Общероссийский математический портал

Ю. В. Малышев, Дифференциальные уравнения (операторный метод), *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 5–10

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:52:07

Дифференциальные уравнения

УДК 517.925

Ю. В. Малышев

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД)

На основе символического метода Хевисайда разработан операторный метод решения линейных дифференциальных уравнений обыкновенных и в частных производных. В основу метода положены свойства экспоненты и факторизация.

Целью работы является разработка операторного метода решения линейных дифференциальных уравнений на основе символического метода Хевисайда [1–3].

1. Для любых дифференцируемых функций $u(x)$, $v(x)$ справедливы свойства:

$$\begin{aligned} 1) D(e^u v) &= e^u (D + \mathfrak{L})v, \quad D^2(e^u v) = e^u (D + \mathfrak{L})^2 v, \quad \mathbf{K} \\ D^n(e^u v) &= e^u (D + \mathfrak{L})^n v, \quad D^n(e^{-u} v) = e^{-u} (D - \mathfrak{L})^n v, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $D = \frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования; $\mathfrak{L} = \frac{du}{dx}$; $(D + \mathfrak{L})^2 = (D + \mathfrak{L})(D + \mathfrak{L}) = D^2 + 2\mathfrak{L}D + \mathfrak{L}^2 + \mathfrak{L}$, ..., $(D + \mathfrak{L})^n = \underbrace{(D + \mathfrak{L}) \mathbf{K} (D + \mathfrak{L})}_{n \text{ раз}}$, $e^u = \exp u$.

2) Из (1.1) следует:

$$(D + \mathfrak{L})^n v = e^{-u} D^n (e^u v), \quad (D - \mathfrak{L})^n v = e^u D^n (e^{-u} v). \quad (1.2)$$

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \mathbf{K} + a_n(x) y = f(x) \quad (1.3)$$

или $L(D)y = f$, где $L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \mathbf{K} + a_n$ — линейный дифференциальный оператор.

ТЕОРЕМА 1. Если оператор $L(D)$ допускает факторизацию $L(D) \equiv \prod_{j=1}^n (D + \mathfrak{L}_j)$, то уравнение (1.3) интегрируется в квадратурах.

Доказательство. Применяя к уравнению (1.3) свойства (1.2), получим:

$$e^{-u_1} D e^{u_1 - u_2} \mathbf{K} D e^{u_2} y = f.$$

Отсюда, делением на экспоненту и интегрированием, получим

$$y = e^{-u_n} D^{-1} e^{u_n - u_{n-1}} \mathbf{K} D^{-1} e^{u_1} f + C_1 e^{-u_n} D^{-1} \mathbf{K} D^{-1} e^{u_2 - u_1} + \mathbf{K} + C_n e^{-u_n}$$

($C_j = \text{const}$, D^{-1} — оператор интегрирования).

Здесь первое слагаемое — частное решение неоднородного уравнения, остальные — линейно-независимые частные решения соответствующего однородного уравнения.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 1.1. Линейное уравнение первого порядка

$$(D + p(x))y = q(x).$$

Используем свойство (1.2): $e^{-u} D e^u y = q$. Отсюда $y = e^{-u} D^{-1} e^u q + C e^{-u}$ — общее решение ($C = \text{const}$, $u = \int p dx$).

ПРИМЕР 1.2. Уравнение Бернулли

$$(D + p)y = qy^m.$$

Аналогично примеру 1.1: $e^{-u} D e^u q = q y^m$. Отсюда $\frac{D e^u y}{(e^u y)^m} = e^{(1-m)} q$ и, после интегрирования, $y^{1-m} = (1-m) e^{-(1-m)u} D^{-1} e^{(1-m)u} q + C e^{-(1-m)u}$ — общее решение ($C = \text{const}$, $u = \int p dx$).

Пример 1.3. Уравнение Эйлера

$$(x^2 D^2 + a_1 x D + a_2) y = f(x), (a_1, a_2 = \text{const}).$$

Перейдем от дифференцирования по x к дифференцированию по $\ln x$ по формулам $x D = \frac{d}{\frac{1}{x} dx} = D_{\ln x}$, $x^2 D^2 = D_{\ln x}^2 - D_{\ln x}$. Уравнение примет вид

$$(D_{\ln x}^2 + (a_1 - 1) D_{\ln x} + a_2) y = f.$$

Если уравнение факторизовано

$$(D_{\ln x} + \alpha_1)(D_{\ln x} + \alpha_2) y = f \quad (\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}),$$

то, поступая как в примерах 1.1 и 1.2, найдем решение в квадратурах

$$e^{-\alpha_1 \ln x} D_{\ln x} e^{(\alpha_1 - \alpha_2) \ln x} D_{\ln x} e^{\alpha_2 \ln x} y = f,$$

$$y = x^{-\alpha_2} D^{-1} x^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1} D^{-1} x^{\alpha_1 - 1} f + C_1 x^{-\alpha_2} D^{-1} x^{\alpha_2 - \alpha_1 - 1} + C_2 x^{-\alpha_2} —$$

общее решение ($C_1, C_2 = \text{const}$, $D_{\ln x}^{-1} = x^{-1} D^{-1}$).

2. Для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $L(D) y = f$, $L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n$, $a_j = \text{const}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), нахождение частного решения $\bar{y}$ в ряде случаев может быть упрощено. Решение $\bar{y}$ ищется в виде

$$\bar{y} = \frac{1}{L(D)} f. \quad (2.1)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи функции f .

1) $f(x) = x^m$, m — целое число.

$L(D)$ можно представить в виде $L(D) = \frac{1}{A} (1 + h(D)) D^k$, где $h(D)$ — некоторая функция от D , $A = \text{const}$. Используя разложение $\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - \dots - \mathbf{K}$, получим $\bar{y} = \frac{A}{(1+h) D^k} x^m = B (1 - h + h^2 - \dots - \mathbf{K}) x^{m+k}$, $B = \frac{A}{(m+1) \mathbf{K} (m+k)}$.

$$\text{Например, } \frac{1}{D+a} x^2 = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} \right) x^2 = \frac{1}{a} \left(x^2 - \frac{2}{a} x + \frac{2}{a^2} \right).$$

2) $f(x) = e^{\alpha x}$.

$$\bar{y} = \frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} = \begin{cases} \frac{e^{\alpha x}}{L(\alpha)}, & \text{если } L(\alpha) \neq 0; \\ \frac{x e^{\alpha x}}{L'(\alpha)}, & \text{если } L(\alpha) = 0, L'(\alpha) \neq 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Формулы (2.2) проверяются применением оператора $L(D)$ к обеим частям равенства. Например, $\frac{1}{L(D-\alpha)} e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \frac{1}{L(D)} \cdot 1$.

В частности,

$$\frac{1}{(D-\alpha)^k} e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \frac{1}{D^k} \cdot 1 = e^{\alpha x} \cdot \frac{x^k}{k!}. \quad (2.3)$$

Если $L(D) \equiv (D-\alpha)^k \Phi(D)$, $\Phi(\alpha) \neq 0$, то

$$\frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{(D-\alpha)^k \Phi(D)} e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{\Phi(\alpha) D^k} \cdot 1 = \frac{e^{\alpha x}}{\Phi(\alpha)} \cdot \frac{x^k}{k!}. \quad (2.4)$$

3) $f(x) = \cos \beta x$ или $f(x) = \sin \beta x$.

Выделим в $L(D)$ четные степени D . Пусть $L(D) = \Phi(D^2, D)$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(D)} \cos \beta x &= \frac{1}{\Phi(D^2, D)} \cos \beta x = \frac{1}{\Phi(-\beta^2, D)} \cos \beta x = \frac{A}{D+m} \cos \beta x = \\ &= \frac{A(D-m)}{D^2-m^2} \cos \beta x = \frac{A(\beta \sin \beta x + m \cos \beta x)}{\beta^2 + m^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

($A, m = \text{const}$, $i\beta \neq m$, i — мнимая единица).

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(D)} \sin \beta x &= \frac{1}{\Phi(-\beta^2, D)} \sin \beta x = \frac{A}{D+m} \sin \beta x = \frac{A(D-m)}{D^2-m^2} \sin \beta x = \\ &= \frac{A(-\beta \cos \beta x + m \sin \beta x)}{\beta^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

4) $f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ или $f(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} \cos \beta x &= e^{\alpha x} \frac{1}{L(D+\alpha)} \cos \beta x = e^{\alpha x} \frac{1}{\Phi(D^2, D)} \cos \beta x = e^{\alpha x} \frac{1}{\Phi(-\beta^2, D)} \cos \beta x = \\ &= e^{\alpha x} \frac{A}{D+m} \cos \beta x = e^{\alpha x} \frac{A(D-m)}{D^2-m^2} \cos \beta x = A e^{\alpha x} \frac{\beta \sin \beta x + m \cos \beta x}{\beta^2 + m^2}, \quad m \neq i\beta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Аналогично

$$\frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} \sin \beta x = A e^{\alpha x} \frac{-\beta \cos \beta x + m \sin \beta x}{\beta^2 + m^2}. \quad (2.8)$$

Пусть, например, $L(D) = (D^2 + aD + b)\Phi(D)$, $s = \alpha + i\beta$ — корень уравнения $D^2 + aD + b = 0$, $\Phi(s) \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(D)} e^{sx} &= \frac{1}{\Phi(D)(D^2 + aD + b)} e^{\alpha x} e^{i\beta x} = \frac{e^{\alpha x}}{\Phi(\alpha)(D^2 + \beta^2)} e^{i\beta x} = \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{\Phi(\alpha)(D-i\beta)(D+i\beta)} e^{i\beta x} = \frac{e^{\alpha x} x e^{i\beta x}}{2i\beta \Phi(\alpha)} = -\frac{ix e^{sx}}{2\beta \Phi(\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Вещественная и мнимая части дадут

$$\frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} \cos \beta x = \frac{x e^{\alpha x} \sin \beta x}{2\beta \Phi(\alpha)}, \quad \frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} \sin \beta x = -\frac{x e^{\alpha x} \cos \beta x}{2\beta \Phi(\alpha)}. \quad (2.10)$$

В частности

$$\frac{1}{D^2 + \beta^2} e^{i\beta x} = -\frac{ix e^{i\beta x}}{2\beta}, \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{D^2 + \beta^2} \cos \beta x = \frac{x \sin \beta x}{2\beta}, \quad \frac{1}{D^2 + \beta^2} \sin \beta x = -\frac{x \cos \beta x}{2\beta}. \quad (2.12)$$

ПРИМЕР 2.1. Найти частное решение уравнения

$$(D^2 + 1)^2 y = 24x \cos x.$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{24}{(D^2+1)^2} x \cos x. \quad \text{Найдем сначала} \quad \frac{1}{(D^2+1)^2} e^{ix} x = e^{ix} \frac{1}{D^2(D^2+4iD-4)} x = -\frac{e^{ix}}{4D^2} (1+iD)x = \\ &= -\frac{e^{ix}}{4D^2} (x+i) = -\frac{e^{ix}}{4} \left(\frac{x^3}{6} + i \frac{x^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая вещественную часть, получим

$$\bar{y} = 24 \left(-\frac{x^3}{24} \cos x + \frac{x^2}{8} \sin x \right) = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x.$$

ПРИМЕР 2.2. Найти общее решение уравнения

$$(D^2 + 6D + 13)y = e^{-3x} \cos 8x.$$

Решаем характеристическое уравнение $D^2 + 6D + 13 = 0$, его корни $D_{1,2} = -3 \pm 2i$. Общее решение однородного уравнения будет $y_0 = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. Найдем частное решение неоднородного уравнения: $\bar{y} = \frac{1}{D^2 + 6D + 13} e^{-3x} \cos 8x = e^{-3x} \frac{1}{(D-3)^2 + 6(D-3) + 13} \cos 8x = e^{-3x} \frac{1}{D^2 + 4} \times \cos 8x = -\frac{1}{60} e^{-3x} \cos 8x$. Общее решение неоднородного уравнения будет $y = y_0 + \bar{y}$.

3. Операторный подход, развитый в пунктах 1, 2, может быть распространен на уравнения в частных производных. Рассмотрим линейное уравнение с постоянными коэффициентами в частных производных

$$\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial U}{\partial x_j} + a_0 U = f(x), \quad x = (x_1, \mathbf{K}, x_n) \quad (3.1)$$

($a_j = \text{const}$, $j = 1, 2, \dots, n$).

Без ограничения общности, считая $a_1 = 1$, запишем уравнение (3.1) в символическом виде

$$\left(D_{x_1} + \sum_{k=2}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k} + a_0 \right) U = f, \quad (D_{x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}). \quad (3.1)'$$

Введем в рассмотрение оператор

$$e^{a \frac{\partial}{\partial x_k}} = 1 + a \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{a^2}{2!} \frac{\partial^2}{(\partial x_k)^2} + \mathbf{K} \quad (3.2)$$

($a = \text{const}$ или функция от x).

Свойства оператора $e^{a \frac{\partial}{\partial x_k}}$:

$$1) e^{a \frac{\partial}{\partial x_k}} f(x) = f(x_1, \mathbf{K}, x_{k-1}, x_k + a, x_{k+1}, \mathbf{K}, x_n), \quad (3.3)$$

$$2) e^{a \frac{\partial}{\partial x_k}} \varphi(x \setminus x_k) = \varphi(x \setminus x_k). \quad (3.4)$$

Свойство $(\varphi(x \setminus x_k) = \varphi(x_1, \mathbf{K}, x_{k-1}, x_{k+1}, \mathbf{K}, x_n))$ проверяются применением оператора $e^{a \frac{\partial}{\partial x_k}}$ к функциям $f(x)$ и $\varphi(x \setminus x_k)$.

В уравнении (3.1)' обозначим

$$\sum_{k=2}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k} + a_0 = \mathbf{K}_{x_1}, \quad u = \int \left(\sum_{k=2}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k} + a_0 \right) dx_1. \quad (3.5)$$

Тогда по свойству (1.2) получим

$$e^{-u} D_{x_1} e^u U = f, \quad D_{x_1} e^u U = e^u f. \quad (3.6)$$

Использование свойств (3.3) и (3.4) дает

$$D_{x_1} e^u U = e^{a_0 x_1} f(x_1, x + a_2 x_1, \mathbf{K}, x_n + a_n x_1).$$

Интегрируем обе части равенства по x_1 :

$$e^u U = D_{x_1}^{-1} e^{a_0 x_1} f(x_1, x_2 + a_2 x_1, \mathbf{K}, x_n + a_n x_1) + \varphi(x \setminus x_1). \quad (3.7)$$

Отсюда

$$U = e^{-u} D_{x_1}^{-1} e^{a_0 x_1} f(x_1, x_2 + a_2 x_1, \mathbf{K}, x_n + a_n x_1) + e^{-a_0 x_1} \varphi(x_2 - a_2 x_1, \mathbf{K}, x_n - a_n x_1)$$

(φ — произвольная функция интегрирования).

ПРИМЕР 3.1. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Найти $z = z(x, y)$. Согласно (3.1)–(3.7):

$$\left(D_x + \frac{\partial}{\partial y}\right)z = 0, \quad e^{-x\frac{\partial}{\partial y}}D_x e^{x\frac{\partial}{\partial y}}z = 0, \\ D_x e^{x\frac{\partial}{\partial y}}z = 0, \quad e^{x\frac{\partial}{\partial y}}z = \varphi(y), \quad z = e^{-x\frac{\partial}{\partial y}}\varphi(y).$$

$z = \varphi(y - x)$ — общее решение (φ — произвольная функция).

ПРИМЕР 3.2. $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0$.

$$\left(D_x + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)U = 0, \quad D_x e^{x\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}}U = 0, \quad e^{x\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}}U = \varphi(y, z),$$

$U = e^{-x\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}}\varphi(y, z) = \varphi(y - z, z - x)$ — общее решение, φ — произвольная функция.

ПРИМЕР 3.3. [4] Найти решение задачи Коши

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2, \quad z(0, y) = \frac{1}{y^2}.$$

Легко видеть, что частное решение неоднородного уравнения будет $\bar{z} = xy$.

Для нахождения общего решения однородного уравнения $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ или $\frac{\partial z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y^2} = 0$

применим описанный выше способ: $\left(D_{x^2} - \frac{\partial}{\partial y^2}\right)z = 0$, $z_0 = e^{x^2\frac{\partial}{\partial y^2}}\varphi(y^2) = \varphi(y^2 + x^2)$ — общее решение однородного уравнения, $z = xy + \varphi(y^2 + x^2)$ — общее решение неоднородного уравнения, φ — произвольная функция. Используем начальные условия: $\frac{1}{y^2} = \varphi(y^2)$. Отсюда $z = xy + \frac{1}{y^2 + x^2}$ — искомое частное решение.

ПРИМЕР 3.4. $\frac{\partial z}{\partial t} + z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ (уравнение Хопфа).

$$\left(D_t + z\frac{\partial}{\partial x}\right)z = 0, \quad e^{-tz\frac{\partial}{\partial x}}D_t e^{tz\frac{\partial}{\partial x}}z = 0, \quad D_t e^{tz\frac{\partial}{\partial x}}z = 0, \quad e^{tz\frac{\partial}{\partial x}}z = \varphi(x), \quad z = e^{-tz\frac{\partial}{\partial x}}\varphi(x) = \varphi(x - tz) —$$

общее решение, φ — произвольная функция.

4. Операторный метод применим для решения дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков, если они допускают факторизацию на линейные множители.

Рассмотрим уравнение

$$L(D)U \equiv \sum_{|p|=m} a^p D^p U = f(x), \quad (4.1)$$

где $D^p = D_{x_1}^{p_1} \mathbf{K} D_{x_n}^{p_n}$, $|p| = p_1 + \mathbf{K} + p_n$, $D_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$, p — порядок оператора $L(D)$, коэффициенты a^p — постоянные или функции $x = (x_1, \mathbf{K}, x_n)$.

Предположим, что уравнение (4.1) допускает факторизацию

$$L(D)U = \sum_{j=0}^n a_j D_j \left(\sum_{|p| \leq m-1} a^p D^p U \right) = f \quad (4.2)$$

($D_0 = 1$).

Обозначим $\sum_{|p| \leq m-1} a^p D^p U = v$, тогда получим уравнение первого порядка относительно v :

$$\sum_{j=0}^n a_j D_j v = f.$$

Без ограничения общности можно считать $a_n = 1$,

$$\left(D_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j D_j \right) v = f.$$

Обозначим $\sum_{j=0}^{n-1} a_j D_j = \mathfrak{A}_n$. Используя свойства (1.2), перепишем уравнение (4.2) в виде

$$e^{-u_n} D_n e^{u_n} v = f.$$

Деля полученное на экспоненту и интегрируя по x_n , находим

$$e^{u_n} v = D_n^{-1} e^{u_n} f + \Phi(x \setminus x_n).$$

Отсюда, $v = e^{-u_n} D_n^{-1} e^{u_n} f + e^{-u_n} \Phi(x \setminus x_n)$ (Φ — произвольная функция) или

$$\sum_{|p| \leq m-1} a^p D^p U = f_1, \quad (4.3)$$

где обозначено $f_1 = e^{-u_n} D_n^{-1} e^{u_n} f + e^{-u_n} \Phi(x \setminus x_n)$. Получили уравнение $(m-1)$ -го порядка.

Итак, доказано утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Если уравнение (4.1) допускает факторизацию (4.2), то его порядок может быть понижен на единицу.

СЛЕДСТВИЕ. Если уравнение (4.1) допускает факторизацию на линейные множители вида

$$\sum_{j=0}^n a_j D_j, \text{ то оно интегрируется в квадратурах.}$$

Доказательство получается повторением рассуждений теоремы 2. Проиллюстрируем теорему 2 на конкретных примерах.

ПРИМЕР 4.1. [5] $x^2 U_{xx} - 2xy U_{xy} + y^2 U_{yy} + x U_x + y U_y = 0$.

$$(x D_x - y D_y)^2 U = 0, \quad (D_{\ln x} - D_{\ln y})^2 U = 0, \quad e^{\ln x D_{\ln y}} D_{\ln x}^2 e^{-\ln x D_{\ln y}} U = 0, \quad D_{\ln x} e^{-\ln x D_{\ln y}} U = \\ = \Phi(\ln y), \quad e^{-\ln x D_{\ln y}} U = \ln x \cdot \Phi(\ln y) + \Psi(\ln y), \quad U = \ln x \cdot e^{\ln x D_{\ln y}} \Phi(\ln y) + e^{\ln x D_{\ln y}} \Psi(\ln y) = \ln x \times \\ \times \Phi(xy) + \Psi(xy) \text{ — общее решение } (\Phi, \Psi, \Phi, \Psi \text{ — произвольные функции}).$$

ПРИМЕР 4.2. [5] $U_{xx} - \cos^2 x \cdot U_{yy} - 2 \sin x \cdot U_{xy} - \cos x \cdot U_y = 0$.

$$\left[D_x - (1 + \sin x) D_y \right] \left[D_x + (1 - \sin x) D_y \right] U = 0. \text{ Обозначим } (1 + \sin x) D_y = \mathfrak{A}, \quad (1 - \sin x) D_y = \\ = \mathfrak{B}. \text{ Отсюда } \alpha = (x - \cos x) D_y, \quad \beta = (x + \cos x) D_y. \text{ Используем свойство (3.2):}$$

$$e^{\alpha D_y} D_x e^{-(\alpha+\beta) D_y} D_x e^{\beta D_y} U = 0, \quad D_x e^{-(\alpha+\beta) D_y} D_x e^{\beta D_y} U = 0, \\ e^{-(\alpha+\beta) D_y} D_x e^{\beta D_y} U = \Phi(y), \quad D_x e^{\beta D_y} U = e^{(\alpha+\beta) D_y} \Phi(y) = \Phi(y + 2x), \\ e^{\beta D_y} U = D_x^{-1} \Phi(y + 2x) + \Psi(y) = \Phi(y + 2x) + \Psi(y), \\ U = e^{-\beta D_y} \Phi(y + 2x) + e^{-\beta D_y} \Psi(y) = \Phi(y + x - \cos x) + \Psi(y - x - \cos x)$$

(Φ, Ψ, Φ, Ψ — произвольные функции).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пиаджо Г. Интегрирование дифференциальных уравнений. — М.-Л.: ГТТИ, 1933. — 324 с.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 582 с.
3. Мальцев Ю. В. Обобщение метода Хевисайда // Известия РАЕН. Дифференц. уравнения, 2005. — № 9. — С. 59–61.
4. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи. — М.: Высшая школа, 1989. — 284 с.
5. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 189 с.

Поступила 15.01.2006