Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Головской, Математическое моделирование процессов диффузии и массопереноса при вакуумной цементации дольных сталей, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005, выпуск 38, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu397>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:19:43

Математическое моделирование

УДК 621.785.52

А. Л. Головской

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДИФфуЗИИ И МАССОПЕРЕНОСА ПРИ ВАКУУМНОЙ ЦЕМЕНТАЦИИ ДОЛОТНЫХ СТАЛЕЙ

Традиционный процесс цементации металлических изделий реализуется через весьма длительный технологический процесс, наиболее реальным путем ускорения которого является повышение температуры и углеродного потенциала. Наиболее эффективно можно использовать высокотемпературную цементацию (с высоким углеродным потенциалом на первом этапе) при давлении ниже атмосферного. Наряду с увеличением производительности процесса цементации в условиях пониженного давления улучшаются условия труда, уменьшается расход технологического газа, а также, в связи с отсутствием кислородсодержащих компонентов в атмосфере, исключается внутреннее окисление деталей [1].

Опыт эксплуатации вакуумных печей подтвердил, что цементация стали при повышенных температурах и давлении ниже атмосферного перспективна. Однако при цементации долотных сталей возник ряд технологических трудностей.

При отработке параметров технологического процесса одной из главных задач является определение длительности периодов насыщения и диффузии для получения оптимального содержания углерода на поверхности обработанных деталей и его распределения по глубине слоя. Для решения этой задачи предлагается использовать следующую математическую модель.

Математическое описание стадии диффузии основывается на феноменологическом подходе [2]. Первый закон Фика, описывающий ситуацию стационарной диффузии, когда концентрация диффундирующего элемента не зависит от времени, имеет вид:

$$q = -D \cdot \partial c / \partial x, \quad (1)$$

где q — поток углерода через границу; D — коэффициент диффузии; $\partial c / \partial x$ — градиент углерода.

Если концентрация изменяется во времени, процесс описывается уравнением диффузии, отражающим изменение концентрации в единицу времени в элементарном объеме диффузионной зоны (второй закон Фика):

$$\partial c(x, \tau) / \partial \tau = \frac{\partial}{\partial x} (D \cdot \partial c / \partial x), \quad (2)$$

где τ — время. Полагая, что коэффициент диффузии практически не зависит от концентрации, уравнение диффузии можно линеаризовать:

$$\partial c(x, \tau) / \partial \tau = D \partial^2 c / \partial x^2. \quad (3)$$

Именно этим уравнением достаточно адекватно описывается процесс диффузии углерода в сталь при цементации.

Второй закон Фика представляет уравнение параболического типа, для однозначного решения которого необходимо задать краевые (начальные и граничные) условия, которым должна удовлетворять концентрация диффундирующего элемента.

Граничным условием, наиболее точно отражающим физику переноса углерода из газовой фазы к поверхности, являются граничные условия третьего рода:

$$-D(\partial c / \partial x)|_{x=0} = \beta(\varphi(\tau) - c(0, \tau)) \quad (4)$$

где β — коэффициент массопереноса; φ — углеродный потенциал атмосферы. В глубине изделия имеем адиабатические условия второго рода:

$$\partial c / \partial x|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (5)$$

Начальное распределение концентрации диффундирующего элемента в слое может быть произвольным, однако при первоначальной цементации можно принять его постоянным:

$$c(x, 0) = c_0 = \text{const}. \quad (6)$$

Граничное условие третьего рода (4) определяет поток диффундирующего элемента через поверхность раздела металл — насыщающая атмосфера и полагает его пропорциональным разности концентраций на поверхности $c(0, \tau)$ и равновесной с окружающей средой $\varphi(\tau)$. Для математического описания объекта используем решение уравнения с краевыми условиями (4)–(6) для полугограниченного тела.

Решение задачи целесообразно проводить операционным методом [3]. Уравнение (3) в трансформантах Лапласа с учетом условия (6) примет вид

$$c''(x, p) - (p/D)c(x, \tau) + c_0/D = 0, \quad (7)$$

а граничные условия (4) и (5) запишутся так:

$$c'(0, p) + H(c_0/p - c(0, p)) = 0, \quad (8)$$

$$c'(\infty, p) = 0, \quad (9)$$

где $H = \beta/D$.

Решение уравнения (3) в общем виде представляется в виде

$$c(x, p) - c_0/p = A_1 \exp(\sqrt{p/D}x) + B_1 \exp(-\sqrt{p/D}x). \quad (10)$$

Из условия (9) следует $A_1 = 0$. Физически это означает, что концентрация на большом расстоянии от поверхности тела не изменится за все время процесса диффузии, т. е. $c \rightarrow c_0$ при $x \rightarrow \infty$.

Постоянную B_1 находим из граничного условия (8):

$$-\sqrt{p/D}B_1 + H[c_0/p - B_1] = 0$$

откуда

$$B_1 = (c_a - c_0) / (p(1 + 1/H\sqrt{p/D})). \quad (11)$$

Тогда решение для изображения примет вид:

$$c(x, p) - c_0/p = (c_a - c_0) / (p(1 + 1/H\sqrt{p/D})) \exp(-\sqrt{p/D}x). \quad (12)$$

Для нахождения оригинала воспользуемся таблицей изображений, из которой находим

$$L^{-1} \left[\frac{1}{p(1 + 1/c\sqrt{p})} e^{-k\sqrt{p}} \right] = \operatorname{erfc} \left(k / (2\sqrt{\tau}) \right) - \exp(ck + c^2\tau) \operatorname{erfc} \left(k / (2\sqrt{\tau}) + c\sqrt{\tau} \right). \quad (13)$$

Следовательно, решение задачи принимает вид:

$$(c(x, \tau) - c_0) / (c_a - c_0) = \operatorname{erfc} \left(x / (2\sqrt{D\tau}) \right) - \exp(Hx + H^2D\tau) \operatorname{erfc} \left(x / (2\sqrt{D\tau}) + H\sqrt{D\tau} \right). \quad (14)$$

Выражение (14) является математической зависимостью, описывающей распределение углерода в цементованном слое в разные моменты науглероживания. Зная β , D и задавая требуемое распределение концентрации углерода, можно рассчитать необходимое время цементации.

Данная математическая модель носит весьма общий характер и может успешно использоваться при вакуумной цементации дольных сталей. Влияние отмеченных особенностей процесса науглероживания учитывается значениями β и D .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Цепов С. Н. Особенности науглероживания стали при вакуумной цементации // МиТОМ, 1979. № 8. С. 50–56.
2. Лахтин Ю. М., Арзамасов Б. Н. Химико-термическая обработка металлов. М.: Металлургия, 1985. 216 с.

Поступила 07.03.2003 г.