Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Вронская, Расчет напряженно- деформированного состояния призматических систем структурным методом начальных параметров, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 38, 166–168

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu396>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:53:46

Механика деформируемого твердого тела

УДК 624.04

Е. С. Вронская

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ СТРУКТУРНЫМ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Предложено решение для призматических оболочек произвольного очертания, построенное на основе метода начальных параметров, показана возможность его использования для призматических систем различной конфигурации. Эффективность алгоритма и вычислительного комплекса обеспечивается значительно меньшим по сравнению с численными методами порядком разрешающей системы уравнений, высокой точностью полученных результатов. Матричная форма алгоритма позволяет производить автоматизацию вычислений как на этапе формирования расчетной схемы, так и в процессе получения результатов.

Расчет пространственных конструкций сложной конфигурации, как правило, производится методом конечных элементов, что приводит к высокой размерности разрешающей системы уравнений. Однако наряду с численными методами существуют аналитические методы, позволяющие существенно понизить размерность задачи при обеспечении высокой точности получаемых результатов. Впервые такой подход был предложен В. З. Власовым для призматических оболочек средней длины [1]. Развитие метода перемещений применительно к системам пластин позволило производить их расчет в более точной постановке, отказавшись от кинематических и статических гипотез полумоментной теории [2].

В настоящей работе предложено решение для призматических оболочек произвольного очертания, построенное на основе метода начальных параметров. В отличие от традиционного применения этого метода для последовательно соединенных элементов, показана возможность его использования для призматических систем различной конфигурации [3]. Матричная форма алгоритма позволяет производить автоматизацию вычислений как на этапе формирования расчетной схемы, так и в процессе получения результатов.

Предварительно рассмотрим отдельную пластину (см. рисунок), имеющую на кромках $y = 0$; $y = L$ шарнирное опирание, а на других сторонах — произвольное закрепление. Действие на e -тый элемент нагрузки с компонентами $P_{xe}(x, y)$, $P_{ye}(x, y)$, $P_{ze}(x, y)$ вызывает появление в его срединной плоскости напряженно-деформированного состояния, которому соответствует вектор-функция:

$$\vec{d}_e(x, y) = [\vec{U}_e, \vec{V}_e, \vec{W}_e, \vec{\psi}_e]^T; \quad \vec{f}_e(x, y) = [\vec{N}_{xe}, \vec{N}_{ye}, \vec{Q}_{xe}, \vec{M}_{xe}]^T, \quad (1)$$

где $\vec{U}_e, \vec{V}_e, \vec{W}_e$ — линейные перемещения пластины; $\vec{N}_{xe}, \vec{N}_{ye}, \vec{Q}_{xe}$ — соответствующие им компоненты вектора усилий; $\vec{\psi}_e, \vec{M}_{xe}$ угол поворота поперечного сечения и изгибающий момент в плоскости ZOX соответственно.

Дифференциальные уравнения равновесия пластины и соответствующие граничные условия представляют математическую формулировку задачи, точное решение которой в рамках моментной технической теории Кирхгофа-Лява хорошо известно [4]. Представим эти результаты в форме метода начальных параметров [2]:

$$\vec{d}_e(x, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(y) \vec{d}_{en}(x); \quad \vec{f}_e(x, y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(y) \vec{f}_{en}(x); \quad (2)$$

$$\vec{d}_{en}(x) = a_{en}^{(d)}(x) \times [\vec{d}_{en}^0, \vec{f}_{en}^0]^T + \vec{d}_{en}^p(x); \quad \vec{f}_{en}(x) = a_{en}^{(f)}(x) \times [\vec{d}_{en}^0, \vec{f}_{en}^0]^T + \vec{f}_{en}^p(x), \quad (3)$$

где $\vec{d}_{en}(x), \vec{f}_{en}(x)$ — амплитудные значения разложений соответствующих функций перемещений и усилий в гармонические ряды; $\Phi_n(y)$ — диагональная матрица синус- и косинус преобразования Фурье; $a_{en}^{(d)}(x), a_{en}^{(f)}(x)$ — матрица частных решений соответствующей однородной задачи при отсутствии нагрузок; $\vec{d}_{en}^p(x), \vec{f}_{en}^p(x)$ — векторы грузовых коэффициентов. В

формулах (3) $\bar{d}_{en}^0(x)$, $\bar{f}_{en}^0(x)$ — начальные параметры пластины, являющиеся значениями функций $\bar{d}_{en}(x)$, $\bar{f}_{en}(x)$ при $x=0$:

$$\bar{d}_{en}^0 = [U_{en}^0, V_{en}^0, W_{en}^0, \psi_{en}^0]^T; \quad \bar{f}_{en}^0 = [N_{xen}^0, N_{xyen}^0, Q_{xen}^0, M_{xen}^0]^T. \quad (4)$$

Элементами матрицы $a_{en}^{(d)}(x)$, $a_{en}^{(f)}(x)$ являются комбинации гиперболических функций аргумента $i\pi x/l_e$ [4].

Свободные члены равенства (3), полученные методом вариации произвольных постоянных, для различных видов нагрузок определяются следующим образом:

$$\bar{d}_{en}^p(x) = \int_0^x \bar{a}_{en}^{(d)}(x-\zeta) \times \bar{P}_{en}(\zeta) d\zeta; \quad \bar{f}_{en}^p(x) = \int_0^x \bar{a}_{en}^{(f)}(x-\zeta) \times \bar{P}_{en}(\zeta) d\zeta, \quad (5)$$

где

$$\bar{a}_{en}^{(d)} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{18} \\ a_{23} & a_{24} & a_{28} \\ a_{33} & a_{34} & a_{38} \\ a_{43} & a_{44} & a_{48} \end{bmatrix}, \quad \bar{a}_{en}^{(f)} = \begin{bmatrix} a_{53} & a_{54} & a_{58} \\ a_{63} & a_{64} & a_{68} \\ a_{73} & a_{74} & a_{78} \\ a_{83} & a_{84} & a_{88} \end{bmatrix} \quad (6)$$

— матрицы, элементы которых формируются на основе третьего, четвертого и восьмого столбцов матрицы фундаментальных решений.

Решение (2), (3) использовано в работе [2], в которой получены формулы метода перемещений для отдельных пластин и разработаны процедуры формирования матрицы жесткости составной призматической конструкции. В случае применения предлагаемой методики отпадает необходимость в определении функций единичных реакций на краях прямоугольного элемента.

Воспользуемся решением (3) для описания напряженно-деформированного состояния всей призматической оболочки через неизвестные начальные параметры ее элементов (4). Запишем уравнения равновесия во всех продольных узловых линиях призматической системы в виде [5]:

$$\sum_{e=1}^m b_{ek} h_e \bar{f}_e(x, y) + \bar{q}_k(y) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, j). \quad (7)$$

Здесь $\bar{q}_k(y)$ — вектор узловой нагрузки k -того ребра конструкции:

$$\bar{q}_k(y) = [\bar{q}_{kx}(y), \bar{q}_{ky}(y), \bar{q}_{kz}(y), M_y(y)]^T, \quad (8)$$

где $\bar{q}_{kx}$, $\bar{q}_{ky}$, $\bar{q}_{kz}$ — проекции нагрузки на главные координатные оси, M_y — момент пары, действующий в плоскости, нормальной к продольному ребру.

Аналогично обеспечим совместность перемещений в узловых линиях конструкции с помощью равенств [5]:

$$\sum_{e=1}^m b'_{ek'} h_e \bar{d}_e(x, y) = 0, \quad (k' = 1, 2, \dots, j'). \quad (9)$$

Здесь b_{ek} и $b'_{ek'}$ элементы прямоугольных матриц инцидентий ориентированного графа B , B' . Число строк матрицы B равно числу поперечных узловых линий оболочки, а число столбцов — числу ее граней. Любая k -тая строка при этом соответствует k -тому ребру, а e -тый столбец — e -той пластине системы. Ненулевыми элементами матрицы B являются числа 1 и -1 . Элементы матрицы B' образованы на базе матрицы B путем замены строк, содержащих по три и более ненулевых элемента, на строки, содержащие пары ненулевых элементов [5]. Матрица h_e обеспечивает преобразование усилий и перемещений из локальных в глобальную систему

Расчетная схема призматической оболочки при действии статической нагрузки

координат. Замечаем, что элементы матриц инцидентий обеспечивают примыкание к k -той узловой линии только тех пластин, которые соответствуют заданной конфигурации системы.

Как показано в работе [6], количество начальных параметров $[\vec{d}_{en}^0, \vec{f}_{en}^0]$ ($e = 1, 2.. m$) всегда соответствует числу краевых условий (7), (9), содержащих $8m$ равенств.

Таким образом, соотношения (7), (9) представляют замкнутую неоднородную алгебраическую систему уравнений размерностью $8m$ относительно неизвестных начальных параметров. Решение этой системы дает возможность по формулам (2)–(4) определить все компоненты напряженно-деформированного состояния конструкции в любой точке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Власов В. З. Тонкостенные пространственные системы. М.: Госстройиздат, 1958. 502с.
2. Милейковский И. Е. Расчет оболочек и складок методом перемещений. М.: Госстройиздат, 1960. 357 с.
3. Бидерман В. П. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1972, 416 с.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.:ОНТИ, 1935. 674с.
5. Еленицкий Э. Я. Расчет свободных колебаний призматических систем с распределенными параметрами // Изв. вузов. Строительство. 1996. № 7. С. 26–32.
6. Еленицкий Э. Я., Вронская Е. С. Нестационарная задача динамики для призматических систем с учетом внутреннего трения // Изв. вузов. Строительство, 1998. № 7. С. 41–47.

Поступила 22.10.2004 г.