задачи V_1 .

Т е о р е м а. Если $w(x) \in C^1[0, 1]$; $f(s) \in C[0, L]$, $f(L) = 0$; $v_0(y) = y^r \cdot f_0(y)$, $r \geq 1 + 2p$, $f_0(y) \in C[0, 1]$; $2\lambda - 1 \leq 2p \leq 1 - \lambda$, то существует единственное решение задачи V_1 на множестве D .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Волкодав В. Ф., Фадеева О. В. Для уравнения смешанного типа задача V_1 и единственность ее решения // Труды международной научн. конференции по дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 2003. С. 51–53.
2. Волкодав В. Ф. Принцип локального экстремума и его применение к решению задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Дисс. доктора физ.-мат. наук. Куйбышев, 1968.
3. Крикунов Ю. М. Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Казань: Изд-во Казанского Университета, 1986. 148 с.

Поступила 24.06.2005 г.