Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Степанова, Уточнённый расчет поля напряжений у вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряжённого состояния в материале с дробно-линейным законом теории установившейся ползучести, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 94–109

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:39:25

УДК 539.376

УТОЧНЁННЫЙ РАСЧЁТ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ В МАТЕРИАЛЕ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ ТЕОРИИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Л. В. Степанова

Самарский государственный университет,
443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

E-mail: 1st@ssu.samara.ru

Приводится приближенное решение задачи определения полей напряжений и скоростей деформаций ползучести у вершины трещины поперечного сдвига (трещины типа II) в материале с дробно-линейным законом теории установившейся ползучести. Получено поле напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины, представляющееся различными зависимостями в четырёх клинообразных областях. Дано сравнение найденного аналитического решения статически определимой задачи с предельным решением для степенного закона теории ползучести (при неограниченном возрастании показателя нелинейности материала). Показано, что скорости деформаций проявляют сингулярное поведение вблизи вершины трещины $\dot{\epsilon} \sim r^{-\alpha}$, причём показатель сингулярности α меняется дискретно в зависимости от полярного угла, принимая значения 1, 2/3, 1/2.

Ключевые слова: механика разрушения, трещина поперечного сдвига, дробно-линейный закон теории установившейся ползучести, напряжённо-деформированное состояние у вершины трещины.

Введение. Анализ полей напряжений и деформаций (скоростей деформаций) в окрестности вершины трещины или углового выреза составляет одну из основных задач механики трещин и механики разрушения в целом. Сейчас развитие современной механики деформируемого твёрдого тела по мере накопления экспериментальных данных идёт по пути постепенного усложнения и уточнения определяющих соотношений, связывающих напряжения и деформации (скорости деформаций). В рамках теории установившейся ползучести широкое распространение получил степенной закон ползучести. Хорошо известны также экспоненциальный закон Людвига и закон гиперболического синуса Надаи [1]. В [2, 3] были предложены принципиально другие определяющие уравнения теории установившейся ползучести, материальные константы в которых имеют чёткий физический смысл. Частным случаем предложенных определяющих уравнений является дробно-линейный закон ползучести, имеющий в случае одноосного нагружения вид

$$\dot{\epsilon} = B \frac{\sigma}{\sigma_b - \sigma}, \quad (1)$$

где σ — напряжение, $\dot{\epsilon}$ — скорость деформации ползучести, B, σ_b — постоянные материала. Постоянная σ_b может трактоваться как некоторая обобщённая характеристика длительной прочности на выбранном отрезке времени

Степанова Лариса Валентиновна — доцент кафедры математического моделирования в механике Самарского государственного университета; к.ф.-м.н, доцент.

работы рассматриваемого элемента конструкции. Можно также рассматривать σ_b как характеристику мгновенной прочности, находимую из опытов на одноосное разрушение. В любом случае значение σ_b определяется достаточно надёжно и имеет ясный физический смысл. Параметр B является характеристикой, определяющей скорость деформирования. При обработке конкретных экспериментальных данных эти параметры определяются достаточно устойчиво. Дробная модель физически более обоснована по сравнению со степенной моделью Бейли—Нортон и имеет перед ней неоспоримые преимущества. Дробная модель [2, 3] учитывает максимальное предельное напряжение, характеризующее мгновенное разрушение металла при температуре испытаний, она также может описывать линейную ползучесть при малых напряжениях и различие характеристик длительной прочности при растяжении и сжатии. Более того, дробная модель может учитывать наличие ненулевого предела ползучести, ограничивающего снизу диапазон напряжений, при котором развивается процесс ползучести. В настоящее время дробная модель установившейся ползучести и длительной прочности является предметом многочисленных исследований [4–7].

С точки зрения механики разрушения, интерес представляет определение полей напряжений и скоростей деформаций ползучести в окрестности вершин трещин различных типов при использовании дробно-линейной аппроксимации. Исследование напряжённо-деформированного состояния у вершины трещины антиплоского сдвига и нормального отрыва в материале с дробно-линейным законом ползучести было выполнено в [8–10]. Проведённый анализ показал, что скорости деформаций ползучести сингулярны в окрестности вершины трещины, причём показатель сингулярности меняется дискретным образом в зависимости от полярного угла при приближении к вершине трещины. Предметом настоящего исследования является анализ напряжений и скоростей деформаций ползучести у устья трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряжённого состояния. Полученное решение дополняет существующий класс решений задач исследования напряжённого состояния в окрестности вершин трещин различных типов в материале с дробно-линейным определяющим соотношением.

1. Постановка задачи. Плоское напряжённое состояние. Целью настоящего исследования является изучение полей напряжений и скоростей деформаций ползучести в непосредственной окрестности вершины трещины поперечного сдвига в материале, описываемом дробно-линейным законом теории установившейся ползучести в условиях плоского напряжённого состояния:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e} s_{ij}, \quad f(\sigma_e) = B \frac{\sigma_e}{\sigma_b - \sigma_e}, \quad (2)$$

где B , σ_b — материальные константы, $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести, s_{ij} — девиатор тензора напряжений, $\sigma_e^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}$ — интенсивность напряжений. В случае принятия гипотезы о реализации плоского напряжённого состояния определяющие уравнения задачи принимают вид (в полярной системе координат с полюсом в вершине трещины)

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{1}{2} B \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\sigma_b - \sigma_e}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{2} B \frac{2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{\sigma_b - \sigma_e}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{3}{2} B \frac{\sigma_{r\theta}}{\sigma_b - \sigma_e}, \quad (3)$$

где $\sigma_e = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\sigma_{r\theta}^2}$.

Уравнения равновесия и условия совместности в полярной системе координат представляются в форме

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0, \quad (4)$$

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\dot{\varepsilon}_{r\theta}}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial^2\dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial\dot{\varepsilon}_{rr}}{\partial r} + r\frac{\partial^2(r\dot{\varepsilon}_{\theta\theta})}{\partial r^2}. \quad (5)$$

Граничные условия задачи есть условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0. \quad (6)$$

В силу симметрии задачи можно перейти к изучению одной из полуплоскостей, заменяя граничные условия на одном из берегов трещины условиями симметрии при $\theta = 0$:

$$\sigma_{rr}(r, \theta = 0) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) = 0. \quad (7)$$

По мере удаления от вершины трещины уровень напряжений значительно снижается, поэтому граничные условия в бесконечно удалённой точке есть условия асимптотического сближения с решением аналогичной задачи для линейно вязкого материала:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sqrt{\frac{C^*\sigma_b}{B2\pi r}} \left(-5\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sqrt{\frac{C^*\sigma_b}{B2\pi r}} \left(-3\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \sqrt{\frac{C^*\sigma_b}{B2\pi r}} \left(\cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где C^* — инвариантный интеграл нелинейной механики разрушения и для определения амплитуды поля напряжений в бесконечно удалённой точке использовалось свойство независимости от контура интегрирования C^* -интеграла. Введение безразмерных величин

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_b}, \quad \hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{B/2}, \quad \hat{r} = \frac{r}{L}, \quad L = \frac{C^*}{B\sigma_b} \quad (9)$$

даёт возможность представить определяющие уравнения задачи (2) в виде

$$\hat{\varepsilon}_{rr} = \frac{2\hat{\sigma}_{rr} - \hat{\sigma}_{\theta\theta}}{1 - \hat{\sigma}_e}, \quad \hat{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{2\hat{\sigma}_{\theta\theta} - \hat{\sigma}_{rr}}{1 - \hat{\sigma}_e}, \quad \hat{\varepsilon}_{r\theta} = 3\frac{\hat{\sigma}_{r\theta}}{1 - \hat{\sigma}_e}. \quad (10)$$

Граничные условия в бесконечно удалённой точке после перехода к безразмерным переменным принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{rr} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{r}}} \left(-5\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2} \right), \\ \hat{\sigma}_{\theta\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{r}}} \left(-3\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2} \right), \\ \hat{\sigma}_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{r}}} \left(\cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad \hat{r} \rightarrow \infty, \quad (11)$$

Уравнения равновесия и условие совместности сохраняют свою форму. В дальнейшем для краткости знак «шапочки» (циркумфлекс) опускается.

2. Асимптотический анализ. В определяющих уравнениях (2) σ_b представляет собой напряжение типа предела прочности, и компоненты тензора напряжений не могут превзойти данного значения. Подобно рассуждениям, проведённым при исследовании задач о трещинах нормального отрыва [9] и антиплоского сдвига [8], можно предположить, что условие, характеризующее наступление предельного состояния $\sigma_e = \sigma_b$ (или в безразмерных переменных $\sigma_e = 1$), реализуется лишь в одной точке — в вершине трещины. Поэтому асимптотическое разложение компонент тензора напряжений вблизи устья трещины ($r \rightarrow 0$) можно разыскивать в виде

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_{ij}^{(0)}(\theta) + r^\alpha \sigma_{ij}^{(1)}(\theta) + o(r^\alpha), \quad \sigma_e(r, \theta) = 1 - r^\alpha \sigma^{(1)}(\theta) + o(r^\alpha), \quad (12)$$

где $\alpha > 0$, $\sigma_{ij}^{(k)}(\theta)$ — функции, подлежащие определению. Тогда для отыскания главного члена асимптотического разложения компонент тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}(\theta)$ имеются система уравнений равновесия и условие наступления предельного состояния $\sigma_e = 1$. Можно заметить, что аналогичная система, состоящая из двух дифференциальных уравнений и одного алгебраического, получается при исследовании поля напряжений в окрестности вершины трещины в идеально пластическом материале. Подставляя (12) в уравнения равновесия (4) и условие предельного состояния, можно прийти к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\sigma_{r\theta}^{(0)}}{d\theta} + \sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = 0, \quad \frac{d\sigma_{\theta\theta}^{(0)}}{d\theta} + 2\sigma_{r\theta}^{(0)} = 0 \quad (13)$$

и алгебраическому условию

$$\left(\sigma_{rr}^{(0)}\right)^2 - \sigma_{rr}^{(0)}\sigma_{\theta\theta}^{(0)} + \left(\sigma_{\theta\theta}^{(0)}\right)^2 + 3\left(\sigma_{r\theta}^{(0)}\right)^2 = 1. \quad (14)$$

Условие предельного состояния (14) удовлетворяется, если положить

$$\sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\theta + c_1), \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta + c_1), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta + c_1), \quad (15)$$

где c_1 — произвольная постоянная. Известно [11, 12] и иное представление компонент тензора напряжений, ведущее к выполнению условия (14):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} &= a + b \cos 2\vartheta(\theta) + c \sin 2\vartheta(\theta), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= a - b \cos 2\vartheta(\theta) - c \sin 2\vartheta(\theta), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} &= -b \sin 2\vartheta(\theta) + c \cos 2\vartheta(\theta), \end{aligned} \quad (16)$$

где a, b, c — такие постоянные, что $(a/\sqrt{3})^2 + b^2 + c^2 = 1$. Необходимо отметить, что найти решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям на берегу трещины и условиям симметрии на продолжении трещины, используя лишь одно из представлений (15) или (16), не удаётся. Поэтому предполагается, что поле напряжений описывается формулами (15) или (16) в различных

характерных областях полуплоскости $0 \leq \theta \leq \pi$. Границы областей определяются из условий непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ при переходе через эти границы. Компонента σ_{rr} может претерпевать разрыв. Установлено, что существуют четыре характерные клинообразные области с границами $\theta = \theta_\alpha$, $\theta = \theta_\beta$ и $\theta = \theta_\gamma$. Для $\theta_\gamma \leq \theta \leq \pi$ поле напряжений определяется формулами (16), где неизвестные константы находятся из условий отсутствия поверхностных усилий на верхнем берегу трещины (6). Таким образом, распределение напряжений в указанной области имеет вид

$$\sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta. \quad (17)$$

Для сектора $\theta_\beta \leq \theta \leq \theta_\gamma$ принимается, что поле напряжений задаётся соотношениями (15) с неизвестными величинами: постоянной c_1 и углом θ_γ , которые легко вычисляются из системы трансцендентных уравнений, выражающих требования непрерывности компонент $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ при переходе через линию раздела секторов $\theta = \theta_\gamma$:

$$-\frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta_\gamma) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta_\gamma + c_1), \quad \frac{1}{2} \sin 2\theta_\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_\gamma + c_1), \quad (18)$$

решение которой есть $\theta_\gamma = 2,1862941 = 125,26^\circ$ и $c_1 = 1,91033236$. Графическое решение системы (18) иллюстрирует рис. 1.

Рис. 1. Графическое решение системы алгебраических уравнений (18):

I — кривая, определяемая первым уравнением системы (18); II — ветви кривой, определяемой вторым уравнением системы (18)

Для области $\theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_\beta$ принимается, что поле напряжений задаётся соотношениями (16). Условия непрерывности напряжений при переходе через линию $\theta = \theta_\beta$ будут тождественно выполнены, если положить, что

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_\gamma + c_1), \quad b = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_\gamma + c_1), \quad c = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_\gamma + c_1). \quad (19)$$

Следовательно, поле напряжений при $\theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_\beta$ задаётся зависимостями:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(0)} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_\gamma + c_1) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_\gamma + c_1) \cos 2(\theta - \theta_\beta) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_\gamma + c_1) \sin 2(\theta - \theta_\beta), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_\gamma + c_1) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_\gamma + c_1) \cos 2(\theta - \theta_\beta) - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_\gamma + c_1) \sin 2(\theta - \theta_\beta), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_\gamma + c_1) \sin 2(\theta - \theta_\beta) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_\gamma + c_1) \cos 2(\theta - \theta_\beta).\end{aligned}\quad (20)$$

При $0 \leq \theta \leq \theta_\alpha$ распределение напряжений, удовлетворяющее условиям (7), имеет вид

$$\sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta. \quad (21)$$

Неизвестные значения углов $\theta = \theta_\alpha$ и $\theta = \theta_\beta$ определяются численно путём решения следующей системы двух трансцендентных уравнений, выражающих требования непрерывности компонент тензора напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ через линию раздела областей $\theta = \theta_\alpha$:

$$\begin{aligned}-\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta_\alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_\beta + c_1) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_\gamma + c_1) \cos 2(\theta_\alpha - \theta_\beta) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_\gamma + c_1) \sin 2(\theta_\alpha - \theta_\beta), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta_\alpha &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_\gamma + c_1) \sin 2(\theta_\alpha - \theta_\beta) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_\gamma + c_1) \cos 2(\theta_\alpha - \theta_\beta).\end{aligned}\quad (22)$$

Решение системы уравнений (22) есть $\theta_\alpha = 0,8937137793$, $\theta_\beta = 1,908063102$. Приведём значения этих углов в градусах: $\theta_\alpha = 51,20^\circ$, $\theta_\beta = 109,32^\circ$. Графический способ получения решения иллюстрирует рис. 2.

Итоговое распределение напряжений у вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряжённого состояния в материале с дробно-линейным законом теории установившейся ползучести в каждой из четырёх характерных клинообразных областей задаётся формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \theta_\alpha, \quad \theta_\alpha = 51,20^\circ \\ \sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta, \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\alpha \leq \theta \leq \theta_\beta, \quad \theta_\beta = 109,32^\circ \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_\beta + c_1) - \\ - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_\gamma + c_1) \cos 2(\theta - \theta_\beta) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_\gamma + c_1) \sin 2(\theta - \theta_\beta), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_\beta + c_1) + \\ + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_\gamma + c_1) \cos 2(\theta - \theta_\beta) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_\gamma + c_1) \sin 2(\theta - \theta_\beta), \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_\gamma + c_1) \sin 2(\theta - \theta_\beta) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_\gamma + c_1) \cos 2(\theta - \theta_\beta), \end{array} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\beta \leq \theta \leq \theta_\gamma, \quad \theta_\gamma = 125,26^\circ \\ \sigma_{rr}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\theta + c_1), \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\theta + c_1), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta + c_1), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\gamma \leq \theta \leq \pi \\ \sigma_{rr}^{(0)} = -\frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta), \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta), \quad \sigma_{r\theta}^{(0)} = \frac{1}{2} \sin 2\theta. \end{array} \right.$$

Полученное распределение напряжений показано на рис. 3. Решение сформулированной статически определимой задачи определения напряжений $\sigma_{ij}^{(0)}$, по-видимому, было впервые получено в [13], где исследовалось поле напряжений у вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряжённого состояния. Следует отметить, что найденная комбинация четырёх кли-

Рис. 2. Графическое решение системы алгебраических уравнений (22): I — кривая, определяемая первым уравнением системы (22); II — ветви кривой, определяемой вторым уравнением системы (22)

нообразных областей у вершины трещины не является единственной (т. е. решение задачи не единственно (см. дискуссию в [14])). Например, в [15] получено другое решение (комбинация трёх клинообразных областей), удовлетворяющее уравнениям задачи и всем граничным условиям. По всей видимости, основным критерием выбора того или иного ансамбля секторов является сравнение аналитического решения с численным решением задачи для степенного закона Нортена теории установившейся ползучести в предельном случае, когда показатель нелинейности материала стремится к бесконечности.

Сравним полученное решение с полем напряжений в окрестности вершины для материала, подчиняющегося степенному закону, связывающему скорости деформации и напряжения в виде $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij}$, где B, n — постоянные материала, в предельном случае, когда $n \rightarrow \infty$, что соответствует идеально пластическому материалу. В соответствии с подходом, реализованным в [16–19], решение разыскивается в виде $\sigma_{ij}(r, \theta) = K r^{-1/(n+1)} f_{ij}(\theta)$, и для получения угловых распределений компонент тензора напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений (или одно нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, если использовать функцию напряжений Эри). Устремляя n к бесконечности (в ходе численного счета обычно полагают $n = 100, 300, 500$), можно получить уже другим способом угловые распределения компонент тензора напряжений (рис. 3). Сравнение полученных угловых распределений компонент тензора напряжений показывает, что две схемы построения поля напряжений приводят к одному и тому же результату, что служит подтверждением достоверности найденного поля напряжений (23).

Используя распределение напряжений (23) и определяющие уравнения,

Рис. 3. Сравнение аналитического (сплошная линия) и численного решений (точки, полученные в ходе численного решения, обозначены крестиками). Численное решение задачи для упрочняющегося по степенному закону материала для $n = 200$

можно получить главный член асимптотического разложения скоростей деформаций ползучести в окрестности вершины трещины:

$$0 \leq \theta < \theta_\alpha \quad \dot{\varepsilon}_{rr} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = -\sqrt{3} \frac{\sin \theta}{r^\alpha \sigma_1(\theta)}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \sqrt{3} \frac{\cos \theta}{r^\alpha \sigma_1(\theta)}, \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\alpha < \theta < \theta_\beta \\ \dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{a + 3b \cos 2(\theta - \theta_\beta) + 3c \sin 2(\theta - \theta_\beta)}{r^\alpha \sigma_2(\theta)}, \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{a - 3b \cos 2(\theta - \theta_\beta) - 3c \sin 2(\theta - \theta_\beta)}{r^\alpha \sigma_2(\theta)}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta} = 3 \frac{-b \sin 2(\theta - \theta_\beta) + c \cos 2(\theta - \theta_\beta)}{r^\alpha \sigma_2(\theta)}, \end{array} \right. \quad (25)$$

где

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_\beta + c_1), \quad b = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_\beta + c_1), \quad c = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_\beta + c_1),$$

$$\theta_\beta \leq \theta < \theta_\gamma \quad \dot{\varepsilon}_{rr} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \sqrt{3} \frac{\cos(\theta + c_1)}{r^\alpha \sigma_3(\theta)}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \sqrt{3} \frac{\sin(\theta + c_1)}{r^\alpha \sigma_3(\theta)}, \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\gamma < \theta \leq \pi \\ \dot{\varepsilon}_{rr} = -\frac{1}{2} \frac{1 + 3 \cos 2\theta}{r^\alpha \sigma_4(\theta)}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = -\frac{1}{2} \frac{1 - 3 \cos 2\theta}{r^\alpha \sigma_4(\theta)}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{3}{2} \frac{\sin 2\theta}{r^\alpha \sigma_4(\theta)}, \end{array} \right. \quad (27)$$

при этом функции $\sigma_i(\theta)$, $i = 1, 2, 3, 4$ находятся из условия совместности (5). Непосредственным вычислением можно показать, что при $0 \leq \theta < \theta_\alpha$ и $\theta_\beta \leq \theta < \theta_\gamma$ условие совместности выполняется при произвольных функциях $\sigma_1(\theta)$ и $\sigma_3(\theta)$, если $\alpha = 1$. При использовании дробно-линейной аппроксимации напряжения в окрестности вершины трещины являются ограниченными величинами, следовательно, в силу инвариантности C^* -интеграла по меньшей мере в одной из четырех рассматриваемых областей показатель сингулярности скоростей деформаций ползучести должен быть равен единице.

Следует отметить, что скорости деформаций ползучести согласно (24)–(27) сингулярны вблизи вершины трещины ($\alpha > 0$). На данном этапе решения показатель сингулярности скоростей деформаций остаётся неизвестным, и для его определения можно воспользоваться следующими рассуждениями.

Подобно анализу, проведённому при исследовании задач о трещинах антиплоского сдвига и нормального отрыва, асимптотическое решение задачи можно искать исходя из асимптотических разложений скоростей перемещений $u_r(r, \theta)$, $u_\theta(r, \theta)$ в окрестности вершины трещины ($r \rightarrow 0$):

$$u_r(r, \theta) = f_0(\theta) + r^\alpha f_1(\theta) + \dots, \quad u_\theta(r, \theta) = g_0(\theta) + r^\alpha g_1(\theta) + \dots \quad (\alpha > 0). \quad (28)$$

Асимптотические разложения скоростей перемещений вида (28) дают возможность описать поле напряжений, ограниченное вблизи кончика трещины,

и сингулярное поведение скоростей деформаций ползучести, представляемые на основе (28) выражениями

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{rr}(r, \theta) &= r^{\alpha-1} \varepsilon_{rr}^{(1)}(\theta) + \dots, & \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{1}{r} \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) + r^{\alpha-1} \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) + \dots, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{1}{r} \varepsilon_{r\theta}^{(0)}(\theta) + r^{\alpha-1} \varepsilon_{r\theta}^{(1)}(\theta) + \dots,\end{aligned}\quad (29)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(1)}(\theta) &= \alpha f_1(\theta), & \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) &= f_0(\theta) + g_0'(\theta), & \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) &= f_1(\theta) + g_1'(\theta), \\ \varepsilon_{r\theta}^{(0)}(\theta) &= \frac{1}{2} [f_0'(\theta) - g_0(\theta)], & \varepsilon_{r\theta}^{(1)}(\theta) &= \frac{1}{2} [f_1'(\theta) + (\alpha - 1)g_1(\theta)].\end{aligned}\quad (30)$$

Две функции u_r и u_θ , подлежащие определению, находятся из уравнений равновесия, которые удобно с помощью определяющих соотношений задачи представить в форме

$$\begin{aligned}r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2\dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{1 + \dot{\varepsilon}} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{2\dot{\varepsilon}_{r\theta}}{1 + \dot{\varepsilon}} \right) + \frac{\dot{\varepsilon}_{rr} - \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{1 + \dot{\varepsilon}} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{rr} + 2\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}}{1 + \dot{\varepsilon}} \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{r\theta}}{1 + \dot{\varepsilon}} \right) &= 0,\end{aligned}\quad (31)$$

где $\dot{\varepsilon}$ — интенсивность скоростей деформаций. Подстановка (29) в (31) и выделение коэффициентов при минимальной степени r приводят к следующей системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} \left[\varepsilon_{rr}^{(0)} \left(\varepsilon_{r\theta}^{(0)} \right)' - \varepsilon_{r\theta}^{(0)} \left(\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} \right)' - \left(\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} \right)^2 - \left(\varepsilon_{r\theta}^{(0)} \right)^2 \right] &= 0, \\ \varepsilon_{r\theta}^{(0)} \left[\varepsilon_{rr}^{(0)} \left(\varepsilon_{r\theta}^{(0)} \right)' - \varepsilon_{r\theta}^{(0)} \left(\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} \right)' - \left(\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} \right)^2 - \left(\varepsilon_{r\theta}^{(0)} \right)^2 \right] &= 0.\end{aligned}\quad (32)$$

Уравнения системы (32) выполняются, если либо

$$1) \ \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} \neq 0, \ \varepsilon_{r\theta}^{(0)} \neq 0, \ \varepsilon_{rr}^{(0)} \left(\varepsilon_{r\theta}^{(0)} \right)' - \varepsilon_{r\theta}^{(0)} \left(\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} \right)' - \left(\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} \right)^2 - \left(\varepsilon_{r\theta}^{(0)} \right)^2 = 0;$$

либо

$$2) \ \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} = 0, \ \varepsilon_{r\theta}^{(0)} = 0.$$

В первом случае скорости деформаций ползучести имеют особенность вида r^{-1} (согласно (29)), а компоненты тензора напряжений стремятся при $r \rightarrow 0$ к величинам

$$\sigma_{\theta\theta} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}}{\varepsilon}, \quad \sigma_{rr} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}}{\varepsilon}, \quad \sigma_{r\theta} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon_{r\theta}^{(0)}}{\varepsilon}, \quad (33)$$

$$\text{где } \varepsilon = \sqrt{\left(\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} \right)^2 + \left(\varepsilon_{r\theta}^{(0)} \right)^2}.$$

Неизвестные функции $\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}$ и $\varepsilon_{r\theta}^{(0)}$ определяются из уравнений, следующих из равновесия задачи (31):

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\varepsilon_{r\theta}^{(0)}}{\varepsilon} \right) - \frac{\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}}{\varepsilon} = 0, \quad \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}}{\varepsilon} \right) + \frac{\varepsilon_{r\theta}^{(0)}}{\varepsilon} = 0, \quad (34)$$

решением которых являются функции

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) = \rho(\theta)(-A \sin \theta + B \cos \theta), \quad \varepsilon_{r\theta}^{(0)}(\theta) = \rho(\theta)(A \cos \theta + B \sin \theta), \quad (35)$$

где $\rho(\theta)$ — произвольная функция, A, B — константы интегрирования. Таким образом, в рассматриваемом случае напряжения и скорости деформаций в окрестности вершины трещины представляются выражениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2}{\sqrt{3}}(-A \sin \theta + B \cos \theta), \quad \sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-A \sin \theta + B \cos \theta), \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(A \cos \theta + B \sin \theta), \\ \dot{\varepsilon}_{rr} &= 0, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{\rho(\theta)}{r}(-A \sin \theta + B \cos \theta), \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{\rho(\theta)}{r}(A \cos \theta + B \sin \theta). \end{aligned} \quad (36)$$

Во втором случае, когда $\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} = 0$, $\varepsilon_{r\theta}^{(0)} = 0$, скорости деформаций ползучести в окрестности вершины трещины имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr}(r, \theta) &= r^{\alpha-1} \varepsilon_{rr}^{(1)}(\theta) + \dots, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}(r, \theta) = r^{\alpha-1} \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) + \dots, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta}(r, \theta) &= r^{\alpha-1} \varepsilon_{r\theta}^{(1)}(\theta) + \dots. \end{aligned} \quad (37)$$

Компоненты тензора напряжений вблизи устья трещины ($r \rightarrow 0$) принимают вид:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon_{rr}^{(1)} + 2\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}, \quad \sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} + 2\varepsilon_{rr}^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon_{r\theta}^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}, \quad (38)$$

$$\text{где } \varepsilon^{(1)} = \sqrt{\left(\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}\right)^2 + \left(\varepsilon_{rr}^{(1)}\right)^2 + \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}\varepsilon_{rr}^{(1)} + \left(\varepsilon_{r\theta}^{(1)}\right)^2}.$$

Систему уравнений для определения функций $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ образуют два уравнения равновесия и условие совместности деформаций, определяемых равенствами (37). Проводя необходимые вычисления, можно для компонент тензора напряжений получить выражения вида (16). Комбинируя представления (36) и (16) для напряжений с целью выполнения граничных условий на берегах трещины, условий симметрии на её продолжении и требований непрерывности компонент $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ на лучах, разделяющих сектора, можно найти распределение напряжений (23). Для скоростей деформаций в окрестности вершины трещины справедливо:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta < \theta_\alpha \\ \dot{\varepsilon}_{rr} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = -\frac{\rho_1(\theta) \sin \theta}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{\rho_1(\theta) \cos \theta}{r}, \end{array} \right. \quad (39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\alpha < \theta < \theta_\beta \\ \dot{\varepsilon}_{rr} = \rho_2(\theta) \frac{a + 3b \cos 2(\theta - \theta_\beta) + 3c \sin 2(\theta - \theta_\beta)}{r^{1-\alpha}}, \\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \rho_2(\theta) \frac{a - 3b \cos 2(\theta - \theta_\beta) - 3c \sin 2(\theta - \theta_\beta)}{r^{1-\alpha}}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta} = 3\rho_2(\theta) \frac{-b \sin 2(\theta - \theta_\beta) + c \cos 2(\theta - \theta_\beta)}{r^{1-\alpha}}, \end{array} \right. \quad (40)$$

где

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_\beta + c_1), \quad b = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \cos(\theta_\beta + c_1), \quad c = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta_\beta + c_1),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\beta \leq \theta < \theta_\gamma \\ \dot{\varepsilon}_{rr} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{\rho_3(\theta) \cos(\theta + c_1)}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_{r\theta} = \frac{\rho_3(\theta) \sin(\theta + c_1)}{r}, \end{array} \right. \quad (41)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\gamma < \theta \leq \pi \\ \dot{\varepsilon}_{rr} = -\rho_4(\theta) \frac{1 + 3 \cos 2\theta}{r^{1-\alpha}}, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = -\rho_4(\theta) \frac{1 - 3 \cos 2\theta}{r^{1-\alpha}}, \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta} = 3\rho_4(\theta) \frac{\sin 2\theta}{r^{1-\alpha}}. \end{array} \right. \quad (42)$$

Асимптотики скоростей деформаций (24)–(27) и (39)–(42) представляют собой решение одной и той же задачи и, следовательно, должны совпадать. Сравнение выражений (24)–(27) и (39)–(42) показывает, что скорости деформаций проявляют сингулярное поведение в окрестности вершины трещины, причём показатель сингулярности меняется дискретным образом в зависимости от полярного угла θ , принимая значение $\alpha = 1$ при $0 \leq \theta < \theta_\alpha$ и $\theta_\beta \leq \theta < \theta_\gamma$; в оставшихся секторах $\theta_\alpha < \theta < \theta_\beta$ и $\theta_\gamma < \theta \leq \pi$ показатель сингулярности принимает значение $\alpha = 1/2$, что схематично представлено на рис. 4.

Для интервала $\theta_\alpha < \theta < \theta_\beta$ функция $\sigma_2(\theta)$ определяется как решение линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$[a + 3b \cos \vartheta + 3c \sin \vartheta] y_2'' + 6(\alpha + 1) [-b \sin \vartheta + c \cos \vartheta] y_2' + \alpha \{ \alpha a - 3(\alpha + 2) [b \cos \vartheta + c \sin \vartheta] \} y_2 = 0, \quad (43)$$

Рис. 4. Дискретный характер изменения показателя сингулярности скоростей деформаций ползучести от полярного угла

где $y_2 = y_2(\theta) = 1/\sigma_2(\theta)$, $\vartheta = 2(\theta - \theta_\beta)$. Решение дифференциального уравнения (43) может быть представлено в форме

$$y_2(\vartheta) = \left\{ C_1 \left(\frac{d + 3c - \operatorname{tg} \vartheta}{d - 3c + \operatorname{tg} \vartheta} \right)^{1/4} + C_2 \left(\frac{d + 3c - \operatorname{tg} \vartheta}{d - 3c + \operatorname{tg} \vartheta} \right)^{-1/4} \right\} (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta)^{1/4} \times \\ \times [a + a \operatorname{tg}^2 \vartheta + 3b - 3b \operatorname{tg}^2 \vartheta + 6c \operatorname{tg} \vartheta]^{-1/4}, \quad (44)$$

где $d = \sqrt{9b^2 + 9c^2 - a^2}$. Исследование последнего выражения показывает, что асимптотическое разложение скоростей деформаций (25) не является равномерно пригодным при $\theta = \theta_\alpha$, поскольку при данном значении полярного угла функция $a + a \operatorname{tg}^2 \vartheta + 3b - 3b \operatorname{tg}^2 \vartheta + 6c \operatorname{tg} \vartheta$, фигурирующая в асимптотике скоростей деформаций, обращается в нуль. Таким образом, асимптотическое разложение (25) равномерно пригодно всюду на интервале $\theta_\alpha < \theta \leq \theta_\beta$, за исключением малой окрестности луча $\theta = \theta_\alpha$. Для определения асимптотики скоростей деформаций на луче $\theta = \theta_\alpha$ следует положить $\theta = \theta_\alpha + r^\mu a$ и рассмотреть непосредственную окрестность луча при выполнении требования непрерывности компонент тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}$ и $\dot{\varepsilon}_{r\theta}$. Формулируя условия непрерывности компоненты $\dot{\varepsilon}_{r\theta}$ на луче $\theta = \theta_\alpha$ и рассматривая непосредственную окрестность луча, можно установить, что $\mu = 1/3$ и, следовательно, скорости деформаций ползучести на луче $\theta = \theta_\alpha$ пропорциональны $r^{-2/3}$. Подобный анализ может быть проведён и для лучей $\theta = \theta_\beta$, $\theta = \theta_\gamma$, что позволяет прийти к заключению, что на лучах, разделяющих области, показатель сингулярности скоростей деформаций ползучести равен $-2/3$. Дискретный характер изменения показателя сингулярности скоростей деформаций ползучести от полярного угла показан на рис. 4.

Для $\theta_\gamma < \theta \leq \pi$ условие совместности позволяет получить обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\sigma_4(\theta)$:

$$(1 + 3 \cos 2\theta) y_4'' - 6(\alpha + 1) \sin 2\theta y_4' + \alpha [\alpha - 3(\alpha + 2) \cos 2\theta] y_4 = 0, \quad (45)$$

где $y_4 = y_4(\theta) = 1/\sigma_4(\theta)$. Решением уравнения (45) является функция

$$y_4 = (1 + 3 \cos 2\theta)^{\frac{-1}{2\alpha}} \left[C_1 \left(\frac{\sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta}{-\sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} + C_2 \left(\frac{-\sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta}{\sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \right],$$

не имеющая особенностей при $\theta_\gamma < \theta \leq \pi$.

Формулы (16) и (24)–(27) описывают поля напряжений и скоростей деформаций в окрестности вершины трещины. Это ближнее поле необходимо срастить с внешним полем, содержащим зависимость от системы внешних нагрузок, приложенных к телу, и геометрии реального образца. Процедуру срачивания можно провести, пользуясь свойством инвариантности C^* -интеграла. Для проведения срачивания следует выбрать два контура, охватывающих вершину трещины, причём один из контуров лежит в непосредственной окрестности вершины и значение C^* -интеграла находится с помощью решения, справедливого в окрестности вершины (16), (24)–(27); другой контур располагается на удалении от вершины трещины, и C^* -интеграл вычисляется по дальнему полю (11).

Выбирая в качестве контура окружность радиуса r , для рассматриваемой задачи можно найти

$$C^* = r \int_{-\pi}^{\pi} \{ W^* \cos \theta - \sigma_{rr} [\dot{\varepsilon}_{rr} \cos \theta - (\dot{\varepsilon}_{r\theta} - \dot{\omega}) \sin \theta] - \\ - \sigma_{r\theta} [(\dot{\varepsilon}_{r\theta} + \dot{\omega}) \cos \theta - \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} \sin \theta] \} d\theta, \quad (46)$$

где

$$\dot{\omega} = \left(\frac{1}{r}\right)v_{\theta} + \left(\frac{\partial v_{\theta}}{\partial r}\right) - \left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right), \quad W^* = \dot{\varepsilon} - \ln(1 + \dot{\varepsilon}).$$

Учитывая (46) и проводя необходимые вычисления, для рассматриваемой задачи можно найти

$$2 \int_0^{\theta_{\alpha}} \rho_1(\theta) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2 \theta \right] \cos \theta d\theta + \\ + 2 \int_{\theta_{\beta}}^{\theta_{\gamma}} \rho_3(\theta) \left[\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2 (\theta + c_1) \right] d\theta = 1.$$

3. Выводы и обсуждение результатов. Асимптотический анализ полей напряжений и скоростей деформаций ползучести у вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряжённого состояния при использовании дробно-линейной аппроксимации показал, что поле напряжений задаётся различными функциональными зависимостями для четырёх клинообразных областей изменения полярного угла. Значения углов, определяющих границы секторов, находятся численно путём решения системы двух трансцендентных уравнений. Показано также, что данное поле напряжений совпадает в предельном случае (когда показатель нелинейности стремится к бесконечности) с распределением напряжений вблизи кончика трещины в материале, следующему степенному закону ползучести, что подтверждает найденное решение статически определимой задачи. Установлено, что скорости деформаций являются сингулярными величинами, причем показатель сингулярности меняется дискретным образом при изменении полярного угла. Полученное решение позволяет пролить свет на поле деформаций у устья трещины в идеально пластическом материале, поскольку условие наступления предельного состояния $\sigma_e = \sigma_b$ аналогично условию наступления пластического течения Мизеса. В отличие от задач теории идеальной пластичности при определении кинематики пластического течения в окрестности вершины трещины, когда можно отыскать лишь некоторые характерные особенности поля деформаций, в рамках настоящего подхода удаётся определить поле скоростей в каждом из секторов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-01-99023).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бойл, Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести [Текст] / Дж. Бойл, Дж. Спенс. — М.: Мир, 1986. — 360 с.
2. Шестериков, С. А. Конкретизация уравнений состояния в теории ползучести [Текст] / С. А. Шестериков, М. А. Юмашева // Изв. АН СССР. МТТ. — 1984. — № 1. — С. 86–92.

3. Шестериков, С. А. О длительной прочности [Текст] / С. А. Шестериков, С. Ю. Лебедев, М. А. Юмашева // Проблемы механики сплошной среды. К 60-летию со дня рождения В. П. Мясникова. — Владивосток, 1996. — С. 80–85.
4. Аршакуни, А. Л. Прогнозирование длительной прочности жаропрочных металлических материалов [Текст] / А. Л. Аршакуни, С. А. Шестериков // Изв. РАН. МТТ. — 1994. — № 3. — С. 126–141.
5. Аршакуни, А. Л. Прогнозирование длительной прочности металлов [Текст] / А. Л. Аршакуни // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 6. — С. 126–135.
6. Анализ критериев длительной прочности металлов при сложном напряжённом состоянии [Текст] / А. М. Локощенко, В. В. Назаров, Д. О. Платонов, С. А. Шестериков // Изв. РАН. МТТ. — 2003. — № 2. — С. 139–149.
7. Кашелкин, В. В. Метод прогнозирования длительной прочности хромоникелевых аустенитных сталей [Текст] / В. В. Кашелкин, И. А. Кузнецова, С. А. Шестериков // Изв. РАН. МТТ. — 2004. — № 1. — С. 182–187.
8. Шестериков, С. А. Анализ напряжённо-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях ползучести [Текст] / С. А. Шестериков, Л. В. Степанова // Изв. РАН. МТТ. — 1995. — № 1. — С. 96–103.
9. Астафьев, В. И. Асимптотика напряжённо-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях ползучести [Текст] / В. И. Астафьев, С. А. Шестериков, Л. В. Степанова // Вестн. Самарск. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер. — 1995. — Спец. выпуск. — С. 59–64.
10. Степанова, Л. В. Трещина антиплоского сдвига в среде с дробно-линейным законом ползучести [Текст] / Л. В. Степанова // Мат. модели и методы механики сплошных сред: Сб. научн. тр. к 60-летию д. ф.-м. н. А. А. Буренина. — Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2007. — С. 244–258.
11. Hutchinson, J. W. Plastic stress and strain fields at a crack tip [Text] / J. W. Hutchinson // J. Mech. Phys. Solids. — 1968. — Vol. 16. — P. 337–349.
12. Hill, R. On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets [Text] / R. Hill // J. Mech. Phys. Solids. — 1952. — Vol. 1. — P. 19–30.
13. Shih, C. F. Elastic-plastic analysis of combined mode crack problems [Text] / C. F. Shin: Ph. D. Thesis. — Cambridge: Harvard University, 1973.
14. Rahman, M. Elastic perfectly-plastic asymptotic mixed mode crack tip fields in plane stress [Text] / M. Rahman, J. W. Hancock // Int. J. Solids and Structures. — 2006. — Vol. 43. — P. 3692–3704.
15. Степанова, Л. В. Напряжения в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в условиях плоского напряжённого состояния в идеально пластическом материале [Текст] / Л. В. Степанова // Вестн. Самарск. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер. — 2002. — № 2(24). — С. 78–84.
16. Rice, J. R. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material [Text] / J. R. Rice, G. F. Rosengren // J. Mech. Phys. Solids. — 1968. — Vol. 16, No. 1. — P. 1–12.
17. Hutchinson, J. W. Singular behaviour at the end of tensile crack in a hardening material [Text] / J. W. Hutchinson // J. Mech. Phys. Solids. — 1968. — Vol. 16. — P. 13–31.
18. Астафьев, В. И. Нелинейная механика разрушения [Текст] / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. — Самара: Самарский университет, 2001. — 632 с.
19. Степанова, Л. В. Математические методы механики разрушения [Текст] / Л. В. Степанова. — Самара: Самарский университет, 2006. — 232 с.

Поступила в редакцию 07/IV/2008;
в окончательном варианте — 30/VI/2008.

MSC: 74R20

**REFINED ESTIMATION OF THE MODE II CRACK TIP STRESS
FIELD AT PLANE STRESS CONDITIONS FOR A STEADY STATE
CREEP LINEAR-FRACTIONAL LAW**

L. V. Stepanova

Samara State University,
443011, Samara, Akad. Pavlov str., 1.

E-mail: lst@ssu.samara.ru

The approximate solution of the mode II crack problem in a linear-fractional law of creeping material under plane stress conditions is demonstrated. The stress field in the vicinity of the mode II crack tip is obtained. It is demonstrated that the near crack tip fields consist of four wedge-shape regions. The sectors can be assembled subject to the boundary conditions and continuity of tractions across the sectors boundaries. The comparison of the analytical and numerical solutions is given. The creep strain rate tensor components in the neighborhood of the crack tip are shown to be singular $\dot{\varepsilon} \sim r^{-\alpha}$. The singularity exponent α varies discretely from 1 to 1/2.

Key words: *fracture mechanics, mode II crack, linear-fractional steady-state creep law, stress-strain state near a crack tip.*

Original article submitted 07/IV/2008;
revision submitted 30/VI/2008.

Stepanova Larisa Valentinovna, Ph. D. (Phis. & Math.) Assist. Prof., Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics of Samara State University.