Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Стружанов, Е. Ю. Просвиряков, Растяжение с кручением. Сообщение 2: Устойчивость процесса деформирования образца в механической системе. Жёсткое и мягкое нагружения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 77–86

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:50:00

УДК 539.3:517.023

РАСТЯЖЕНИЕ С КРУЧЕНИЕМ. СООБЩЕНИЕ 2: УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБРАЗЦА В МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ. ЖЁСТКОЕ И МЯГКОЕ НАГРУЖЕНИЯ

В. В. Стружанов¹, Е. Ю. Просвиряков²

¹ Институт машиноведения УрО РАН,
620219, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

² Уральский государственный университет им. А. М. Горького,
620083, г. Екатеринбург, пр-т Ленина, 51.

E-mails: stru@imach.uran.ru, evgen_pros@mail.ru

Рассмотрено растяжение с кручением полого цилиндрического образца в составе механической системы, состоящей из двух упругих цилиндрических стержней, передающих нагрузку на образец. Устойчивость системы исследована методами теории катастроф и теории особенностей дифференцируемых отображений для случаев жёсткого и мягкого нагружений.

Ключевые слова: матрица Гессе (гессиан), якобиан отображения, критические точки и критические значения, устойчивость, дискриминантный конус, жёсткое и мягкое нагружения.

1. Механическая система, реализующая растяжение с кручением образца.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух упругих цилиндрических стержней 1 и 2, передающих нагрузку на полый цилиндрический образец (рис. 1). Стержень 1 работает только на растяжение (кручение заблокировано). В сечении $A-A$ могут быть приложены растягивающие силы с результирующей P (мягкое нагружение), либо точкам сечения задаётся перемещение u (жёсткое нагружение). Жёсткость стержня 1 при растяжении равна λ_1 . Стержень 2 работает только на кручение (продольное перемещение сечения $C-C$ заблокировано). В сечении $D-D$ может быть приложен крутящий момент M (мягкое нагружение) либо задан угол закручивания ψ (жёсткое нагружение). Жёсткость стержня 2 при кручении равна λ_2 .

Рис. 1. Механическая система нагружения образца

При данной схеме нагружения в образце 3 возникают растягивающее напряжение σ и деформация ϵ , а также касательные напряжения и сдвиги. Полагаем, что образец имеет единичные высоту и средний радиус поперечного сечения, а толщина стенки равна $\frac{1}{2\pi}$. В этом случае растягивающая сила, действующая непосредственно на образец, равняется по величине напряже-

*Стружанов Валерий Владимирович — главный научный сотрудник отдела механики машин и технологий ИМАШ УрО РАН; д.ф.-м.н., профессор.
Просвиряков Евгений Юрьевич — магистрант кафедры теоретической механики Уральского государственного университета.*

нию σ (площадь поперечного сечения равна единице), а перемещение конца образца, примыкающего к стержню 1, равно деформации ε . Кроме того, касательные напряжения и сдвиги можно заменить значениями касательного напряжения τ и сдвига γ на средней линии поперечного сечения, умноженному на соответствующие коэффициенты, определяемые внешним и внутренним диаметрами. Не нарушая общности дальнейших рассуждений, будем пренебрегать величиной этих коэффициентов, полагая их равными единице. Тогда крутящий момент равняется τ , а угол закручивания — γ .

Полагаем, что свойства материала образца определяются потенциальной функцией $\Pi(\varepsilon, \gamma)$, т. е. работа напряжений не зависит от вида пути деформирования и равна значениям потенциала Π . В этом случае инкрементальные модули заданы элементами матрицы Гессе [1]:

$$H(\Pi) = \begin{pmatrix} \Pi_{,\varepsilon\varepsilon} & \Pi_{,\varepsilon\gamma} \\ \Pi_{,\varepsilon\gamma} & \Pi_{,\gamma\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad c_{12} = c_{21}, \quad (1.1)$$

а инкрементальные соотношения, связывающие приращения напряжений и деформаций, имеют следующий вид:

$$d\sigma = c_{11}d\varepsilon + c_{12}d\gamma, \quad d\tau = c_{21}d\varepsilon + c_{22}d\gamma.$$

Здесь и ниже запятая, стоящая после знака функции, обозначает частные производные по переменным, обозначенным после запятой.

В дальнейшем в иллюстративных примерах будем использовать потенциал [1]

$$\Pi(\varepsilon, \gamma) = \begin{cases} \frac{\sin(a(E\varepsilon^2 + G\gamma^2))}{2a}, & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \in V, \\ 0, & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \notin V, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $a = \frac{50\pi}{E}$, $E = 1,96 \cdot 10^5$ МПа — модуль Юнга, $G = 7,546 \cdot 10^4$ МПа — модуль сдвига, $V = \{\varepsilon, \gamma : \varepsilon, \gamma \geq 0, E\varepsilon^2 + G\gamma^2 \leq \frac{\pi}{2a}\}$.

2. Жёсткое нагружение. Жёсткое нагружение системы осуществляем заданием монотонно возрастающих величин u и ψ . В этом случае состояние механической системы описывает потенциальная функция

$$W_1 = \lambda_1 \frac{(u - \varepsilon)^2}{2} + \lambda_2 \frac{(\psi - \gamma)^2}{2} + \Pi(\varepsilon, \gamma), \quad (2.1)$$

где первые два слагаемых — потенциальные энергии упругих деформаций соответственно стержней 1 и 2. Деформации $\varepsilon, \gamma \geq 0$ здесь играют роль параметров состояния системы, а величины $u, \psi, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ — параметров управления. Таким образом, выражение (2.1) задаёт четырёхпараметрическое семейство функций.

Критические точки функции W_1 определяет система уравнений $\nabla_2 W_1 = 0$ [2], т. е.

$$W_{1,\varepsilon} = \sigma(\varepsilon, \gamma) - \lambda_1(u - \varepsilon) = 0, \quad W_{1,\gamma} = \tau(\varepsilon, \gamma) - \lambda_2(\psi - \gamma) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь $\sigma = \Pi_{,\varepsilon}$, $\tau = \Pi_{,\gamma}$, ∇_2 — оператор Гамильтона в пространстве $\mathbb{R}_\varepsilon^2 = \{\varepsilon, \gamma\}$. Решения уравнений равновесия (2.2) образуют четырёхмерное многообразие равновесных состояний (многообразие катастроф [2]) в пространстве $\mathbb{R}_\varepsilon^2 \times \mathbb{R}_\lambda^2 \times \mathbb{R}_u^2$, где $\mathbb{R}_\lambda^2 = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\mathbb{R}_u^2 = \{u, \psi\}$. Проекция этого многообразия

в пространство $\mathbb{R}_\varepsilon^2$ составляет множество $\Gamma = \{\varepsilon, \gamma\}$, проекция в пространство $\mathbb{R}_\lambda^2$ — множество $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$, проекция в пространство $\mathbb{R}_u^2$ — множество $U = \{u, \psi \geq 0\}$.

Если зафиксировать λ_1 и λ_2 , то формулы (2.2) задают отображение $\chi_1 : \mathbb{R}_\varepsilon^2 \rightarrow \mathbb{R}_u^2$ (или $\Gamma \rightarrow U$). Якобиан этого отображения

$$I_1 = \begin{pmatrix} \frac{c_{11}}{\lambda_1} + 1 & \frac{c_{12}}{\lambda_1} \\ \frac{c_{21}}{\lambda_2} & \frac{c_{22}}{\lambda_2} + 1 \end{pmatrix}.$$

Если якобиан I_1 не вырожден, т.е. $\det I_1 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} [(\lambda_1 + c_{11})(\lambda_2 + c_{22}) - c_{12}^2] \neq 0$, то отображение χ_1 есть локальный гомеоморфизм (локальное взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение) [3]. Точки из $\mathbb{R}_\varepsilon^2$, в которых якобиан вырожден, называются критическими точками отображения χ_1 . Их образы в пространстве $\mathbb{R}_u^2$ составляют множество критических значений отображения [4]. Согласно теореме Сарда [4] это множество имеет меру нуль. Таким образом, множество критических значений отображения χ_1 в пространстве $\mathbb{R}_u^2$ представляет собой некоторую кривую (или кривые). Очевидно, что расположение критических точек и критических значений отображения χ_1 в пространствах $\mathbb{R}_\varepsilon^2$ и $\mathbb{R}_u^2$ будет зависеть от значений параметров λ_1 и λ_2 .

Определим критические точки и критические значения отображения χ_1 , используя потенциал (1.2) и значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 4,9 \cdot 10^5$ МПа. На рис. 2, а изображены критические точки отображения χ_1 , образующие две линии 1 и 2, которые разбивают множество Γ на три области: I, II, III. Отметим, что после пересечения путём деформирования линии 2 величины σ , τ , c_{11} , c_{22} , c_{12} обращаются в нуль, то есть образец разрушается. В результате отображение χ_1 принимает вид $u = \varepsilon$, $\psi = \gamma$. Нетрудно показать, что в области III якобиан I_1 имеет положительные собственные значения, и поэтому он в области III положительно определён. В начале деформирования материал находится в упругом состоянии ($c_{11} = E$, $c_{22} = G$, $c_{12} = 0$). Здесь E — модуль Юнга, G — модуль сдвига материала образца, находящегося в упругом состоянии. Ясно, что в этом случае якобиан I_1 положительно определён. Так как начальный отрезок пути деформирования расположен в области I (см. рис. 2, а), то якобиан I_1 должен сохранять положительную определённость во всей области I (знак собственного значения может поменяться только при пересечении кривой 1). В области II якобиан I_1 имеет собственные значения разных знаков.

Рис. 2. Линии критических точек (а) и критических значений (б) отображения χ_1 при $\lambda_1 = \lambda_2 = 4,9 \cdot 10^4$ МПа

Напомним, что в точках линий 1 и 2 одно из собственных значений якобиана обращается в нуль.

Далее, кривые 1 и 2 из $\mathbb{R}_e^2$ отображаются соответственно в кривые AB (кривая 1) и CD (кривая 2), точки которых являются критическими значениями отображения χ_1 в $\mathbb{R}_u^2$ (см. рис. 2, б). Отсюда следует, что область I из $\mathbb{R}_e^2$ отображается на плоскость OAB в $\mathbb{R}_u^2$, область II — на плоскость $ABCD$, а область III — на плоскость, являющуюся внешностью линии CD (см. рис. 2, б). Поэтому каждая точка линий AB и CD имеет по два прообраза в $\mathbb{R}_e^2$, а каждая точка из области $ABCD$ — по три прообраза. Таким образом, кривые AB и CD являются бифуркационными кривыми, которые отделяют точки $\{u, \psi\} \in \mathbb{R}_u^2$, дающие одно решение уравнений (2.2), от точек, дающих три решения.

Рис. 3. Складка в пространстве $\mathbb{R}_u^2$

Если расщечь обозначенные плоскости по некоторой прямой l (см. рис. 2, б), то взаимное расположение плоскостей будет таковым, каким оно схематически представлено на рис. 3. Видно, что плоскости образуют складку.

Увеличим параметры λ_1 и λ_2 до значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,94 \cdot 10^5$ МПа. Критические точки отображения χ_1 в этом случае образуют кривые AB и BC (см. рис. 4, а).

Эти кривые ограничивают область II, где собственные значения якобиана I_1 имеют разные знаки. Во внешности области II собственные значения якобиана положительны (якобиан положительно определен). В свою очередь, внешность области II разбивается на части I и III пунктирной линией BD , являющейся продолжением линии BC (рис. 4, а). На этой кривой инкрементальные модули материала образца обращаются в нуль, т. е. в области III образец разрушен.

При отображении в $\mathbb{R}_u^2$ линии AB и BC переходят соответственно в кривые $A'B'$ и $B'C'$ (рис. 4, б), точки которых являются критическими значениями отображения χ_1 . Область I отображается на плоскость $OD'B'A'$, область III — на плоскость, являющуюся внешностью линии $D'B'C'$, а область II — на плоскость $C'B'A'$. Кривые $B'C'$ и $B'A'$ — это бифуркационные кривые, кото-

Рис. 4. Линии критических точек (а) и критических значений (б) отображения χ_1 при $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,94 \cdot 10^5$ МПа

рые отделяют точки области $C'B'A'$, дающие три решения уравнений (2.2), от точек плоскости $Ou\psi$, дающих одно решение.

Если рассечь данные плоскости по линии, пересекающей кривые $B'C'$ и $B'A'$ (прямая l_1 , см. рис. 4, б), то взаимное расположение плоскостей будет таковым, каким оно схематически представлено на рис. 5. Видно, что плоскости образуют сборку.

Перейдём теперь к исследованию устойчивости процесса деформирования. Известно [2], что тип равновесия (устойчивость или неустойчивость состояния равновесия) определяется собственными значениями матрицы Гессе потенциальной функции W_1 . В нашем случае гессиан функции W_1 равен $\nabla_2 \nabla_2 W_1$ или

$$H(W_1) = \begin{pmatrix} W_{1,\varepsilon\varepsilon} & W_{1,\varepsilon\gamma} \\ W_{1,\gamma\varepsilon} & W_{1,\gamma\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \lambda_2 + c_{22} \end{pmatrix}.$$

Если $\det H(W_1) \neq 0$, то теорема Морса [2] гарантирует существование гладкой замены переменной такой, что потенциальная функция локально может быть представлена квадратичной формой

$$W_1 \doteq \varkappa_1 y_1^2 + \varkappa_2 y_2^2. \quad (2.3)$$

Здесь $\varkappa_1, \varkappa_2$ — собственные значения матрицы $H(W_1)$, вычисленные для состояния равновесия; y_1, y_2 — новые переменные. С учётом новой замены координат в соответствии с $z_1 = \sqrt{|\varkappa_1|}y_1, z_2 = \sqrt{|\varkappa_2|}y_2$ квадратичная форма (2.3) может быть приведена к одной из морсовских канонических форм [2]: $W_1 \doteq z_1^2 + z_2^2 = M_0^2(z)$ (собственные значения положительные), $W_1 \doteq -z_1^2 + z_2^2 = M_1^2(z)$ (собственные значения разных знаков), $W_1 \doteq -z_1^2 - z_2^2 = M_2^2(z)$ (собственные значения отрицательны). Функция M_i^n называется морсовским i — седлом (i — число отрицательных собственных значений, n — общее число собственных значений). Исключительно морсовские 0 — седла имеют локальный минимум в точке равновесия, так что только такие седла локально устойчивы. Морсовское 2 — седло имеет локальный максимум (неустойчивость). Морсовское 1 — седло определяет в положении равновесия традиционную седловую точку в пространстве $\mathbb{R}_e^2$, поэтому устойчивость (неустойчивость) зависит от характера изменения управляющих параметров.

Критические точки функции W_1 , в которых $\det H(W_1) \neq 0$, называются изолированными, невырожденными или морсовскими. Критические точки, в которых $\det H(W_1) = 0$, называются неизолированными, вырожденными или неморсовскими. Морсовские критические точки структурно устойчивы. Возмущение потенциальной функции в этой точке не влияет на качественный характер поведения функции в окрестности данной точки. Тип критической точки сохраняется и, следовательно, сохраняется тип равновесия системы. Неморсовские критические точки структурно неустойчивы. Возмущение потенциальной функции в такой точке вызывает качественные изменения в поведении самой функции в окрестности неморсовской критической точки. Вырожденная критическая точка расщепляется на несколько изолированных критических точек. У механической системы появляется новое положение

Рис. 5. Сборка в пространстве $\mathbb{R}_u^2$

равновесия, в которое она переходит скачкообразно (происходит катастрофа). Таким образом, в вырожденных критических точках происходит смена типа равновесия [3]. Итак, вырожденные критические точки определяются из совместного решения уравнений (2.2) и уравнения

$$\det H(W_1) = (\lambda_1 + c_{11})(\lambda_2 + c_{22}) - c_{12}^2 = 0. \quad (2.4)$$

В уравнении (2.4) отсутствуют параметры управления u и ψ , а критические точки в пространствах $\mathbb{R}_\epsilon^2$ и $\mathbb{R}_\lambda^2$ (правильнее — их проекции в эти пространства) полностью заполняют множества Γ и Λ , поэтому вырожденные критические точки определяются только одним уравнением (2.4). Учитывая, что $\det H(W_1) = \lambda_1 \lambda_2 \det I_1$, получаем совпадение проекций вырожденных критических точек функции W_1 в пространство $\mathbb{R}_\epsilon^2$ с критическими точками отображения χ_1 . Отсюда вырожденные критические точки многообразия катастроф при проекции их в пространство $\mathbb{R}_\epsilon^2$ образуют линии критических точек отображения χ_1 (см. рис. 2, а, рис. 4, а), а при их проекции в пространство $\mathbb{R}_u^2$ — линии критических значений отображения χ_1 (см. рис. 2, б, рис. 4, б).

Рассмотрим теперь пространство $\mathbb{R}_H^3 = \{\lambda_1 + c_{11}, \lambda_2 + c_{22}, c_{12}\}$, в котором координатную систему определяют элементы матрицы Гессе. В этом случае элементы гессиана задают отображение $F_1 : \mathbb{R}_\epsilon^2 \times \mathbb{R}_\lambda^2 \rightarrow \mathbb{R}_H^3$. Множество точек в $\mathbb{R}_H^3$, в которых матрица Гессе особенная, имеет две компоненты. Это L_1 (в ней лишь одно собственное значение равно нулю) и L_2 (в ней обращаются в нуль оба собственных значения). Размерность этих подмножеств определяется по формуле [5]

$$\dim L_i = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{2}, \quad (2.5)$$

Рис. 6. Дискриминантный конус в координатах $X = \lambda_1 + c_{11}$, $Y = \lambda_2 + c_{22}$, $Z = c_{12}$

где n — размерность матрицы Гессе, l — число нулевых собственных значений. Отсюда $\dim L_1 = 2$, $\dim L_2 = 0$. Подмножество L_1 является поверхностью второго порядка в $\mathbb{R}_H^3$, называемой дискриминантным конусом матрицы Гессе; подмножество L_2 состоит из одной точки, а именно — вершины конуса, что следует из решения характеристического уравнения для матрицы $H(W_1)$.

Дискриминантный конус матрицы $H(W_1)$ (рис. 6) делит пространство $\mathbb{R}_H^3$ на две области (внутренность и внешность конуса). Внутри конуса матрица Гессе положительно определена (оба собственных значения положительны), вне конуса оба собственных значения гессиана имеют разные знаки или оба отрицательны. Следовательно, если образ отображения F_1 (точка в пространстве $\mathbb{R}_H^3$) располагается внутри дискриминантного конуса, то положение равновесия системы устойчиво; если вне конуса, то неустойчиво.

Процесс деформирования системы можно изобразить движением в пространстве $\mathbb{R}_H^3$ точки с координатами $X = \lambda_1 + c_{11}$, $Y = \lambda_2 + c_{22}$, $Z = c_{12}$ по некоторому пути (см. рис. 6). Этот путь начинается в точке $A(E + \lambda_1, G + \lambda_2, 0)$ и заканчивается в точке $B(\lambda_1, \lambda_2, 0)$, также расположенной внутри конуса и соответствующей разрушению образца. Если путь в $\mathbb{R}_H^3$ находится внутри дискриминантного конуса при постепенном возрастании параметров u и ψ , то соответствующий путь в пространстве $\mathbb{R}_u^2$ не пересекает бифуркационные кривые (например, путь l_2 , см. рис. 4, б). В этом случае процесс деформирования протекает равномерно, вплоть до самого разрушения образца.

Отметим, что данный вывод справедлив и тогда, когда путь в $\mathbb{R}_H^3$ только касается конической поверхности, а затем снова уходит в глубь конуса. Соответствующий путь в $\mathbb{R}_u^2$ проходит через точку B' (см. рис. 4, б).

Рассмотрим теперь случай, когда путь в $\mathbb{R}_H^3$ пересекает коническую поверхность. Соответствующий путь в $\mathbb{R}_u^2$ пересекает бифуркационные кривые (например, путь l , см. рис. 2, б). При пересечении первой кривой DC в некоторой точке a путь остаётся на верхней плоскости (см. рис. 3) и равновесный характер процесса сохраняется. После пересечения второй бифуркационной кривой AB в точке m (в то время как путь в $\mathbb{R}_H^3$ пересекает коническую поверхность) происходит скачкообразный переход с верхней плоскости (плоскость OAB) на нижнюю плоскость (внешность кривой DC). Этот скачок показан на рис. 3. Следовательно, после пересечения конической поверхности путь в $\mathbb{R}_H^3$ выходит в область неустойчивости и сразу скачкообразно переходит в точку разрушения, то есть происходит внезапное разрушение системы.

Отметим один вариант, при котором можно избежать внезапного разрушения. Пусть деформирование образца в системе осуществляется по прямой $\varepsilon = \gamma$ в пространстве $\mathbb{R}_e^2$. Образ этой прямой в пространстве $\mathbb{R}_u^2$ показан на рис. 7 (параметры $\lambda_1 = \lambda_2 = 4,9 \cdot 10^4$ МПа). Путь в $\mathbb{R}_u^2$ сначала достигает второй бифуркационной кривой AB , затем разворачивается и устремляется к первой бифуркационной кривой CD ; после её достижения разворачивается в обратном направлении. Таким образом, непрерывное деформирование образца возможно лишь при разгрузке, осуществляемой по определённому закону (линия MN , см. рис. 7).

Если же вести пропорциональное нагружение системы ($u = \psi$), то после достижения путём в $\mathbb{R}_u^2$ второй бифуркационной линии AB путь в $\mathbb{R}_e^2$ претерпевает разрыв (рис. 8), т. е. параметры состояния скачкообразно возрастают. Как было показано выше, этот скачок заканчивается разрушением образца.

3. Мягкое нагружение. Мягкое нагружение системы осуществляем заданием монотонно возрастающих параметров P и M . Состояние системы в этом

Рис. 7. Образ пропорционального деформирования образца в системе

Рис. 8. Разрыв пути деформирования образца

случае характеризует потенциальная функция

$$W_2 = W_1(\varepsilon, \gamma) - \int_0^u P du - \int_0^\psi M d\psi, \quad (3.1)$$

где второе и третье слагаемые — работа внешних сил, взятая со знаком минус. Роль параметров состояния здесь играют величины $(\varepsilon, \gamma, u, \psi) \in \mathbb{R}_e^2 \times \mathbb{R}_u^2$, а роль параметров управления — величины $(P, M, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_M^2 \times \mathbb{R}_\lambda^2$ ($\mathbb{R}_M^2 = \{P, M\}$). Таким образом, выражение (3.1) определяет четырёхпараметрическое семейство функций параметров состояния.

Критические точки функции W_2 являются решениями системы уравнений $\nabla_4 W_2 = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} W_{2,\varepsilon} &= \sigma(\varepsilon, \gamma) - \lambda_1(u - \varepsilon) = 0, & W_{2,\gamma} &= \tau(\varepsilon, \gamma) - \lambda_2(\psi - \gamma) = 0, \\ W_{2,u} &= \lambda_1(u - \varepsilon) - P = 0, & W_{2,\psi} &= \lambda_2(\psi - \gamma) - M = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где ∇_4 — оператор Гамильтона в пространстве $\mathbb{R}_e^2 \times \mathbb{R}_M^2$. Решения уравнений равновесия (3.2) образуют параметризованное четырёхмерное многообразие равновесных состояний (многообразие катастроф) в пространстве $\mathbb{R}_e^2 \times \mathbb{R}_u^2 \times \mathbb{R}_\lambda^2 \times \mathbb{R}_M^2$. Проекция этого многообразия в пространство $\mathbb{R}_e^2$ образует множество Γ , проекция в пространство $\mathbb{R}_\lambda^2$ — множество Λ , проекция в пространство $\mathbb{R}_u^2$ — множество U , проекция в пространство $\mathbb{R}_M^2$ — множество $Q = \{P, M \geq 0\}$.

Уравнения (3.2) приводятся к двум уравнениям:

$$\sigma(\varepsilon, \gamma) - P = 0, \quad \tau(\varepsilon, \gamma) - M = 0, \quad (3.3)$$

которые фактически и определяют критические точки функции W_2 , так как если известны $\varepsilon, \gamma, P, M$ — решения уравнений (3.3), то при фиксированных λ_1 и λ_2 из уравнений (3.2) сразу вычисляются параметры u и ψ , соответствующие данному равновесию. Другими словами, решения уравнений (3.3) задают параметризованное двумерное многообразие в пространстве $\mathbb{R}_e^2 \times \mathbb{R}_M^2$, являющееся проекцией четырёхмерного многообразия равновесных состояний в данное пространство.

Формулы (3.3) задают отображение $\chi_2 : \mathbb{R}_e^2 \rightarrow \mathbb{R}_M^2$. Якобиан этого отображения

$$I_2 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Сравнивая его с матрицей (1.1), находим, что данный якобиан совпадает с гессианом функции Π , определяющим инкрементальные модули материала образца. Если якобиан невырожден, т. е.

$$\det I_2 = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \neq 0,$$

то отображение χ_2 есть локальный гомеоморфизм. Критические точки, где $\det I_2 = 0$, и критические значения отображения χ_2 образуют соответственно в пространствах $\mathbb{R}_e^2$ и $\mathbb{R}_M^2$ бифуркационные кривые. Очевидно, что расположение кривых не зависит от значений параметров λ_1, λ_2 и u, ψ . В пространстве $\mathbb{R}_e^2$ имеются две кривые, расположение которых подобно кривым,

изображённым на рис. 2, а; в пространстве $\mathbb{R}_M^2$ — только одна кривая, получающаяся отображением ближайшей к началу координат кривой в $\mathbb{R}_e^2$. Дальняя кривая отображается в точку $(0, 0) \in \mathbb{R}_M^2$.

Исследуем теперь устойчивость процесса деформирования. Матрица Гессе функции W_2 имеет вид

$$H(W_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + c_{11} & c_{12} & -\lambda_1 & 0 \\ c_{21} & \lambda_2 + c_{22} & 0 & -\lambda_2 \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя детерминант этой матрицы, находим, что $\det H(W_2) = \lambda_1 \lambda_2 \det I_2 = \lambda_1 \lambda_2 \det H(\Pi)$. Так как $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, а матрица $H(\Pi)$ второго порядка, то матрица $H(W_2)$ может иметь только одно или два нулевых собственных значения, т. е. $\text{rank } H(W_2) \geq 2$.

В самом общем случае компоненты матрицы Гессе четвёртого порядка параметризуют десятимерное пространство $\mathbb{R}_H^{10}$. Иначе говоря, элементы гессиана задают отображение $F_2 : \mathbb{R}_e^2 \times \mathbb{R}_\lambda^2 \rightarrow \mathbb{R}_H^{10}$. Если ранг матрицы Гессе больше или равен двум, то множество особых точек состоит из двух подмножеств. Первое подмножество L'_2 составляют точки, где матрица имеет два нулевых собственных значения, второе подмножество L'_1 — точки, где матрица имеет одно нулевое собственное значение. Вычисляя их размерности по формуле (2.5), находим, что $\dim L'_2 = 7$, $\dim L'_1 = 9$. Но в матрице Гессе нашей системы семь компонент являются константами, т. е. в пространстве $\mathbb{R}_H^{10}$ изменяются только три координаты, а именно, $X_1 = \lambda_1 + c_{11}$, $X_2 = \lambda_2 + c_{22}$, $X_5 = c_{12}$. Тогда, на самом деле, реальная размерность множеств, где матрица Гессе особенна, соответственно равна 0 и 2, т. е. меньше на семь.

Положим $c_{11} = c_{22} = c_{12} = 0$. Непосредственно проверяется, что матрица Гессе имеет точно два нулевых собственных значения. Следовательно, подмножество, где гессиан имеет два нулевых собственных значения, состоит из одной точки $L'_2 = \{\lambda_1, 0, -\lambda_1, 0, \lambda_2, 0, -\lambda_2, \lambda_1, 0, \lambda_2\}$. Очевидно, что теперь множество L_1 определяется уравнением

$$\det I_2 = \det H(\Pi) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0 \quad (c_{11}, c_{22}, c_{12} \neq 0),$$

которое задаёт коническую поверхность второго порядка с вершиной в точке L'_2 . Данная поверхность является дискриминантным конусом матрицы $H(\Pi)$.

Если теперь в точке L'_2 построить ортогональную систему координат $X_1 = \lambda_1 + c_{11}$, $X_2 = \lambda_2 + c_{22}$, $X_3 = c_{12}$, то получим пространство $\mathbb{R}_c^3$, параметризуемое элементами матрицы $H(\Pi)$. Пространство $\mathbb{R}_c^3$ отличается от пространства $\mathbb{R}_H^3$ только началом координат (в первом начало координат определяется значениями $c_{11} = c_{22} = c_{12} = 0$, во втором — $c_{11} = -\lambda_1$, $c_{22} = -\lambda_2$, $c_{12} = 0$). Отсюда дискриминантный конус матрицы $H(\Pi)$ в пространстве $\mathbb{R}_c^3$ получается перемещением вершины дискриминантного конуса матрицы $H(W_1)$ в точку $X_1 = X_2 = X_3 = 0$. Следовательно, данная вершина отвечает разрушению образца. Отметим, что внутри дискриминантного конуса матрицы $H(\Pi)$ эта матрица положительно определена. Рассматривая внутренние точки конуса как точки пространства $\mathbb{R}_H^{10}$, находим, что и матрица $H(W_2)$ положительно определена внутри конуса.

Из равенства $\det H(W_2) = \lambda_1 \lambda_2 \det I_2$ следует, что вырожденные критические точки функции W_2 в пространстве $\mathbb{R}_e^2$ совпадают с критическими точками отображения χ_2 , т. е. критические точки многообразия катастроф при их

проекции в пространство $\mathbb{R}_e^2$ образуют линии критических точек отображения χ_2 , а при проекции в пространство $\mathbb{R}_M^2$ — линию критических значений и одну точку (начало координат). Таким образом, пересечение дискриминантного конуса матрицы $H(\Pi)$ в пространстве $\mathbb{R}_e^3$ соответствует пересечению бифуркационной линии (линии критических значений отображения χ_2) в пространстве R_M^2 . В этот момент процесс деформирования теряет устойчивость и она скачком (динамически) переходит в положение, отвечающее вершине конуса, т. е. образец в результате скачка разрушается.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-08-00125).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Стружанов, В. В. Растяжение с кручением. Сообщение 1: Свойства материала [Текст]/ В. В. Стружанов, Е. Ю. Просвирыков // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2008. — № 1(16). — 36–44 с. — ISSN 1991-8615.
2. Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф [Текст]: В 2-х книгах/ Р. Гилмор. — М.: Мир, 1984. — Кн. 1. — 350 с.
3. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст]/ А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Наука, 1989. — 624 с.
4. Арнольд, В. И. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов [Текст]/ В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. — М.: Наука, 1982. — 304 с.
5. Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф [Текст]: В 2-х книгах/ Р. Гилмор. — М.: Мир, 1984. — Кн. 2. — 285 с.

Поступила в редакцию 23/VI/2008;
в окончательном варианте — 15/VIII/2008.

MSC: 74H55

TENSION WITH TORSION. PART 2. DEFORMATION PROCESS STABILITY OF A SAMPLE IN A MECHANICAL SYSTEM. RIGID AND SOFT LOADINGS

V. V. Struzhanov¹, E. Yu. Prosviryakov²

¹ Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Sciences, 620219, Ekaterinburg, Pervomajskaya st., 91.

² Ural State University, 620083, Ekaterinburg, pr. Lenina, 51.

E-mails: stru@imach.uran.ru, evgen_pros@mail.ru

Tension with torsion of a hollow cylindrical sample within the mechanical system structure consisting of two elastic cylindrical rods, transmitting loading on a sample is studied. System stability is determined by methods of catastrophe theory and theory of differentiated mapping peculiarities for soft and rigid loadings.

Key words: *Hessian, Jacobian of mapping, critical points and critical values, stability, a discriminantal cone, rigid and soft loading.*

Original article submitted 23/VI/2008;
revision submitted 15/VIII/2008.

*Struzhanov Valeriy Vladimirovich, Dr. Sci. (Phis. & Math.) Prof., Division of Machines Mechanics and Technology of Institute of Engineering Science.
Prosviryakov EugeniY Yuriyevich, Graduate Student, Dept. of Theoretical Mechanics of Ural State University.*