Общероссийский математический портал

В. А. Нахушева, Об одной математической модели теплообмена в смешанной среде с идеальным контактом, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 11–34

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:40:52

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛООБМЕНА В СМЕШАННОЙ СРЕДЕ С ИДЕАЛЬНЫМ КОНТАКТОМ

Построена корректная математическая модель и проведен качественный анализ модельного варианта задачи для уравнения теплопроводности смешанного типа. Найдены фундаментальные соотношения между температурой и ее градиентом в точке идеального контакта составной системы.

1. Построение математической модели. Рассмотрим теплопередачу в составной (смешанной) системе S , состоящей из двух однородных неподвижных стержней S^+ и S^- с разными теплофизическими характеристиками. Стержни S^+ и S^- считаются достаточно тонкими и расположенными на оси абсцисс: $S^+ = \{x: x \in \mathbb{R}, -r < x < 0\}$, $S^- = \{x: x \in \mathbb{R}, 0 < x < l\}$, они соприкасаются в точке $x = 0$ числовой прямой $\mathbb{R}$. Предположим, что перенос теплоты в стержне S^+ происходит согласно принципа локального термодинамического равновесия и, стало быть, закона Фурье, а в стержне S^- — в соответствии с принципом расширенной необратимой термодинамики, учитывающим пространственную нелокальность процессов переноса и конечность скорости распространения тепла в среде [1, 2].

Пусть $u^+ = u^+(x, t)$ — температура в точке $x \in S^+$ в момент времени t от начального $t = 0$ до расчетного $t = T$; $u^- = u^-(x, t)$ — температура в точке $x \in S^-$ в момент времени t .

При отсутствии источников тепла в системе S функции u^+ и u^- можно искать как решения следующих уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial u^+}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u^+}{\partial x^2}, \quad x \in S^+; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial t} + \left(\frac{a_2}{c_q} \right)^2 \frac{\partial^2 u^-}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u^-}{\partial x^2}, \quad x \in S^-, \quad (1.2)$$

где a_1^2 и a_2^2 — коэффициенты теплопроводности в средах S^+ и S^- соответственно, а c_q — скорость распределения теплоты [3].

Уравнение (1.1) означает, что тепловые свойства тела S^+ одинаковы во всех его точках и по всем направлениям; оно представляет собой изотропное уравнение теплопроводности параболического типа и предполагает бесконечную скорость распространения тепла в теле S^+ .

Уравнение (1.2) учитывает конечность скорости распространения тепла в теле S^- . Отношение $\tau_q = (a_2/c_q)^2$ выражает время релаксации тепловых напряжений.

Пусть $\Omega_r^+ = \{(x, t): x \in S^+, 0 < t < T\}$, $\Omega_l^- = \{(x, t): x \in S^-, 0 < t < T\}$ — прямоугольные области евклидовой (фазовой) плоскости $\mathbb{R}^2$ точек (x, t) ; $H(x)$ — функция Хевисайда; λ_1 и λ_2 — положительные величины;

$$u = \begin{cases} u^+(x, t), & (x, t) \in \Omega_r^+, \\ u^-(x, t), & (x, t) \in \Omega_l^-; \end{cases} \quad a^2 = \begin{cases} a_1^2, & x < 0, \\ a_2^2, & x > 0. \end{cases}$$

Тогда математическую модель нестационарной теплопроводности в составной системе S можно записать в виде одного уравнения в частных производных второго порядка смешанного параболо-гиперболического типа:

$$\tau_q H(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) меняет свой тип на границе контакта двух сред S^+ и S^- .

В области Ω_l^- уравнение (1.3) совпадает со следующим уравнением гиперболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_q} \frac{\partial u}{\partial t} = c_q^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.4)$$

Известно [1–5], что при высокоинтенсивных нестационарных тепловых процессах, когда скорость подвода тепла к системе очень велика или процесс протекает в течение малого промежутка времени, для расчета теплопроводности используется не изотропное уравнение теплопроводности гиперболического (релаксационного) типа.

Уравнение (1.3) является следствием обобщенного закона Фурье

$$\tau_q H(x) \frac{\partial q}{\partial t} + q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.5)$$

где

$$q = \begin{cases} q^+(x, t), (x, t) \in \Omega_r^+; \\ q^-(x, t), (x, t) \in \Omega_l^-; \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} \lambda_1, x < 0 \\ \lambda_2, x > 0; \end{cases} \quad (1.6)$$

— тепловой поток и коэффициент теплопроводности, и закона сохранения энергии

$$\frac{\lambda}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad (x, t) \in \Omega_r^+ \cup \Omega_l^- \quad (1.7)$$

в системе S с нулевой мощностью внутренних источников теплоты.

Согласно (1.6) уравнение (1.5) при $x > 0$ совпадает с законом Д. К. Максвелла [6, с. 233]

$$\tau_q \frac{\partial q^-}{\partial t} + q^- = -\lambda_2 \frac{\partial u^-}{\partial x}, \quad (1.8)$$

а при $x < 0$ — с законом Фурье

$$q^+ = -\lambda_1 \frac{\partial u^+}{\partial x}. \quad (1.9)$$

Формула (1.8) допускает следующую запись:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[q^-(x, t) \exp\left(\frac{t}{\tau_q}\right) \right] = -\frac{\lambda_2}{\tau_q} \exp\left(\frac{t}{\tau_q}\right) \frac{\partial u^-(x, t)}{\partial x}. \quad (1.10)$$

2. Условия линейного сопряжения. В теории теплопередачи в составных системах, как и в теории уравнений смешанного типа, важную роль играет корректный выбор необходимых условий сопряжения на границе контакта элементов смешанной среды.

В случае идеального контакта условия сопряжения имеют вид:

$$u^+(0, t) = u^-(0, t), \quad (2.1)$$

$$q^+(0, t) = q^-(0, t). \quad (2.2)$$

Условие (2.1) отражает непрерывность температуры, а условие (2.2) — непрерывность теплового потока.

Если функция $\partial u^-(x, t)/\partial x$ для всех $x \in S^-$ суммируема на временном сегменте $[0, T]$, то решение эволюционного уравнения (1.10) можно записать в виде

$$q^-(x, t) = q^-(x, 0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_q}\right) - \frac{\lambda_2}{\tau_q} \int_0^t \exp\left(\frac{\eta - t}{\tau_q}\right) \frac{\partial u^-(x, \eta)}{\partial x} d\eta. \quad (2.3)$$

Как следует из (2.3), поток тепла $q^-(x, t)$ в точке $x \in S^-$ в момент времени t однозначно определяется только тогда, когда задано условие $q^-(x, 0)$ и известны значения градиента $\partial u^-(x, \eta)/\partial x$ соответствующей температуры $u^-(x, \eta)$ в точке x для всех предыдущих моментов времени $\eta \leq t$.

Допустим, что существует

$$\lim_{x \rightarrow +0} q^-(x, 0) = q_0. \quad (2.4)$$

Тогда условие сопряжения (2.2) вместе с (2.4) означают

$$q^+(0, t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_q}\right) - \frac{\lambda_2}{\tau_q} \int_0^t \exp\left(\frac{\eta - t}{\tau_q}\right) \frac{\partial u^-(x, \eta)}{\partial x} \Big|_{x=0} d\eta. \quad (2.5)$$

Равенство (2.5) задает нелокальное условие сопряжения на границе $S^+ \mathbf{I} S^-$ раздела двух сред, которое является отражением нелокальности процесса переноса тепла в стержне S^- .

В силу (1.9) условие (2.5) означает, что

$$\lambda_1 \frac{\partial u^+}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\lambda_2}{\tau_q} \int_0^t \frac{\partial u^-(x, \eta)}{\partial x} \Big|_{x=0} \exp\left(\frac{\eta-t}{\tau_q}\right) d\eta - q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_q}\right), \quad 0 < t < T. \quad (2.6)$$

Условие (2.6) является нелокальным условием сопряжения для уравнения (1.3) на линии $x=0$ изменения его типа.

3. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности смешанного типа. Характеристики уравнения (1.4) имеют следующий вид: $\xi = x + c_q t$, $\eta = x - c_q t$, где $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ — координатные прямые на евклидовой плоскости точек (ξ, η) .

А. Г. Шашков [4, с. 181] исследовал структурную модель теплопроводности в системе S , когда $l = +\infty$ и на свободный торец $x = -r$, начиная с некоторого времени $t = 0$, поступает изменяющийся во времени тепловой поток

$$-\lambda_1 \frac{\partial u^+}{\partial x} \Big|_{x=-r} = q_r(t); \quad (3.1)$$

на общей границе $x=0$ тел S^+ и S^- имеет место идеальный тепловой контакт

$$\lambda_1 \frac{\partial u^+}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\lambda_2}{\tau_q} \int_0^t \frac{\partial u^-(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=0} \exp\left(\frac{s-t}{\tau_q}\right) ds; \quad (3.2)$$

соблюдены начальные и граничные условия:

$$u^+(x, 0) = 0, \quad -r \leq x \leq 0; \quad (3.3)$$

$$u^-(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^-(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad x > 0; \quad (3.4)$$

$$-\frac{I_2}{t_q} \int_0^t \frac{\partial u^-(x, s)}{\partial x} \exp\left(\frac{s-t}{t_q}\right) ds \Big|_{x=+\infty} = 0. \quad (3.5)$$

Пусть Ω^- — подобласть области Ω_∞^- , ограниченная отрезком $A_0 B_0 = \{(0, t), 0 \leq t \leq T\}$ с концами в точках $A_0 = (0, 0)$, $B_0 = (0, T)$ и частью $A_0 B_1$ характеристики $x - c_q t = 0$, заключенной между точками A_0 и $B_1 = (c_q T, T)$.

Из единственности классического решения задачи Коши (3.4) для уравнения (1.4) вытекает, что $u^-(x, t) = 0$ для всех точек (x, t) , принадлежащих замыканию $\overline{\Omega_\infty^- \setminus \Omega^-}$ области $\Omega_\infty^- \setminus \Omega^-$; другими словами, из (1.4) и (3.4) следует, что температура $u^-(x, t)$ в точках стержня S^- сохраняет свое первоначальное нулевое значение до любого момента времени $t \in [0, x/c_q]$. Следовательно, условие (3.5) является следствием (3.4). Условие (3.4) позволяет положить в (2.4) $q_0 = 0$ и тем самым из (2.6) получить (3.2).

Через $C_0 = (c_q T/2, T/2)$ обозначим точку пересечения характеристики $A_0 B_1$ с характеристикой $B_0 C_0 : x + c_q t = c_q T$, а через D^- — треугольную область, ограниченную отрезком $A_0 B_0$ прямой $x=0$ и характеристиками $A_0 C_0$ и $B_0 C_0$. Ясно, что $\bar{D}^-$ — треугольник с вершинами в точках A_0 , B_0 , C_0 .

Как отмечено выше, температура $u^-(x, t)$ обращается в нуль на характеристике $A_0 B_1$ и, стало быть,

$$u^-(c_q t/2, t/2) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.6)$$

В случае, когда однородное условие (3.4) заменено неоднородным

$$u^-(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x > 0, \quad (3.7)$$

где $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ — заданные достаточно гладкие начальные функции, условие (3.6) заменяется условием

$$u^-(c_q t/2, t/2) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.8)$$

а условие сопряжения записывается в виде (2.6). При этом функция $\psi(t)$ и постоянная величина q_0 однозначно определяются по температуре $\varphi_0(x)$ и скорости ее изменения во времени $\varphi_1(x)$ в начальный момент времени. Это заключение непосредственно вытекает из корректности по Адамару задачи Коши (3.7) для уравнения (1.4) [7, с. 128].

При прикладном моделировании теплопередачи задание условия Коши (3.7) требует прямых измерений температуры $\varphi_0(x)$ и скорости ее изменения $\varphi_1(x)$ в точках $x \in S^-$ в момент времени t . Эти измерения с наперед заданной точностью не всегда возможны. Поэтому при отыскании температурного поля в среде S^+ и на границе раздела A_0 может оказаться более эффективным не условие Коши (3.7), а условие

$$u^-(c_q t, t) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T/2, \quad (3.9)$$

означающее задание температуры $u^-(x, t)$ в каждый момент времени $t \in [0, T/2]$ в точках x среды S^- , определяемых формулой $x = c_q t$.

Такая постановка вопроса приводит к проблеме поиска решения $u(x, t)$ уравнения (1.3) в областях Ω_r^+ и Ω^- , удовлетворяющего условиям сопряжения (2.1), (2.6), краевому условию (3.9) и начальному условию

$$u^-(x, 0) = \varphi(x), \quad -r \leq x \leq 0, \quad (3.10)$$

где $\varphi(x)$ — заданная температура стержня S^+ в начальный момент времени $t = 0$.

Введем обозначения: $D^+ = \Omega_r^+$; $I_n = \{(0, t) : 0 < t < T\}$; $D = D^+ \cup D^- \cup I_n$ — смешанная область задания уравнения (1.3); D_0 — множество внутренних точек треугольника $\bar{D}_0$ с вершинами в точках A_0 , C_0 и $A_1 = (c_q T, 0)$.

Далее под регулярным решением уравнения (1.3) в области D будем понимать решение, непрерывное в замыкании $\bar{D}$, у которого помимо существования в D производных, фигурирующих в этом уравнении, первые производные непрерывны в $D^+ \cup I_n$ и $D^- \cup I_n$, причем след

$\left. \frac{\partial u^-(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}$ суммируем по t на временном сегменте $[0, T]$.

В результате видим, что математическое моделирование процесса теплопередачи в составной системе S приводит к следующим краевым задачам для уравнения (1.3) с нелокальным условием сопряжения на линии изменения его типа.

ЗАДАЧА 3.1. Найти регулярное в области D решение $u(x, t)$ уравнения (1.3), непрерывное в $\bar{D}$ и удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad -r \leq x \leq 0; \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=-r} = \varphi_q(t), \quad 0 < t < T, \quad (3.12)$$

$$u\left(\frac{c_q t}{2}, \frac{t}{2}\right) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (3.13)$$

$$\alpha \left. \frac{\partial u^+}{\partial x} \right|_{x=0} = \beta \int_0^t \left. \frac{\partial u^-(x, s)}{\partial x} \right|_{x=0} \exp\left(\frac{s-t}{\tau_q}\right) ds - \gamma(t), \quad (3.14)$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_q(t) = -q_r(t)/\lambda_1$, $\psi(t)$, $\alpha = \lambda_1$, $\beta = \lambda_2/\tau_q$, $\gamma(t) = q_0 \exp(-t/\tau_q)$ — заданные величины.

ЗАДАЧА 3.2. Пусть $x_0 = c_q T$ и расчетное время T таково, что $l \geq x_0$, где l — длина стержня S^- . Требуется найти распределение температуры $u(0, t)$ для всех $t \in [0, T]$ в точке контакта стержней S^+ и S^- , если известно, что $u(x, t)$ — регулярное решение уравнения

(1.3) в областях D и D_0 , непрерывное в $\overline{D \cup D_0}$ и удовлетворяющее условиям (3.11), (3.12), (3.14) и условию Коши

$$u(x,0) = \Phi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \Phi_1(x), \quad 0 < x < 2x_0, \quad (3.15)$$

где $\Phi_0(x) \in C[0, x_0] \cap C^2]0, x_0[$, $\Phi_0(0) = \phi_0(0)$, $\Phi_1(x) \in C[0, x_0] \cap C^1]0, x_0[$.

Начальное условие (3.15) определяют заданием закона распределения температуры и ее скорости внутри части стержня S^- , заключенной между точками $x=0$ и $x=x_0$.

В случае, когда $r = \infty$, условие (3.12) заменяется требованием, чтобы функция $u^+(x, t)$ было всюду ограниченной:

$$|u^+(x, t)| < M \quad \forall x \in]-\infty, 0[, \quad t \geq 0, \quad (3.16)$$

где M — некоторая положительная постоянная.

4. Качественный анализ модельного варианта задачи 3.1. Рассмотрим задачу 3.1 в случае, когда $r = \infty$, условие (3.12) заменено условием (3.16), а уравнение (1.3) при $x > 0$ — одномерным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_q^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.1)$$

Пусть $u(x, t) = u^-(x, t)$ — решение уравнения (4.1) в области D^- из класса $C(\bar{D}^-) \cap C^1(D^- \cup I_n) \cap C^2(D^-)$, $u(0, t) = \tau(t)$, $\left. \frac{\partial u^-}{\partial x} \right|_{x=0} = v^-(t)$. Тогда оно представимо в виде

$$u(x, t) = \frac{\tau(t + x/c_q) + \tau(t - x/c_q)}{2} + \frac{c_q}{2} \int_{t-x/c_q}^{t+x/c_q} v^-(s) ds. \quad (4.2)$$

Если (4.2) удовлетворяет условию (3.13), то

$$\frac{\tau(t) + \tau(0)}{2} + \frac{c_q}{2} \int_0^t v^-(s) ds = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.3)$$

Если $\psi(t) \in C^1]0, T[$, то из (4.3) получаем, что

$$\tau'(t) + c_q v^-(t) = 2\psi'(t), \quad 0 < t < T. \quad (4.4)$$

В области $D^+ = \Omega_\infty^+$ будем считать, что функция $u(x, t) = u^+(x, t)$ непрерывна в $D_+^+ = \{(x, t) : -\infty < x \leq 0, 0 \leq t \leq T\}$, удовлетворяет в D^+ уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (a = a_1), \quad (4.5)$$

которое при $f(x, t) \equiv 0$ совпадает с уравнением (1.1); начальному условию (3.11), где $r = \infty$, $\phi_0(x) \in C(-\infty, 0]$, $|\phi_0(x)| < M$ для всех $x \in]-\infty, 0]$, $u^+(0, t) = \tau(t) \in C[0, T]$.

Предполагается, что функция $f(x, t)$ в D_+^+ ограничена, непрерывна и удовлетворяет условию Гельдера по x .

Через $G(x, t; \xi, \eta)$ обозначим функцию Грина первой краевой задачи для уравнения (4.5) в области D^+ , которая задается соотношением

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\eta)}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\eta)} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\eta)} \right] \right\}. \quad (4.6)$$

Решение первой краевой задачи: $u(x, 0) = \phi_0(x)$, $u(0, t) = \tau(t)$ для уравнения (4.5) в области D^+ имеет вид

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^0 G(x, t; \xi, 0) \varphi_0(\xi) d\xi - a^2 \int_0^t \frac{\partial G(x, t; 0, \eta)}{\partial \xi} \tau(\eta) d\eta + \\ + \int_{-\infty}^0 \int_0^t G(x, t; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \equiv u(\varphi_0, \tau, f; x, t). \quad (4.7)$$

Из (4.6) видим, что

$$G(x, t; \xi, 0) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right] \right\}; \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial G(x, t; 0, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{2}{ax\sqrt{\pi}} (t-\eta)^{1/2} \frac{d}{d\eta} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(\eta-t)}\right]; \quad (4.9)$$

$$\left. \frac{\partial G(x, t; \xi, \eta)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}a^3(t-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\eta)}\right]. \quad (4.10)$$

Как следует из (4.7), $u(x, t) = u(\varphi_0, 0, 0; x, t) + u(0, \tau, 0; x, t) + u(0, 0, f; x, t)$.

Найдем связь между функциями $\varphi_0(x)$, $\tau(x)$, $f(x, t)$ и $v(t) = \partial u^+ / \partial x|_{x=0}$ на временном интервале I_n .

В силу (4.8) и (4.10)

$$\left. \frac{\partial u(\varphi_0, 0, 0; x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{\xi}{2a^3 t^{3/2}} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2 t}\right] \varphi_0(\xi) d\xi \equiv v(\varphi_0; t).$$

Отсюда, после замены переменной интегрирования ξ , по формуле $\xi = -2a\sqrt{-t \log \eta}$, получаем

$$v(\varphi_0; t) = -\frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \int_0^1 \varphi_0(-2a\sqrt{-t \log \eta}) d\eta. \quad (4.11)$$

Согласно (4.10) находим

$$\left. \frac{\partial u(0, 0, f; x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} \equiv n(f; t) = \frac{1}{\sqrt{p}a^2} \int_0^t \frac{dh}{t-h} \int_{-\infty}^0 \frac{x f(x, h)}{2a\sqrt{t-h}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-h)}\right] dx.$$

Замена $\xi = 2as\sqrt{t-\eta}$ показывает, что

$$v(f; t) = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\eta}{\sqrt{t-\eta}} \int_{-\infty}^0 f(2as\sqrt{t-\eta}, \eta) s \exp(-s^2) ds. \quad (4.12)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$u(0, -\tau, 0; x, t) = a^2 \int_0^t \frac{\partial G(x, t; 0, \eta)}{\partial \xi} \tau(\eta) d\eta.$$

На основании (4.9) она имеет следующий вид:

$$u(0, -\tau, 0; x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau(\eta)}{(t-\eta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\eta)}\right] d\eta. \quad (4.13)$$

Если в (4.13) заменить переменную интегриации η на s по схеме

$$s = \frac{x}{2a\sqrt{t-\eta}} \Leftrightarrow \eta = t - \left(\frac{x}{2as}\right)^2 \Rightarrow d\eta = \frac{x^2}{2a^2 s^3} ds,$$

то получим формулу

$$u(0, -\tau, 0; x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \tau\left(t - \frac{x^2}{4a^2 s^2}\right) \exp(-s^2) ds. \quad (4.14)$$

Если $\tau'(t) \in L[0, T]$, то из (4.14) непосредственным вычислением находим

$$\left. \frac{\partial u(0, -\tau, 0; x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{\tau(0)}{a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2 t}\right] - \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau'(\eta)}{\sqrt{t-\eta}} \exp\left[\frac{x^2}{4a^2(\eta-t)}\right] d\eta. \quad (4.15)$$

Формула (4.15) позволяет получить следующую связь между функцией $\tau(x)$ и функцией $v(\tau; t) = -\partial u(0, \tau, 0; x, t) / \partial x|_{x=0}$:

$$v(\tau; t) = -\frac{\tau(0)}{a\sqrt{\pi t}} - \frac{1}{a} D_{0t}^{-1/2} \tau'(\eta), \quad 0 < t \leq T. \quad (4.16)$$

Здесь и в дальнейшем D_{0t}^ξ означает оператор дробного интегриродифференцирования порядка ξ . Из (4.16), принимая во внимание, что $D_{0t}^{-1/2} \tau'(\eta) = D_{0t}^{1/2} \tau(\eta) - \tau(0) / \sqrt{\pi t}$, получаем важную формулу

$$v(\tau, t) = -\frac{1}{a} D_{0t}^{1/2} \tau(\eta). \quad (4.17)$$

Пусть теперь $v(t) = \partial u^+ / \partial x|_{x=0}$. Очевидно, что

$$v(t) = v(\varphi_0; t) - v(\tau; t) + v(f; t). \quad (4.18)$$

В интеграле (4.12) положим $\eta = \xi t$. Тогда имеем

$$v(f; t) = \frac{2\sqrt{t}}{a\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}} \int_{-\infty}^0 f(2as\sqrt{t}\sqrt{1-\xi}, \xi t) s \exp(-s^2) ds.$$

Из этого равенства находим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(f; t)}{\sqrt{t}} = \frac{2f(0, 0)}{a\sqrt{\pi}} - \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}} \int_{-\infty}^0 s \exp(-s^2) ds.$$

Так как $2 \int_{-\infty}^0 s \exp(-s^2) ds = -1$, $\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}} = 2$, то окончательно получим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(f; t)}{\sqrt{t}} = -\frac{2f(0, 0)}{a\sqrt{\pi}}. \quad (4.19)$$

Из (4.16), (4.18) и (4.19) следует, что если функция $\tau'(t)$ является ограниченной на $[0, T]$ или не обращается в бесконечность порядка, большего чем $1/2$, то поведение $v(t)$ при $t \rightarrow 0$ определяется поведением следующей функции при $t \rightarrow 0$:

$$N_0(t) = v(\varphi_0; t) - v(\tau; t). \quad (4.20)$$

Действительно, поскольку $\tau(0) = \varphi_0(0)$, то из (4.11) и (4.20) следует, что

$$N_0(t) = -\frac{2\varphi_0(0)}{a\sqrt{\pi t}} - \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi_0(-2a\sqrt{-t \log \eta}) - \varphi_0(0)}{a\sqrt{\pi t}} d\eta + \frac{1}{a} D_{0t}^{-1/2} \tau'(\eta). \quad (4.21)$$

Пусть $\varphi_0(x)$ удовлетворяет условию

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(0)| \leq M |x|^h, \quad (4.22)$$

где $M = \text{const} > 0$, $h = \text{const} \geq 1$. Тогда, как нетрудно заметить из (4.21) и (4.22), $N_0(t)$ будет ограниченной на $[0, T]$ в том и только в том случае, когда $\varphi_0(0) = 0$.

Введем в рассмотрение линейный интегральный оператор, действующий на функцию $\varphi(t) \in L[0, T]$ по формуле

$$E_{xp}[\varphi; t] = \int_0^t \varphi(\eta) \exp\left(\frac{\eta - t}{\tau_q}\right) d\eta. \quad (4.23)$$

Условие сопряжения (3.14) в терминах $v(t) = v^+(t)$, $v^-(t)$ и оператора (4.23) имеет вид

$$\alpha v(t) = \beta E_{xp}[v^-; t] - \gamma(t). \quad (4.24)$$

Из (4.24) на основании (4.4) и (4.18) получаем

$$\alpha c_q [v(\varphi_0; t) - v(\tau; t) + v(f; t)] = \beta E_{xp}[2\psi' - \tau'; t] - c_q \gamma(t).$$

Отсюда с учетом (4.16), (4.20) и линейности оператора (4.23) имеем

$$D_{0t}^{-\varepsilon} \tau'(\eta) - \mu E_{xp}[\tau'; t] = F_0(t). \quad (4.25)$$

Здесь и ниже $\varepsilon = 1/2$, $\mu = -a\beta/(\alpha c_q)$,

$$F_0(t) = -a[v(\varphi_0; t) + v(f; t) + \gamma(t)/\alpha] - 2\mu E_{xp}[\psi'; t] - \varphi_0(0)/\sqrt{\pi t}.$$

К обеим частям равенства (4.25) применим оператор $D_{0t}^{-\varepsilon}$. Впоследствии получим

$$\int_0^t \tau'(\eta) d\eta - \mu D_{0t}^{-\varepsilon} E_{xp}[\tau'; \eta] = D_{0t}^{-\varepsilon} F_0(\eta). \quad (4.26)$$

Из определения (4.23) следует, что $E_{xp}[\tau'; t] = \tau(t) - \tau(0) \exp(-t/\tau_q) - E_{xp}[\tau; t]/\tau_q$. Поэтому (4.26) эквивалентно уравнению

$$\tau(t) - \mu D_{0t}^{-\varepsilon} \tau(\eta) + (\mu/\tau_q) D_{0t}^{-\varepsilon} E_{xp}[\tau; \eta] = F_1(t), \quad (4.27)$$

где $F_1(t) - D_{0t}^{-\varepsilon} F_0(\eta) = F_{11}(t) = [1 - \mu D_{0t}^{-\varepsilon} \exp(-\eta/\tau_q)] \tau(0)$.

Пусть $E_p[z] = E_{1/p}[z; 1]$ — функция Миттаг-Леффлера; $T_{0t}^{\varepsilon\mu}$ — оператор, который действует на функцию $\tau(t) \in C[0, T]$ по формуле $T_{0t}^{\varepsilon\mu} \tau = \tau(t) - \mu D_{0t}^{-\varepsilon} \tau(\eta)$; $H_{0t}^{\varepsilon\mu}$ — оператор, обратный оператору $T_{0t}^{\varepsilon\mu}$. Тогда на основании формулы Хилле-Тамаркина [5, с.93] имеем

$$\tau(t) = H_{0t}^{\varepsilon\mu} T_{0t}^{\varepsilon\mu} \tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t E_\varepsilon[\mu(t-\eta)^\varepsilon] T_{0\eta}^{\varepsilon\mu} \tau d\eta. \quad (4.28)$$

ЛЕММА 4.1. Для любой функции $\tau(t) \in C[0, T]$ справедливо равенство

$$D_{0t}^{-\varepsilon} E_{xp}(\tau; \eta) = \varepsilon \sqrt{\pi} D_{0t}^{-3\varepsilon} \{ \tau(\xi) E_1[(\xi-t)/\tau_q; 3\varepsilon] \}.$$

В самом деле, руководствуясь определением (4.23), можно записать

$$\begin{aligned} \Gamma(\varepsilon) D_{0t}^{-\varepsilon} E_{xp}(\tau; \eta) &= \int_0^t (t-\eta)^{-\varepsilon} d\eta \int_0^\eta \exp(\xi/\tau_q - \eta/\tau_q) \tau(\xi) d\xi = \\ &= \int_0^t \tau(\xi) d\xi \int_\xi^t (t-\eta)^{-\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi-\eta}{\tau_q} \right)^k \frac{d\eta}{k!}. \end{aligned}$$

Отсюда принимая во внимание, что

$$\int_\xi^t (t-\eta)^{-\varepsilon} (\eta-\xi)^k d\eta = (t-\xi)^{\varepsilon+k} \int_0^1 s^k (1-s)^{-\varepsilon} ds = \frac{k! \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon+k+1)} (t-\xi)^{\varepsilon+k},$$

получаем

$$\begin{aligned} D_{0t}^{-\varepsilon} E_{xp}(\tau; \eta) &= \int_0^t \tau(\xi) (t-\xi)^\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\xi-t}{\tau_q} \right)^k \frac{d\xi}{\Gamma(\varepsilon+1+k)} = \\ &= \int_0^t \tau(\xi) (t-\xi)^\varepsilon E_1 \left[\frac{\xi-t}{\tau_q}; 3\varepsilon \right] d\xi = \Gamma(3\varepsilon) D_{0t}^{-3\varepsilon} \left\{ \tau(\xi) E_1 \left[\frac{\xi-t}{\tau_q}; 3\varepsilon \right] \right\}. \end{aligned}$$

Но $\Gamma(3\varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\pi}$. Лемма 4.1 доказана.

Теперь установим достоверность следующей леммы.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\Phi(t) \in C[0, T]$. Тогда

$$H_{0t}^{\varepsilon\mu} D_{0t}^{-\varepsilon} \Phi(\xi) = \int_0^t \Phi(\xi) (t-\xi)^{-\varepsilon} E_2[\mu(t-\xi)^\varepsilon; \varepsilon] d\xi, \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H_{0t}^{\varepsilon\mu} D_{0t}^{-\varepsilon} \Phi(\xi) = D_{0t}^{-\varepsilon} \Phi(\xi) + \mu \Phi(t) + \mu^2 H_{0t}^{\varepsilon\mu} D_{0t}^{-\varepsilon} \Phi(\xi). \quad (4.30)$$

В силу (4.28) имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} H_{0t}^{\varepsilon\mu} D_{0t}^{-\varepsilon} \Phi(\xi) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t E_\varepsilon[\mu(t-\eta)^\varepsilon] d\eta \int_0^\eta \frac{\Phi(\xi) d\xi}{(\eta-\xi)^\varepsilon} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Phi(\xi) d\xi \int_\xi^t (\eta-\xi)^{-\varepsilon} E_\varepsilon[\mu(t-\eta)^\varepsilon] d\eta = \\ &= \int_0^t \Phi(\xi) d\xi \frac{\partial}{\partial t} \int_\xi^t (\eta-\xi)^{-\varepsilon} E_\varepsilon[\mu(t-\eta)^\varepsilon] d\eta. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Нетрудно убедиться в том, что функция

$$E^\varepsilon(\xi, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \int_{\xi}^t (\eta - \xi)^{-\varepsilon} E_\varepsilon[\mu(t - \eta)^\varepsilon] d\eta = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{\Gamma(1 + \varepsilon k)} \int_{\xi}^t \frac{(t - \eta)^{\varepsilon k}}{(\eta - \xi)^\varepsilon} d\eta.$$

Положим $\eta = \xi + (t - \xi)s$. Тогда увидим, что

$$E^\varepsilon(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k (t - \xi)^{\varepsilon + \varepsilon k}}{\Gamma(1 + \varepsilon k)} \int_0^1 \frac{(1 - s)^{\varepsilon k}}{s^\varepsilon} ds.$$

Так как

$$\int_0^1 s^{x-1} (1 - s)^{y-1} ds = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} = B(x, y), \quad \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x),$$

то

$$E^\varepsilon(\xi, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{(t - \xi)^\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\mu(t - \xi)^\varepsilon]^k}{\Gamma(\varepsilon + \varepsilon k)} = \frac{\sqrt{\pi}}{(t - \xi)^\varepsilon} E_2[\mu(t - \xi)^\varepsilon; \varepsilon]. \quad (4.32)$$

Из (4.31) и (4.32) вытекает (4.29). В силу этих же равенств имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H_{0t}^{\varepsilon\mu} D_{0t}^{-\varepsilon} \Phi(\xi) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Phi(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k (t - \xi)^{\varepsilon k - \varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon + \varepsilon k)} d\xi = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} D_{0t}^{\varepsilon-1} \Phi(\xi) + \mu \Phi(t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Phi(\xi) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu^k (t - \xi)^{\varepsilon k - \varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon + \varepsilon k)} d\xi = \\ &= D_{0t}^\varepsilon \Phi(\xi) + \mu \Phi(t) + \int_0^t \Phi(\xi) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\varepsilon k - \varepsilon) \mu^k (t - \xi)^{\varepsilon k - \varepsilon - 1}}{\Gamma(1 + \varepsilon k - \varepsilon)} d\xi. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} H_{0t}^{\varepsilon\mu} D_{0t}^{-\varepsilon} \Phi(\xi) - D_{0t}^\varepsilon \Phi(\xi) - \mu \Phi(t) &= \int_0^t \Phi(\xi) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu^k (t - \xi)^{\varepsilon k - \varepsilon - 1}}{\Gamma(\varepsilon k - \varepsilon)} d\xi = \\ &= \mu^2 \int_0^t \Phi(\xi) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu^j (t - \xi)^{\varepsilon j - \varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon j + \varepsilon)} d\xi = \mu^2 \int_0^t \Phi(\xi) (t - \xi)^{-\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\mu(t - \xi)^\varepsilon]^j}{\Gamma(\varepsilon + \varepsilon j)} d\xi. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Легко видеть, что (4.33) есть другая форма записи (4.30). На основании леммы 4.1 заключаем, что уравнение (4.27) эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$T_{0t}^{\varepsilon\mu} \tau + (\varepsilon \sqrt{\pi} \mu / \tau_q) D_{0t}^{-3\varepsilon} \{ \tau(\xi) E_1[(\xi - t) / \tau_q; 3\varepsilon] \} = F_1(t). \quad (4.34)$$

К обеим частям уравнения (4.27) или (4.34) применим оператор $H_{0t}^{\varepsilon\mu}$. В результате получим

$$\tau(t) + (\mu / \tau_q) H_{0t}^{\varepsilon\mu} D_{0t}^{-\varepsilon} E_{xp}[\tau; \eta] = H_{0t}^{\varepsilon\mu} F_1. \quad (4.35)$$

Согласно равенству (4.29) леммы 4.2 имеем:

$$\begin{aligned} H_{0t}^{\varepsilon\mu} D_{0t}^{-\varepsilon} E_{xp}(\tau; \eta) &= \int_0^t E_{xp}(\tau; \xi) (t - \xi)^{-\varepsilon} E_2[\mu(t - \xi)^\varepsilon; \varepsilon] d\xi = \\ &= \int_0^t (t - \eta)^{-\varepsilon} E_2[\mu(t - \eta)^\varepsilon; \varepsilon] d\eta \int_0^\eta \tau(\xi) \exp\left(\frac{\xi - \eta}{\tau_q}\right) d\xi = \\ &= \int_0^t \tau(\xi) d\xi \int_\xi^t (t - \eta)^{-\varepsilon} E_2[\mu(t - \eta)^\varepsilon; \varepsilon] \exp\left(\frac{\xi - \eta}{\tau_q}\right) d\eta = \int_0^t \tau(\xi) (t - \xi)^\varepsilon K(t - \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где

$$K(y) = \int_0^1 (1 - s)^{-\varepsilon} E_2[\mu \sqrt{(1 - s)y}; \varepsilon] \exp\left(\frac{-sy}{\tau_q}\right) ds. \quad (4.37)$$

Равенства (4.30), (4.36) и лемма 4.1 позволяют записать:

$$\frac{\partial}{\partial t} H_{0t}^{\varepsilon\mu} D_{0t}^{-\varepsilon} E_{xp}(\tau; \eta) = D_{0t}^{-\varepsilon} E_{xp}(\tau; \xi) + \mu E_{xp}(\tau; t) + \mu^2 H_{0t}^{\varepsilon\mu} D_{0t}^{-\varepsilon} E_{xp}(\tau; \xi) =$$

$$= \varepsilon \sqrt{\pi} D_{0t}^{-3\varepsilon} \{ \tau(\xi) E_1[(\xi - t)/\tau_q; 3\varepsilon] \} + \mu E_{xp}(\tau; t) + \mu^2 \int_0^t (t - \xi)^\varepsilon K(t - \xi) \tau(\xi) d\xi. \quad (4.38)$$

Правая часть $F_2(t) = H_{0t}^{\varepsilon\mu} F_1$ уравнения (4.35) представима в виде $F_2(t) = H_{0t}^{\varepsilon\mu} D_{0t}^{-\varepsilon} F_0(\eta) + H_{0t}^{\varepsilon\mu} F_{11}(t)$. Поэтому лемма 4.2 дает основание утверждать, что

$$F_2(t) = \int_0^t [F_0(\xi) + \mu F_{11}(\xi)] (t - \xi)^{-\varepsilon} E_2[\mu(t - \xi)^\varepsilon; \varepsilon] d\xi + F_{11}(t); \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} F_2'(t) &= \mu F_0(t) + \mu^2 \int_0^t F_0(\xi) (t - \xi)^{-\varepsilon} E_2[\mu(t - \xi)^\varepsilon; \varepsilon] d\xi + \\ &+ D_{0t}^{-\varepsilon} F_0(\eta) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t E_\varepsilon[\mu(t - \eta)^\varepsilon] F_{11}(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Непосредственным вычислением убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t F_{11}(\eta) E_\varepsilon[\mu(t - \xi)^\varepsilon] d\eta - F_{11}'(t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t F_{11}(\eta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k (t - \eta)^{\varepsilon k}}{\Gamma(1 + \varepsilon k)} d\eta = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t F_{11}(\eta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k (t - \eta)^{\varepsilon k - 1}}{\Gamma(\varepsilon k)} d\eta = \frac{\mu}{\Gamma(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{F_{11}(\eta) d\eta}{(t - \eta)^{1 - \varepsilon}} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t F_{11}(\eta) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu^k (t - \eta)^{\varepsilon k - 1}}{\Gamma(\varepsilon k)} d\eta = \\ &= \mu D_{0t}^{-\varepsilon} F_{11}(\eta) + \mu^2 F_{11}(t) + \mu^3 F_{11}^1(t), \end{aligned} \quad (4.41)$$

где

$$F_{11}^1(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t F_{11}(\eta) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\mu^{k-3} (t - \eta)^{\varepsilon k - 1}}{\Gamma(\varepsilon k)} d\eta = \int_0^t F_{11}(\eta) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\mu^{k-3} (t - \eta)^{\varepsilon k - 2}}{\Gamma(\varepsilon k - 1)} d\eta = \int_0^t F_{11}(\eta) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu^j (t - \eta)^{\varepsilon j - \varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon + \varepsilon j)} d\eta.$$

Легко видеть, что

$$F_{11}^1(t) = \int_0^t \frac{F_{11}(\eta)}{(t - \eta)^\varepsilon} E_2[\mu(t - \eta)^\varepsilon; \varepsilon] d\eta. \quad (4.42)$$

Из (4.41) и (4.42) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t E_\varepsilon[\mu(t - \eta)^\varepsilon] F_{11}(\eta) d\eta &= F_{11}'(t) + \mu D_{0t}^\varepsilon F_{11}(\eta) + \mu_2 F_{11}(t) + \\ &+ \mu^3 \int_0^t F_{11}(\eta) (t - \eta)^{-\varepsilon} E_2[\mu(t - \eta)^\varepsilon; \varepsilon] d\eta. \end{aligned}$$

Это дает нам основание переписать (4.40) в виде

$$\begin{aligned} F_2'(t) &= F_{11}'(t) + D_{0t}^{-\varepsilon} F_0(\eta) + \mu [F_0(t) + D_{0t}^\varepsilon F_{11}(\eta) + \mu F_{11}(t)] + \\ &+ \mu^2 \int_0^t [F_0(\xi) + \mu F_{11}(\xi)] (t - \xi)^{-\varepsilon} E_2[\mu(t - \xi)^\varepsilon; \varepsilon] d\xi. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4.1. Закон распределения температуры $\tau(t)$ в точке идеального контакта смешанной системы S однозначно определяется как решение следующего интегрального уравнения Вольтерра второго рода:

$$\tau(t) = \frac{\mu}{\tau_q} \int_0^t (t - \xi)^\varepsilon K(t - \xi) \tau(\xi) d\xi + F_2(t), \quad (4.44)$$

где $K(t)$ и $F_2(t)$ задаются формулами (4.37) и (4.39);

$$\sqrt{\pi} K(0) = 2; \lim_{y \rightarrow 0} y^\varepsilon K'(y) = \varepsilon \mu, \quad (4.45)$$

если непрерывная при $x \leq 0$ начальная функция $\Phi_0(x)$ удовлетворяет условию (4.22) и при $h = 1$ существует

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\Phi_0(x) - \Phi_0(0)}{x} = \Phi'_0(0), \quad (4.46)$$

то

$$F_2^{(\varepsilon)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_2(t) - F_2(0)}{t^\varepsilon} = \begin{cases} -2aq_0/(\alpha\sqrt{\pi}), & h > 1; \\ -2a[q_0/\alpha + \Phi'_0(0)]/\sqrt{\pi}, & h = 1; \end{cases} \quad (4.47)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} F'_2(t) = -a\mu[q_0/\alpha + \Phi'_0(0)], \quad h = 1. \quad (4.48)$$

Истинность уравнения (4.44) вытекает из (4.35)-(4.37) и (4.39). Поскольку $E_2[0; \varepsilon] = 1/\Gamma(\varepsilon)$ и $\int_0^1 (1-s)^{-\varepsilon} ds = 2$, то из (4.37) прямо следует, что $K(0) = 2/\sqrt{\pi}$. Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} E_2[\mu\sqrt{(1-s)y}; \varepsilon] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\mu(1-s)^\varepsilon]^k \varepsilon k y^{\varepsilon k-1}}{\Gamma(\varepsilon + \varepsilon k)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\mu(1-s)^\varepsilon]^{j+1} (\varepsilon + \varepsilon j) y^{\varepsilon j - \varepsilon}}{\Gamma(1 + \varepsilon j)} = \\ &= \mu \left(\frac{1-s}{y} \right)^\varepsilon \left\{ \varepsilon E_2[\mu\sqrt{(1-s)y}; 1] + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[\mu(1-s)^\varepsilon]^j y^{\varepsilon j}}{\Gamma(\varepsilon j)} \right\} = \\ &= \mu \left(\frac{1-s}{y} \right)^\varepsilon \left\{ \varepsilon E_2[\mu\sqrt{(1-s)y}; 1] + \mu\sqrt{(1-s)y} E_2[\mu\sqrt{(1-s)y}; \varepsilon] \right\}, \end{aligned}$$

из (4.37) нетрудно увидеть (4.45):

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^\varepsilon K'(y) = \varepsilon \mu \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 E_2[\mu\sqrt{(1-s)y}; 1] \exp\left(\frac{-sy}{\tau_q}\right) ds = \varepsilon \mu E_2[0, 1] = \varepsilon \mu.$$

Переходя к доказательству равенства (4.47), вспомним, что $F_2(0) = F_{11}(0) = \tau(0)$ и запишем

$$\tau(0) - F_{11}(t) = \mu\tau(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\tau_q)^{-k}}{k!} D_{0t}^{-\varepsilon} \eta^k = \mu\tau(0) t^\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t/\tau_q)^k}{\Gamma(\varepsilon + 1 + k)}.$$

Следовательно

$$F_{11}(t) = \tau(0) - \mu\tau(0) t^\varepsilon E_1[-t/\tau_q; 3\varepsilon]. \quad (4.49)$$

Представление (4.39) для функции $F_2(t)$ и формула (4.49) позволяют записать

$$\begin{aligned} F_2(t) - F_2(0) + \mu\tau(0) t^\varepsilon E_1[-t/\tau_q; 3\varepsilon] &= \int_0^t [F_0(\xi) + \mu F_{11}(\xi)] (t - \xi)^{-\varepsilon} E_2[\mu(t - \xi)^\varepsilon; \varepsilon] d\xi = \\ &= t^\varepsilon \int_0^1 [F_0(t\eta) + \mu F_{11}(t\eta)] (1 - \eta)^{-\varepsilon} E_2[\mu\sqrt{t(1 - \eta)}; \varepsilon] d\eta. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Из (4.50) и равенств $\Gamma(\varepsilon)E_2[0; \varepsilon] = 1$, $\Gamma(\varepsilon)E_1[0; 3\varepsilon] = 2$ вытекает, что

$$F_2^{(\varepsilon)}(0) = 2F_0(0)/\Gamma(\varepsilon). \quad (4.51)$$

Поскольку функции $v(f; t)$ и $E_{xp}[\Psi'; t]$ при $t \rightarrow 0$ стремятся к 0, а $\gamma(0) = q_0$, то в силу (4.11) предел правой части $F_0(t)$ уравнения (4.25) равен

$$F_0(0) = -\frac{a}{\alpha} q_0 + \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\Phi_0(-2a\sqrt{-t \log \eta}) - \Phi_0(0)}{\sqrt{\pi t}} d\eta.$$

Отсюда при $h > 1$ нетрудно увидеть, что $F_0(0) = -aq_0/\alpha$. Так как $\Gamma(\varepsilon) = \sqrt{\pi}$, то из (4.51) получаем, что $F_2^{(\varepsilon)}(0) = -2aq_0/(\alpha\sqrt{\pi})$. Если же $h = 1$, то в соответствии с (4.46) имеем

$$F_0(0) + aq_0/\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{-2a\sqrt{-\log \eta} [\varphi(x) - \varphi(0)]}{x\sqrt{\pi}} d\eta = -\frac{2a}{\sqrt{\pi}} \Phi'_0(0) \int_0^1 \sqrt{-\log \eta} d\eta.$$

Но $\int_0^1 \sqrt{-\log \eta} d\eta = \int_0^\infty \xi^2 \exp(-\epsilon) d\xi = \Gamma(\epsilon + 1) = \epsilon \Gamma(\epsilon) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Поэтому $F_0(0) = -aq_0/\alpha - a\phi'_0(0)$. Стало быть, $F_2^{(\epsilon)}(0) = -2a[q_0/\alpha + \phi'_0(0)]/\sqrt{\pi}$ и тем самым доказана формула (4.47).

С учетом этого из (4.43) и (4.49) заключаем, что

$$F'_{11}(t) = -\frac{\mu\tau(0)}{\sqrt{\pi t}} + \frac{\mu\tau(0)}{\tau_q} t^\epsilon E_1\left[-\frac{t}{\tau_q}; 3\epsilon\right];$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} F'_2(t) - \mu F_0(0) - \mu^2 \tau(0) = \lim_{t \rightarrow 0} [F'_{11}(t) + \mu D_{0t}^\epsilon F_{11}(\eta)] = \mu \lim_{t \rightarrow 0} \partial_{0t}^\epsilon F_{11}(\eta) = -\tau(0)\mu^2.$$

Стало быть, $\lim_{t \rightarrow 0} F'_2(t) = \mu F_0(0)$, и равенство (4.48) доказано.

Важным следствием теоремы 4.1 являются следующие предложения: $\lim_{t \rightarrow 0} \tau'(t) = a\mu^2[q_0/\alpha + 2\phi'_0(0)]$; пусть $R(t, \xi; \mu/\tau_q) = \sum_{n=0}^\infty K_{n+1}(t, \xi)(\mu/\tau_q)^n$, где $K_1(t, \xi) = (t - \xi)^\epsilon K(t - \xi)$, $K_n(t, \xi) = \int_0^t K_{n-1}(t, \eta) K(\eta, \xi) d\eta$, $n = 2, 3, \dots$, — резольвента ядра $K_1(t, \xi)$, тогда единственное решение уравнения (4.44) определяется формулой

$$\tau(t) = F_2(t) + \frac{\mu}{\tau_q} \int_0^t R(t, \xi; \mu/\tau_q) F_2(\xi) d\xi \quad (4.52)$$

или в виде ряда

$$\tau(t) = \sum_{n=0}^\infty F_{2n}(t)(\mu/\tau_q)^n, \quad (4.53)$$

где $F_{20}(t) = F_2(t)$, $F_{2n}(t) = \int_0^t K_1(t, \xi) F_{2n-1}(\xi) d\xi$, $n = 1, 2, \dots$

ЛЕММА 4.3. Пусть $F_{01}(t) = F_0(t) + \mu F_{11}(t)$. Тогда

$$F_2(t) = F_{11}(t) + \mu D_{0t}^{-\epsilon} F_{11}(\eta) + D_{0t}^{-3\epsilon} [F_0(\eta) + \mu^2 F_{01}(\eta)] + \mu D_{0t}^{-1} F_{01}(\eta) + \mu^3 D_{0t}^{-2} F_0(\xi) E_2[\mu(t - \xi)^\epsilon; 2]. \quad (4.54)$$

Действительно, к обеим частям равенства (4.43) применим оператор D_{0t}^{-1} . В результате будем иметь

$$F_2(t) = F_{11}(t) + D_{0t}^{-3\epsilon} F_0(\eta) + \mu D_{0t}^{-1} F_{01}(\eta) + \mu D_{0t}^{-1} D_{0\eta}^{-\epsilon} F_{11}(\xi) + \mu^2 F_{21}(t), \quad (4.55)$$

где

$$F_{21}(t) = \int_0^t d\eta \int_0^\eta \frac{F_{01}(\xi) E_2[\mu(\eta - \xi)^\epsilon; \epsilon]}{(\eta - \xi)^\epsilon} d\xi = \int_0^t F_{01}(\xi) d\xi \int_\xi^t (\eta - \xi)^{-\epsilon} E_2[\mu(\eta - \xi)^\epsilon; \epsilon] d\eta. \quad (4.56)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_\xi^t (\eta - \xi)^{-\epsilon} E_2[\mu(\eta - \xi)^\epsilon; \epsilon] d\eta &= \sum_{k=0}^\infty \frac{\mu^k}{\Gamma(\epsilon + \epsilon k)} \int_\xi^t (\eta - \xi)^{\epsilon k - \epsilon} d\eta = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{\mu^k (t - \xi)^{\epsilon k + \epsilon}}{\Gamma(3\epsilon + \epsilon k)} = (t - \xi)^\epsilon \left[\frac{1}{\Gamma(3\epsilon)} + \mu(t - \xi)^\epsilon \sum_{j=0}^\infty \frac{\mu^j (t - \xi)^{\epsilon j}}{\Gamma(4\epsilon + \epsilon j)} \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (t - \xi)^\epsilon + \mu(t - \xi) E_2[\mu(t - \xi)^\epsilon; 2], \end{aligned}$$

то

$$F_{21}(t) = D_{0t}^{-3\epsilon} F_{01}(\xi) + \mu \int_0^t (t - \xi) E_2[\mu(t - \xi)^\epsilon; 2] F_{01}(\xi) d\xi. \quad (4.57)$$

Теперь нетрудно видеть, что из (4.55)-(4.57) и равенства $F_2(0) = \phi_2(0)$ вытекает лемма 4.3.

Из (4.52) непосредственно получаем

$$\|\tau\| \leq \left(1 + \frac{|\mu|}{\tau_q} R_s\right) \|F_2\|, \quad (4.58)$$

где $\|\cdot\|$ — норма в банаховом пространстве $C[0, T]$,

$$R_s = \sup_{[0, T]_0} \int_0^t |R(t, \xi; \mu/\tau_q)| d\xi. \quad (4.59)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть: $\tau(t)$ — решение уравнения (4.52); $\|f\|_s = \sup_{S^- \times [0, T]} |f(x, t)| < \infty$;

$\|\varphi_0\|_\varepsilon = \sup |[\varphi_0(x) - \varphi_0(0)]/x| < \infty$. Тогда существует такая, не зависящая от γ , f , ψ , φ_0 , постоянная $C > 0$, что

$$|\tau| \leq \left(1 + \frac{|\mu|}{\tau_q} R_s\right) C [|\varphi_0(0)| + \|\gamma\| + \|\varphi_0\|_\varepsilon + \|\psi\| + \|f\|_s].$$

Доказательство начнем с легко проверяемого неравенства

$$|D_{0t}^{-\delta} \psi(\xi)| \leq \|\psi\| t^\delta / \Gamma(1 + \delta), \quad (4.60)$$

справедливого для любого $\delta > 0$ и для любой функции ψ с $\|\psi\| < \infty$.

Из (4.39) и леммы 4.3 имеем

$$F_2(t) = F_{11}(t) + D_{0t}^{-\varepsilon} F_{01}(\xi) + \mu \int_0^t F_{01}(\xi) E_2[\mu(t - \xi)^\varepsilon; 1] d\xi. \quad (4.61)$$

Согласно (4.60) находим

$$|D_{0t}^{-\varepsilon} F_{01}(\xi)| \leq \varepsilon \|F_{01}\| t^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \leq \varepsilon \sqrt{\pi t} (\|F_0\| + |\mu| \|F_{11}\|).$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 F_{01}(\xi) E_2[\mu(t - \xi)^\varepsilon; 1] d\xi \right| &\leq \|F_{01}\| \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \frac{|\mu|^k (t - \xi)^{\varepsilon k}}{\Gamma(1 + \varepsilon k)} d\xi = \\ &= \|F_{01}\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mu|^k t^{\varepsilon k + 1}}{(1 + \varepsilon k) \Gamma(1 + \varepsilon k)} \leq (\|F_0\| + |\mu| \|F_{11}\|) t E_2[|\mu| t^\varepsilon; 2]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

На основании (4.61) и (4.62) заключаем:

$$|F_2(t)| \leq (1 + \varepsilon \sqrt{\pi t} |\mu| + t \mu^2 E_2[|\mu| t^\varepsilon; 2]) \|F_{11}\| + (\varepsilon \sqrt{\pi t} + t |\mu| E_2[|\mu| t^\varepsilon; 2]) \|F_0\|. \quad (4.63)$$

Переходя к оценке $\|F_0\|$, заметим, что ввиду равенства (4.11)

$$\begin{aligned} |F_0| - |a\gamma/\alpha + av(f; t) - 2\mu E_{xp}[\psi'; t]| &\leq \\ &\leq \left| \frac{-2a \int_0^1 \frac{\sqrt{-\log \eta} [\varphi_0(-2a\sqrt{-t \log \eta}) - \varphi_0(0)]}{-2a\sqrt{-t \log \eta}} d\eta \right| \leq \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \|\varphi_0\|_\varepsilon \int_0^1 \sqrt{-\log \eta} d\eta = a \|\varphi_0\|_\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Далее, согласно (4.23) имеем

$$|E_{xp}[\psi'; t]| = |\psi(t) - \psi(0) \exp(-t/\tau_q) - (1/\tau_q) E_{xp}[\psi; t]| \leq |\psi(t) - \psi(0) \exp(-t/\tau_q)| + (1/\tau_q) |E_{xp}[\psi; t]|.$$

Но $|E_{xp}[\psi; t]| \leq |\psi| \exp(-t/\tau_q) \int_0^t \exp(\eta/\tau_q) d\tau = |\psi| \tau_q [1 - \exp(-t/\tau_q)]$. Стало быть,

$$|E_{xp}[\psi'; t]| \leq \|\psi(t) - \psi(0) \exp(-t/\tau_q)\| + [1 - \exp(-t/\tau_q)] \|\psi\|. \quad (4.65)$$

Из определения функции $v(f; t)$ видим, что

$$|v(f; t)| \leq -\frac{2}{a} \left(\frac{t}{\pi}\right)^\varepsilon \|f\|_s \int_0^1 (1 - \xi)^{-\varepsilon} d\xi \int_{-\infty}^0 s \exp(-s^2) ds.$$

Поэтому

$$|v(f; t)| \leq \frac{2}{a} \left(\frac{t}{\pi}\right)^\varepsilon \|f\|_s. \quad (4.66)$$

В силу (4.49)

$$|F_{11}(t)| \leq |\tau(0)| \left(1 + \frac{2|\mu|t^\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \right). \quad (4.67)$$

Таким образом, из (4.64)-(4.66) имеем оценку

$$|F_0(t)| \leq |a/\alpha| \|\gamma\| + (t/\pi)^\varepsilon \|f\|_s + 2|\mu| \|\psi(t) - \psi(0)\exp(-t/\tau_q)\| + 2|\mu| \|\psi\| + a\|\phi_0\|_\varepsilon. \quad (4.68)$$

Оценки (4.63) и (4.68) дают основание утверждать: существует не зависящая от γ , f , ψ и ϕ_0 положительная постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|F_0\| \leq C(\|\gamma\| + \|\psi\| + \|\phi_0\|_\varepsilon + \|f\|_s), \quad \|F_{11}\| \leq C|\phi_0(0)|. \quad (4.69)$$

Неравенства (4.69) говорят о справедливости первой оценки теоремы 4.2.

Оценим теперь $|\tau'|$ в предположении, что $\tau(0) = \phi_0(0) = 0$. Как следует из (4.44) и (4.45)

$$\tau'(t) = \frac{\mu}{\tau_q} \int_0^t \tau(\xi) [y^\varepsilon K(y)]' d\xi + F_2'(t), \quad y = t - \xi. \quad (4.70)$$

В силу (4.37) $[y^\varepsilon K(y)]' = K_1(y) + K_2(y)$, где

$$K_1(y) = -\frac{1}{\tau_q} \int_0^1 s(1-s)^{-\varepsilon} E_2[\mu\sqrt{(1-s)y}; \varepsilon] \exp(-sy/\tau_q) ds,$$

$$K_2(y) = \int_0^1 (1-s)^{-\varepsilon} K_3(s, y) \exp(-sy/\tau_q) ds.$$

Легко убедиться в том, что

$$\begin{aligned} y^\varepsilon K_3(s, y) &= y^\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} E_2[\mu\sqrt{(1-s)y}; \varepsilon] = y^\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k (1-s)^{\varepsilon k} y^{\varepsilon k + \varepsilon}}{\Gamma(\varepsilon k + \varepsilon)} = \\ &= \frac{\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k (1-s)^{\varepsilon k} (\varepsilon k + \varepsilon) y^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon k + \varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon)} + \mu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1+\varepsilon j) \mu^j [\sqrt{(1-s)y}]^{j+1}}{\Gamma(1+\varepsilon j)} = \\ &= \frac{\varepsilon}{\Gamma(\varepsilon)} + \mu \sqrt{y(1-s)} \left\{ E_\varepsilon[\mu\sqrt{y(1-s)}] + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu^j (1-s)^{\varepsilon j} y^{\varepsilon j}}{\Gamma(\varepsilon j)} \right\}. \end{aligned}$$

Другими словами

$$K_3(s, y) = \varepsilon(\pi y)^{-\varepsilon} + \mu(1-s)^\varepsilon E_\varepsilon[\mu\sqrt{y(1-s)}] + \mu^2(1-s)^\varepsilon E_2[\mu\sqrt{y(1-s)}; \varepsilon]. \quad (4.71)$$

На основании (4.71) можно записать:

$$\begin{aligned} |K_2(y)| &\leq \int_0^1 (1-s)^{-\varepsilon} |K_3(s, y)| ds \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi y}} \int_0^1 (1-s)^{-\varepsilon} ds + \\ &+ |\mu| \int_0^1 E_\varepsilon[\mu|\sqrt{y(1-s)}|] ds + \mu^2 y^\varepsilon \int_0^1 (1-s)^\varepsilon E_2[\mu\sqrt{y(1-s)}; \varepsilon] ds. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Введем функцию

$$F_\rho[z; \alpha, \beta] = \int_0^1 t^{\alpha-1} E_{1/\rho}[zt^\rho; \beta] dt, \quad (4.73)$$

где α , β и ρ — произвольные числа, $\alpha > 0$, $\rho > 0$.

Из определения функции типа Миттаг-Леффлера получаем, что

$$F_\rho[z; \alpha, \beta] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \rho k)} \int_0^1 t^{\alpha + \rho k - 1} dt.$$

Поэтому

$$F_\rho[z; \alpha, \beta] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\alpha + \rho k) \Gamma(\beta + \rho k)}. \quad (4.74)$$

Очевидно, что $F_\rho[z; \alpha, \alpha] = E_{1/\rho}[z; \alpha + 1]$.

В силу (4.73) и (4.74)

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_\varepsilon[|\mu| \sqrt{y(1-s)}] ds &= \int_0^1 E_{1/\varepsilon}[|\mu| y^\varepsilon t^\varepsilon; 1] dt = E_2[|\mu| y^\varepsilon; 2], \\ \int_0^1 (1-s)^\varepsilon E_2[|\mu| \sqrt{y(1-s)}; \varepsilon] ds &= \int_0^1 t^\varepsilon E_{1/\varepsilon}[|\mu| y^\varepsilon t^\varepsilon; \varepsilon] dt = \\ &= F_\varepsilon[|\mu| y^\varepsilon; 1 + \varepsilon, \varepsilon] = F_\varepsilon[|\mu| y^\varepsilon; 3\varepsilon, \varepsilon], \end{aligned}$$

и из неравенства (4.72) имеем

$$|K_2(y)| \leq (\pi y)^{-\varepsilon} + |\mu| E_2[|\mu| y^\varepsilon; 2] + \mu^2 y^\varepsilon F_\varepsilon[|\mu| y^\varepsilon; 3\varepsilon, \varepsilon]. \quad (4.75)$$

Функция

$$K_1(y) = \frac{\exp(-y/\tau_q)}{-\tau_q} \int_0^1 t^{-\varepsilon} (1-t) E_2[\mu(ty)^\varepsilon; \varepsilon] \exp(ty/\tau_q) dt$$

допускает следующую оценку:

$$\begin{aligned} |K_1(y)| &\leq \frac{1}{\tau_q} \int_0^1 t^{-\varepsilon} (1-t) E_2[|\mu| (ty)^\varepsilon; \varepsilon] dt = \\ &= \frac{1}{\tau_q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mu|^k y^{\varepsilon k}}{\Gamma(\varepsilon + \varepsilon k)} \int_0^1 t^{\varepsilon k - \varepsilon} (1-t) dt = \frac{1}{\tau_q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mu|^k y^{\varepsilon k}}{\Gamma(2 + \varepsilon + \varepsilon k)}. \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$|K_1(y)| \leq E_2[|\mu| y^\varepsilon; 5\varepsilon] / \tau_q. \quad (4.76)$$

Из (4.70) имеем:

$$|\tau'(t)| \leq \frac{|\mu|}{\tau_q} \|\tau(t)\| \int_0^t [|K_1(t-\xi)| + |K_2(t-\xi)|] d\xi + |F_2'(t)|. \quad (4.77)$$

Но согласно (4.76)

$$\begin{aligned} \int_0^t |K_1(t-\xi)| dt &= \int_0^t |K_1(y)| dy \leq \frac{1}{\tau_q} \int_0^t E_2[|\mu| y^\varepsilon; 5\varepsilon] dy = \\ &= \frac{1}{\tau_q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mu|^k}{\Gamma(5\varepsilon + \varepsilon k)} \int_0^t y^{\varepsilon k} dy = \frac{1}{\tau_q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mu|^k t^{\varepsilon k + 1}}{(\varepsilon k + 1) \Gamma(5\varepsilon + \varepsilon k)}, \end{aligned}$$

стало быть

$$\int_0^t |K_1(t-\xi)| d\xi \leq \frac{t}{\tau_q} F_\varepsilon[|\mu| t^\varepsilon; 1, 5\varepsilon]. \quad (4.78)$$

Аналогично, в соответствии с (4.57), можно записать

$$\begin{aligned} \int_0^t |K_2(y)| dy - 2 \left(\frac{t}{\pi} \right)^\varepsilon &= |\mu| \int_0^t E_2[|\mu| y^\varepsilon; 2] dy + \mu^2 \int_0^t y^\varepsilon F_\varepsilon[|y| y^\varepsilon; 3\varepsilon, \varepsilon] dy = \\ &= |\mu| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mu|^k}{\Gamma(2 + \varepsilon k)} \int_0^t y^{\varepsilon k} dy + \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mu|^k}{(3\varepsilon + \varepsilon k) \Gamma(\varepsilon + \varepsilon k)} \int_0^t y^{\varepsilon k + \varepsilon} dy = \\ &= |\mu| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mu|^k t^{\varepsilon k + 1}}{(1 + \varepsilon k) \Gamma(2 + \varepsilon k)} + \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mu|^k t^{\varepsilon k + 3\varepsilon}}{(3\varepsilon + \varepsilon k)(\varepsilon k + 3\varepsilon) \Gamma(\varepsilon + \varepsilon k)}. \end{aligned}$$

Так как $(3\varepsilon + \varepsilon k)(\varepsilon k + 3\varepsilon) \Gamma(\varepsilon + \varepsilon k) \geq (3\varepsilon + \varepsilon k)(\varepsilon + \varepsilon k) \Gamma(\varepsilon + \varepsilon k) = (3\varepsilon + \varepsilon k) \Gamma(1 + \varepsilon + \varepsilon k) = (3\varepsilon + \varepsilon k) \times \Gamma(3\varepsilon + \varepsilon k) = \Gamma(1 + 3\varepsilon + \varepsilon k) = \Gamma(5\varepsilon + \varepsilon k)$, то

$$\int_0^t |K_2(y)| dy \leq 2 \left(\frac{t}{\pi} \right)^\varepsilon + |\mu| t F_\varepsilon[|\mu| t^\varepsilon; 1, 2] + \mu^2 t^{3\varepsilon} E_2[|\mu| t^\varepsilon; 5\varepsilon].$$

Поэтому

$$\int_0^t |K_2(y)| dy \leq 2 \left(\frac{t}{\pi} \right)^\varepsilon + |\mu| t F_\varepsilon[|\mu| t^\varepsilon; 1, 2] + \mu^2 t^{3\varepsilon} F_\varepsilon[|\mu| t^\varepsilon; 3\varepsilon, 3\varepsilon].$$

В оценке (4.77) примем во внимание (4.78) и последнее неравенство. Тогда будем иметь

$$|\tau'(t)| \leq \frac{\|\tau\| \|\mu\|}{\tau_q^2} t^\varepsilon \left\{ \frac{2\tau_q}{\sqrt{\pi}} + t^\varepsilon F_\varepsilon[|\mu| t^\varepsilon; 1, 5\varepsilon] + |\mu| \tau_q t^\varepsilon F_\varepsilon[|\mu| t^\varepsilon; 1, 2] + \mu^2 \tau_q t^{3\varepsilon} F_\varepsilon[|\mu| t^\varepsilon; 3\varepsilon, 3\varepsilon] \right\} + |F_2'(t)|. \quad (4.79)$$

Равенство (4.43) при $\tau(0) = 0$ принимает следующий вид:

$$F_2'(t) = D_{0t}^{-\varepsilon} F_0(\eta) + \mu F_0(t) + \mu^2 \int_0^t F_0(\xi)(t-\xi)^{-\varepsilon} E_2[|\mu|(t-\xi)^\varepsilon; \varepsilon] d\xi.$$

Поэтому

$$|F_2'(t)| \leq \|F_0\| \left\{ |\mu| + D_{0t}^{-\varepsilon} 1 + \mu^2 \sqrt{\pi} D_{0t}^{-\varepsilon} E_2[|\mu|(t-\eta)^\varepsilon; \varepsilon] \right\}.$$

Так как $D_{0t}^{-\varepsilon} 1 = t^\varepsilon / \Gamma(3\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} D_{0t}^{-\varepsilon} E_2[|\mu|(t-\eta)^\varepsilon; \varepsilon] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mu|^k}{\Gamma(\varepsilon + \varepsilon k)} \int_0^t (t-\eta)^{\varepsilon k + \varepsilon - 1} d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\mu|^k t^{\varepsilon k + \varepsilon}}{(\varepsilon k + \varepsilon) \Gamma(\varepsilon + \varepsilon k)} = \\ &= t^\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\mu| t^\varepsilon)^k}{\Gamma(1 + \varepsilon + \varepsilon k)} = t^\varepsilon E_2[|\mu| t^\varepsilon; 1 + \varepsilon], \end{aligned}$$

то

$$|F_2'(t)| \leq \left\{ |\mu| + \frac{t^\varepsilon}{\Gamma(3\varepsilon)} + t^\varepsilon \mu^2 E_2[|\mu| t^\varepsilon; 3\varepsilon] \right\} \|F_0\|. \quad (4.80)$$

Отсюда, согласно оценке (4.69), следует, что

$$|F_2'(t)| \leq C \left\{ |\mu| + t^\varepsilon / \Gamma(3\varepsilon) + t^\varepsilon \mu^2 E_2[|\mu| t^\varepsilon; 3\varepsilon] \right\} (\|\gamma\| + \|\psi\| + \|f\|_s + \|\phi_0\|_\varepsilon). \quad (4.81)$$

В неравенстве (4.79) учтем (4.81). В результате будем иметь

$$|\tau'(t)| \leq \frac{\|\tau\| \|\mu\|}{\tau_q^2} t^\varepsilon M_1(t) + C (\|\gamma\| + \|\psi\| + \|\phi_0\|_\varepsilon + \|f\|_s) M_2(t), \quad (4.82)$$

где

$$M_1(t) = 2\tau_q / \sqrt{\pi} + t^\varepsilon F_\varepsilon[|\mu| t^\varepsilon; 1, 5\varepsilon] + |\mu| \tau_q t^\varepsilon F_\varepsilon[|\mu| t^\varepsilon; 1, 2] + \mu^2 \tau_q t^{3\varepsilon} F_\varepsilon[|\mu| t^\varepsilon; 3\varepsilon, 3\varepsilon], \quad (4.83)$$

а

$$M_2(t) = |\mu| + t^\varepsilon / \Gamma(3\varepsilon) + \mu^2 t^\varepsilon E_2[|\mu| t^\varepsilon; 3\varepsilon]. \quad (4.84)$$

Система оценок (4.81)-(4.84) вместе с теоремой 4.2 сводят задачу получения априорных оценок для уравнения смешанного типа к хорошо изученной проблеме для параболического и гиперболического уравнений теплопроводности. Из этих оценок по стандартной схеме следует единственность и устойчивость решения смешанной задачи.

5. Аналог редукции задачи 3.2 к задаче 3.1. Вначале рассмотрим случай уравнения (4.1). Решение $u(x, t)$ задачи Коши (3.15) для уравнения (4.1) в области D_0 однозначно определяется формулой Даламбера

$$2u(x, t) = \Phi_0(x + c_q t) + \Phi_0(x - c_q t) + \frac{1}{c_q} \int_{x-c_q t}^{x+c_q t} \Phi_1(\xi) d\xi. \quad (5.1)$$

Поскольку начальные функции $\Phi_0(x)$ и $\Phi_1(x)$ принадлежат пространству $C[0, x_0]$, то из (5.1) находим функцию

$$2\psi(t) = 2u\left(\frac{c_q t}{2}, \frac{t}{2}\right) = \Phi_0(c_q t) + \Phi_0(0) + \frac{1}{c_q} \int_0^{c_q t} \Phi_1(\xi) d\xi.$$

Так как $0 \leq c_q t \leq x_0 = c_q T$, то участвующая в условии (3.13) граничная функция $\psi(t)$ для любого момента $t \in [0, T]$ однозначно определяется формулой

$$\psi(t) = \frac{\Phi_0(c_q t) + \Phi_0(0)}{2} + \frac{1}{2c_q} \int_0^{c_q t} \Phi_1(\xi) d\xi. \quad (5.2)$$

Как видно из (5.2), задача определения граничной функции $\psi(t)$ по начальным данным $\Phi_0(x)$ и $\Phi_1(x)$ является корректно поставленной. Устойчивость решения этой задачи относительно малых вариаций начальных данных вытекает из оценок

$$2\|\psi(t)\|_{C[0,T]} \leq \|\Phi_0(x) + \Phi_0(0)\|_{C[0,x_0]} + T\|\Phi_1(x)\|_{C[0,x_0]}; \quad (5.3)$$

$$2\|\psi'(t)\|_{C[0,T]} \leq \|\Phi_0'(x)\|_{C[0,x_0]} + \|\Phi_1(x)\|_{C[0,x_0]}. \quad (5.4)$$

Неравенства (5.3) и (5.4) вместе с (4.3) и (4.4) позволяют получить соответствующие оценки для функции $\tau(x)$.

Вернемся теперь к уравнению (1.4), которое простой заменой $y = c_q t$ сводится к уравнению

$$U_{xx} - U_{yy} + bU_y = 0, \quad b = -1/(c_q \tau_q). \quad (5.5)$$

В силу (3.15) решение $U(x, y) = u(x, y/c_q)$ уравнения (5.5) должно удовлетворять условию Коши:

$$U(x, 0) = \Phi_0(x), \quad U_y(x, 0) = \Phi_1(x)/c_q, \quad 0 < x < x_0. \quad (5.6)$$

Далее понадобятся следующие вспомогательные предложения.

Пусть

$$E_{1/\rho}[z; \mu] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu_1 + \rho_1 k) \Gamma(\mu_2 + \rho_2 k)}, \quad (5.7)$$

— обобщенная функция Райта [10], $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ — упорядоченная пара неотрицательных чисел, а $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ — пара, вообще говоря, комплексных чисел. Через $E_v[z]$ обозначим функцию (5.7) при $\rho = (1, 1)$, $\mu = (1, v+1)$:

$$E_v[z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k) \Gamma(1+v+k)}. \quad (5.8)$$

Отметим, что функция (5.8) связана с функцией Бесселя $J_v(z)$ следующим образом:

$$J_v(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^v E_v\left[\frac{-z^2}{4}\right], \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi; \quad (5.9)$$

она при $v=0$ совпадает с функцией, которую Э.Гурса [5, с. 150] обозначает символ $J(z)$.

Как видно из (5.8) и (5.9)

$$E_0[z] = J(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k!)^2}, \quad J_0(2\sqrt{z}) = E_0[-z], \quad J_1(2\sqrt{z}) = \sqrt{z} E_1[-z]. \quad (5.10)$$

Теперь вернемся к системе (5.5)-(5.6).

Пользуясь хорошо известной (см. [7, с. 138]) формулой, определяющей решение $U(x, y)$ задачи Коши (5.6) для уравнения (5.5), и принимая во внимание четность функции $J_0(z)$, нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} 2\exp(\mu y)U(x, y) &= \Phi_0(x+y) + \Phi_0(x-y) + \\ &+ \mu \int_{x-y}^{x+y} \left\{ J_0\left(-\mu\sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}\right) - \frac{yJ_1\left(-\mu\sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}\right)}{\sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}} \right\} \Phi_0(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{y}{c_q} \int_{x-y}^{x+y} J_0\left(-\mu\sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}\right) \Phi_1(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Пусть $\delta = b/4$. Тогда из (5.11) в силу (5.10) имеем

$$\begin{aligned} 2\exp(-2\delta y)U(x, y) &= \Phi_0(x+y) + \Phi_0(x-y) - \\ &- 2\delta \int_{x-y}^{x+y} \left\{ E_0\left[-\delta^2|y^2 - (x-\xi)^2|\right] - \delta y E_1\left[-\delta^2|y^2 - (x-\xi)^2|\right] \right\} \Phi_0(\xi) d\xi + \end{aligned}$$

$$+ \frac{y}{c_q} \int_{x-y}^{x+y} E_0 \left[-\delta^2 \left| y^2 - (x-\xi)^2 \right| \right] \Phi_1(\xi) d\xi, \quad \delta = -\frac{\mu}{2}. \quad (5.12)$$

Формула (5.12) однозначно определяет значение $\psi(t) = U(y/2, y/2)$, $y = c_q t$ на характеристике $A_0 C_0$:

$$2\psi(t) = [\Phi_0(y) + \Phi_0(0)] \exp(\delta y) - 2\delta \exp(\delta y) \int_0^y \left\{ E_0 \left[\xi \delta^2 (y - \xi) \right] - \frac{\delta y}{2} E_1 \left[\xi (y - \xi) \delta^2 \right] \right\} \Phi_0(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{y}{2c_q} \int_0^y E_0 \left[\xi (y - \xi) \delta^2 \right] \Phi_1(\xi) d\xi. \quad (5.13)$$

Равенство (5.13) говорит о том, что задача определения граничной функции $\psi(t)$ по начальным данным $\Phi_0(x)$ и $\Phi_1(x)$ является корректной и в общем случае.

6. О фундаментальном соотношении между температурой и ее градиентом в точке идеального контакта в случае обобщенного закона Фурье. Рассмотрим задачу 3.1 в случае, когда $\Phi_0(x) \equiv 0$, $\psi(t) = 0$. Как замечено ранее, это означает, что имеют место условия (4.3) и (3.4).

Пусть: $u(x, t)$ — регулярное решение уравнения (1.4) в области D^- ; $X = c_q t$; $Y = -x$; $\mu = 1/(2c_q \tau_q)$. Тогда функция

$$U(X, Y) = u(-Y, X/c) \exp(\mu X), \quad c_q = c \quad (6.1)$$

будет решением уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \mu^2 U \quad (6.2)$$

в треугольной области D_- евклидовой плоскости точек (X, Y) , ограниченной характеристиками $A^0 C^0 : X + Y = 0$, $B^0 C^0 : X - Y = cT$ и отрезком $\overline{A^0 B^0} = \{(X, 0), 0 \leq X \leq cT\}$.

Известно [3, с. 7], что если $U = U(X, Y)$ — регулярное решение уравнения (6.2) из класса $C(\bar{D}_-) \cap C^1(D_- \cup A_0 B_0)$, $U_Y|_{Y=0} \in L[0, cT]$, то

$$\left(\frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial U}{\partial X} \right) \Big|_{Y=0} = \mu \int_0^X \frac{J_1[\mu(X - \xi)]}{X - \xi} U(\xi, 0) d\xi, \quad (6.3)$$

$$U(X, 0) = \int_0^X J_0[\mu(X - \xi)] \frac{\partial U(\xi, Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=0} d\xi. \quad (6.4)$$

В силу (6.1) имеем

$$U(\xi, 0) = u(0, \xi/c) \exp(\mu \xi) = \tau(\xi/c) \exp(\mu \xi),$$

$$U_Y|_{Y=0} = -u_x|_{x=0} \exp(\mu ct) = -v^-(t) \exp(\mu ct),$$

$$U_Y|_{Y=0} = \left[\frac{1}{c} u_t|_{x=0} + \mu u(0, t) \right] \exp(\mu ct) = \left[\frac{1}{c} \tau'(t) + \mu \tau(t) \right] \exp(\mu ct).$$

Принимая это во внимание, из (6.3) и (6.4) получаем

$$v^-(t) + \frac{1}{c} \tau'(t) + \mu \tau(t) = -\mu \exp(-\mu ct) \int_0^{ct} \frac{J_1[\mu(ct - \xi)]}{ct - \xi} \tau\left(\frac{\xi}{c}\right) \exp(\mu \xi) d\xi =$$

$$= -\mu \int_0^t \frac{J_1[\mu c(t - \eta)]}{t - \eta} \exp(\mu c(\eta - t)) \tau(\eta) d\eta,$$

$$\tau(t) \exp(\mu ct) = - \int_0^{ct} J_0[\mu(ct - \xi)] v^-\left(\frac{\xi}{c}\right) \exp(\mu \xi) d\xi = -c \int_0^t J_0[\mu c(t - \eta)] v^-(\eta) \exp(\mu c\eta) d\eta.$$

Согласно (5.9) $J_1[\mu c(t - \eta)] = \frac{1}{2} [\mu c(t - \eta)] E_1[-\mu^2 c^2 (t - \eta)^2 / 4]$. Поэтому

$$v^-(t) + \frac{1}{c} \tau'(t) + \mu \tau(t) = -\frac{c\mu^2}{2} \int_0^t E_1 \left[-\left(\frac{\mu c(t-\eta)}{2} \right)^2 \right] \exp[\mu c(\eta-t)] \tau(\eta) d\eta, \quad (6.5)$$

$$\tau(t) = -c \int_0^t E_0 \left[-\left(\frac{\mu c(t-\eta)}{2} \right)^2 \right] \exp[\mu c(\eta-t)] v^-(\eta) d\eta. \quad (6.6)$$

7. О фундаментальном соотношении между температурой и ее градиентом в точке идеального контакта в случае закона Фурье. В этом и следующих разделах изложим схему получения фундаментального соотношения между $\tau(t)$ и $v(t)$ в случае, когда соблюдено условие (3.3).

Уравнение Фурье (1.3) в области Ω^+ в терминах новых обозначений

$$X = x + r, \quad Y = a^2 t, \quad a = a_1, \quad U(X, Y) = u^+(X - r, Y / a^2)$$

принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}, \quad 0 < X < r, \quad 0 < Y < a^2 T. \quad (7.1)$$

Функция Грина $G(X, Y; \xi_1, \eta_1)$ смешанной краевой задачи:

$$\begin{aligned} U(X, 0) &= \Phi_0(X - r), \quad U|_{X=r} = \tau\left(\frac{Y}{a^2}\right), \\ \frac{\partial U}{\partial X}\bigg|_{X=0} &= -\frac{1}{\lambda_1} q_r\left(\frac{Y}{a^2}\right), \quad 0 < Y < Ta^2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

для уравнения (7.1) задается формулой [4, с. 272]

$$\begin{aligned} G(X, Y; \xi_1, \eta_1) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi(Y - \eta_1)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\exp \frac{(X - \xi_1 + 4rn)^2}{4(\eta_1 - Y)} + \exp \frac{(X + \xi_1 + 4rn)^2}{4(\eta_1 - Y)} - \right. \\ &\quad \left. - \exp \frac{(X - \xi_1 - 2r + 4rn)^2}{4(\eta_1 - Y)} - \exp \frac{(X + \xi_1 - 2r + 4rn)^2}{4(\eta_1 - Y)} \right]. \end{aligned}$$

Условия (7.2) вытекают из (3.11), (3.12) и равенства $u^+(0, t) = \tau(t)$.

Функция

$$U_0(X, Y) = \int_0^r \Phi_0(\xi_1 - r) G(X, Y; \xi_1, 0) d\xi_1 = \int_{-r}^0 \Phi_0(\xi) G(x + r, a^2 t; \xi + r, 0) d\xi$$

является решением уравнения (7.1), удовлетворяющим условиям

$$U_0(X, 0) = \Phi_0(X - r) = \Phi_0(x), \quad U_0(r, Y) = u^+(0, t) = 0, \quad \frac{\partial U_0}{\partial X}\bigg|_{X=0} = \frac{\partial u^+}{\partial x}\bigg|_{x=-r} = 0.$$

Поэтому, не нарушая общности, будем считать, что $\Phi_0(x) \equiv 0$.

Свойства функции Грина позволяют представить функцию $U(X, Y)$ следующим образом:

$$U(X, Y) = -\int_0^Y \tau\left(\frac{\eta_1}{a^2}\right) \frac{\partial G}{\partial \xi_1}\bigg|_{\xi_1=r} d\eta_1 + \frac{1}{\lambda_1} \int_0^Y q_r\left(\frac{\eta_1}{a^2}\right) G(X, Y; 0, \eta_1) d\eta_1.$$

Последняя формула после возвращения к исходным переменным и замены $\eta = \eta_1 / a^2$ принимает вид

$$u^+(x, t) = -\int_0^t \tau(\eta) \frac{\partial G^+}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} d\eta + \frac{1}{\lambda_1} \int_0^t q_r(\eta) G^+(x, t; -r, \eta) d\eta, \quad (7.3)$$

где $G^+(x, t; \xi, \eta) = a^2 G(x + r, a^2 t; \xi + r, a^2 \eta)$.

Если ввести функции $s = t - \eta$, $E_n(x, s) = \exp \frac{(x)_n^2}{4a^2(-s)}$, $(x)_n = x + 4rn$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \mathbf{K}$, то легко видеть, что

$$G^+(x, t; \xi, \eta) = \frac{a}{2\sqrt{\pi(s)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [E_n(x - \xi, s) - E_n(x + \xi, s) + E_n(x + \xi + 2r, s) - E_n(x - \xi - 2r, s)];$$

$$G^+(x, t; -r, \eta) = \frac{a}{\sqrt{\pi(s)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [E_n(x+r, s) - E_n(x-r, s)];$$

$$\left. \frac{\partial G^+(x, t; \xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \frac{s^{-3/2}}{4a\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2(x)_n E_n(x, s) - (x+2r)_n E_n(x+2r, s) - (x-2r)_n E_n(x-2r, s)].$$

Отсюда, принимая во внимание равенства

$$\frac{\partial E_n(x, s)}{\partial \eta} = -\frac{(x)_n^2}{4a^2(s)^2} E_n(x, s), \quad \frac{\partial E_n(x, s)}{\partial x} = \frac{(x)_n E_n(x, s)}{2a^2(-s)},$$

получаем

$$\left. \frac{\partial G^+(x, t; \xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -a\sqrt{s/\pi} \frac{\partial G_0(x, s)}{\partial \eta}, \quad (7.4)$$

$$G_0(x, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2E_n(x, s)}{(x)_n} - \frac{E_n(x+2r, s)}{(x+2r)_n} - \frac{2E_n(x-2r, s)}{(x-2r)_n} \right];$$

$$\frac{\partial G^+(x, t; -r, \eta)}{\partial x} = -\frac{s^{-3/2}}{2a\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(x+r)_n E_n(x+r, s) - (x-r)_n E_n(x-r, s)]. \quad (7.5)$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 7.1. Пусть $\tau(t) \in C[0, T] \cap C^1]0, T[$, $\tau'(t) \in L[0, T]$

$$u^+(\tau; x, t) = -\int_0^t \tau(\eta) \left. \frac{\partial G^+(x, t; \xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} d\eta. \quad (7.6)$$

Тогда

$$\frac{\partial u^+(\tau; x, t)}{\partial x} = \frac{\tau(0)}{2a\sqrt{\pi} t} E^+(x, t) + \frac{1}{2a} D_{0t}^{-1/2} E^+(x, \sqrt{t-\eta}) \tau'(\eta),$$

где

$$E^+(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2E_n(x, t) - E_n(x+2r, t) - E_n(x-2r, t)].$$

Доказательство. В самом деле, подставляя в (7.6) выражение, стоящее в правой части (7.1), а затем, интегрируя по частям, получим

$$u^+(\tau; x, t) = -a\tau(0) \sqrt{\frac{t}{\pi}} G_0(x, t) - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t G_0(x, s) d[\tau(\eta)\sqrt{s}].$$

Отсюда дифференцированием по x находим

$$\frac{\partial u^+(\tau; x, t)}{\partial x} = -a\tau(0) \sqrt{\frac{t}{\pi}} G'_0(x, t) - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t G'_0(x, s) d[\tau(\eta)\sqrt{s}],$$

где $G'_0(x, s) = \partial G_0(x, s) / \partial x$.

Далее понадобится функция

$$E^-(x, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2E_n(x, s)}{(x)_n^2} - \frac{E_n(x+2r, s)}{(x+2r)_n^2} - \frac{E_n(x-2r, s)}{(x-2r)_n^2} \right],$$

которая связана с функцией $E^+(x, s)$ следующим образом:

$$E^-(x, s) + E^+(x, s) / (2sa^2) = -G'_0(x, s), \quad \frac{\partial E^-(x, s)}{\partial \eta} = -\frac{E^+(x, s)}{4a^2 s^2}.$$

Легко видеть, что

$$-\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t G'_0(x, s) d[\tau(\eta)\sqrt{s}] = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t E^-(x, s) d[\tau(\eta)\sqrt{s}] + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{E^+(x, s)}{s} d[\tau(\eta)\sqrt{s}] = J_1 + J_2.$$

Функция $E^-(x, s)$ при $\eta \rightarrow t$ ($s \rightarrow 0$) обращается в нуль для любого $x > 0$, а $\tau(t) \in C[0, T]$. Поэтому на основании формулы интегрирования по частям имеет место равенство

$$J_1 = -a\tau(0)\sqrt{\frac{t}{\pi}}E^-(x,t) - \frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \tau(\eta)\sqrt{s}\frac{\partial E^-(x,s)}{\partial \eta}d\eta,$$

которое можно переписать в виде

$$J_1 = -\frac{a}{\sqrt{\pi}}\tau(0)\sqrt{t}E^-(x,t) + \frac{1}{4a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{E^+(x,s)}{s^{3/2}}\tau(\eta)d\eta.$$

Поскольку $J_2 = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t E^+(x,s)\left[\frac{\tau'(\eta)}{\sqrt{s}} - \frac{\tau(\eta)}{2s^{3/2}}\right]d\eta$, то

$$J_2 = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t E^+(x,s)\frac{\tau'(\eta)}{\sqrt{s}}d\eta - \frac{1}{4a\sqrt{\pi}}\int_0^t E^+(x,s)\frac{\tau(\eta)}{s^{3/2}}d\eta.$$

Сложив J_1 и J_2 , будем иметь

$$-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t G'_0(x,s)d\left[\tau(\eta)\sqrt{s}\right]d\eta = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t E^+(x,s)\frac{\tau'(\eta)}{\sqrt{s}}d\eta - \frac{a}{\sqrt{\pi}}\tau(0)\sqrt{t}E^-(x,t).$$

Это равенство вместе с равенством

$$-\frac{a}{\sqrt{\pi}}\tau(0)\sqrt{t}G'_0(x,t) - \frac{a}{\sqrt{\pi}}\tau(0)\sqrt{t}E^-(x,t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}}\tau(0)\sqrt{t}\left[G'_0(x,t) + E^-(x,t)\right] = \frac{\tau(0)}{2a\sqrt{\pi}t}E^+(x,t)$$

показывают достоверность формулы

$$\frac{\partial u^+(\tau; x, t)}{\partial x} = \frac{\tau(0)}{2a\sqrt{\pi}t}E^+(x, t) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{E^+(x, s)}{\sqrt{s}}\tau'(\eta)d\eta$$

и леммы 7.1.

Согласно (7.3) имеем

$$v(t) = \frac{\partial u^+(\tau; x, t)}{\partial x}\Big|_{x=0} + \frac{1}{\lambda_1}\int_0^t q_r(\eta)\frac{\partial G^+(x, t, -r, \eta)}{\partial x}\Big|_{x=0}d\eta.$$

Из (7.5) следует, что

$$\frac{\partial G^+(x, t, -r, \eta)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{E^0(s)}{2a\sqrt{\pi}}s^{-3/2},$$

где $E^0(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(r)_n E_n(r, s) - (-r)_n E_n(-r, s)]$.

Теперь можно воспользоваться леммой 7.1. В результате получим

$$v(t) = \frac{\tau(0)}{2a\sqrt{\pi}t}E^+(0, t) + \frac{1}{2a}D_{0t}^{-1/2}E^+(0, t-\eta)\tau'(\eta) + \frac{1}{2a\lambda_1\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{q_r(\eta)E^0(t-\eta)}{(t-\eta)^{3/2}}d\eta.$$

Формула (7.7) представляет фундаментальное соотношение между температурой и ее градиентом в точке идеального контакта в случае закона Фурье.

8. Анализ фундаментальных соотношений между температурой и ее градиентом в точке идеального контакта составной системы. Условие сопряжения (2.2) диктует соотношение (4.24) между градиентами $v(t) = v^+(t)$ и $v^-(t)$ температуры $u(x, t)$ в точке $x = 0$, где происходит идеальный контакт подсистем S^+ и S^- составной системы S . Это соотношение согласно (4.23) имеет вид

$$\alpha v(t) = \beta \int_0^t v^-(\eta) \exp\left(\frac{\eta-t}{\tau_q}\right) d\eta - \gamma(t), \quad 0 < t < T. \quad (8.1)$$

Введем в рассмотрение функции

$$k_n(\xi) = 2E_n(0, \xi) - E_n(2r, \xi) + E_n(-2r, \xi), \quad \xi = t - \eta > 0,$$

$$f_n(\xi) = (r)_n E_n(r, \xi) - (-r)_n E_n(-r, \xi),$$

$$k(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n(\xi), \quad f(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(\xi),$$

$$F_q(t) = \frac{1}{2a\lambda_1\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(t-\eta)}{(t-\eta)^{3\varepsilon}} q_r(\eta) d\eta, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}. \quad (8.2)$$

Поскольку $(x)_n = x + 4rn$ для любого $x \in R$ и $n = 0, \pm 1, \mathbf{K}$, то

$$(-x)_n = -(x)_{-n}, \quad (-x)_{-n} = -(x)_n, \quad E_n(x, \xi) = E_{-n}(-x, \xi).$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} k_0(\xi) &= 2E_0(0, \xi), \quad k_n(\xi) + k_{-n}(\xi) = 2E_n(0, \xi) - E_n(2r, \xi) + E_n(-2r, \xi) + 2E_{-n}(0, \xi) - \\ &\quad - E_{-n}(2r, \xi) + E_{-n}(-2r, \xi) = 4E_n(0, \xi), \quad f_0(\xi) = 2rE_0(r, \xi), \\ f_n(\xi) + f_{-n}(\xi) &= (r)_n E_n(r, \xi) - (-r)_n E_n(-r, \xi) + (r)_{-n} E_{-n}(r, \xi) - (-r)_{-n} E_{-n}(-r, \xi) = \\ &= 2[(r)_n E_n(r, \xi) + (r)_{-n} E_{-n}(r, \xi)]. \end{aligned}$$

Отсюда в силу равенств

$$E_0(0, \xi) = 1, \quad k(\xi) = k_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} [k_n(\xi) + k_{-n}(\xi)], \quad f(\xi) = f_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(\xi) + f_{-n}(\xi)]$$

получаем

$$k(\xi) = 2 + 4E(\xi, \gamma), \quad (8.3)$$

$$f(\xi) = 2rE_0(r, \xi) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [(r)_k E_k(r, \xi) + (r)_{-k} E_{-k}(r, \xi)], \quad (8.4)$$

где $\gamma = (2r/a)^2$,

$$E(\xi, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\gamma n^2 / \xi). \quad (8.5)$$

Следует отметить, что функция (8.5) связана с θ -функцией Якоби

$$\theta_3(z, i\pi t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(z+n)^2}{t}\right], \quad t > 0$$

следующей формулой:

$$\theta_3\left(0, \frac{i\pi\xi}{\gamma}\right) = \left(\frac{\gamma}{\pi t}\right)^{\varepsilon} [1 + 2E(\xi, \lambda)], \quad (8.6)$$

где i — мнимая единица.

Вернемся теперь к формуле (7.7). Введенные здесь обозначения вместе с равенствами (8.2)–(8.5) позволяют записать фундаментальное соотношение между $v(t)$ и $\tau'(t)$, приносимое из области Ω^+ на точку $x = 0$ идеального теплового контакта в следующем виде:

$$v(t) = -\frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1 + 2E(t-\eta, \gamma)}{(t-\eta)^{\varepsilon}} \tau'(\eta) d\eta + F_q(t). \quad (8.7)$$

Здесь и далее предполагается, что $\tau(0) = 0$; $E^+(0, \xi) = k(\xi)$, $E^0(\xi) = f(\xi)$.

На основании (8.6) и равенства $\sqrt{\gamma} = 2r/a$ из (8.7) имеем

$$v(t) = -\frac{1}{2r} \int_0^t \theta_3\left[0, \frac{\pi i(t-\eta)}{\gamma}\right] \tau'(\eta) d\eta + F_q(t). \quad (8.8)$$

Принимая во внимание, что $\tau(0) = 0$, $\Gamma(\varepsilon) = \sqrt{\pi}$ и $D_{0t}^{-\varepsilon} \tau'(\eta) = D_{0t}^{\varepsilon} \tau(\eta)$, из (8.7) получаем

$$av(t) = -D_{0t}^{\varepsilon} \tau(\eta) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau(\eta) H^{\varepsilon+1} E_{t-\eta}^+(0) d\eta + F_q(t), \quad (8.9)$$

где $H^{\varepsilon} E_{\xi}^+(x) = \frac{E(x+\xi, \gamma) - E(x, \gamma)}{\xi^{\varepsilon}}$ ($x > 0$, $\xi = t - \eta$) — правое гильдеровское отношение по-

рядка ε в точке x , $H^{\varepsilon+1} E_{\xi}^+(0) = \frac{\partial}{\partial \xi} \lim_{x \rightarrow 0} H^{\varepsilon} E_{\xi}^+(x)$.

Подставим значение $v^-(t)$ из (6.5) в (8.1). Тогда будем иметь

$$\alpha v(t) + \gamma(t) + \frac{1}{c} E_{xp}[\tau'; t] + \mu E_{xp}[\tau; t] = -\frac{c\mu^2}{2} \int_0^t d\eta \int_0^\eta E_1 \left[\left(\frac{\mu c(\eta - \xi)}{2} \right)^2 \right] \exp[\mu c(\xi - \eta)] \tau(\xi) d\xi.$$

Отсюда, с учетом равенств $\tau(0) = 0$, $\tau_q E_{xp}[\tau'; t] = -E_{xp}[\tau; t]$, после перестановки порядка интегрирования находим, что

$$\alpha v(t) = \frac{1 - \mu\tau_q}{\tau_q} E_{xp}[\tau; t] - \gamma(t) - \frac{\beta\mu^2}{2} \int_0^t \tau(\xi) K(t - \xi; \mu c) d\xi. \quad (8.10)$$

Ядро $K(x; \mu c)$, где $x = t - \xi$, определяется следующей формулой:

$$K(x, \mu c) = \int_\xi^t E_1 \left[\left(\frac{\mu c(\eta - \xi)}{2} \right)^2 \right] \exp[\mu c(\xi - \eta)] d\eta,$$

которая после замены $\eta = \xi + (t - \xi)s$ переменной интегрирования принимает вид

$$K(x, \mu c) = x \int_\xi^1 E_1 \left[\left(\frac{\mu cxs}{2} \right)^2 \right] \exp[-\mu cxs] ds. \quad (8.11)$$

Система (8.9) всегда разрешима и притом единственным образом. В самом деле, из (8.9) и (8.10) получаем задачу Коши $\tau(0) = 0$ для интегро-дифференциального уравнения

$$D_{0t}^\varepsilon \tau(\eta) = \frac{\mu\tau_q - 1}{\tau_q} E_{xp}[\tau; t] + \gamma(t) + \frac{\beta\mu^2}{2} \int_0^t \tau(\xi) K(t - \xi; \mu c) d\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau(\eta) H^{\varepsilon+1} E_{t-\eta}^+(0) d\eta + F_q(t).$$

На обе части этого уравнения подействуем оператором $D_{0t}^{-\varepsilon}$. В результате с учетом условия $\tau(0) = 0$ получим

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \frac{\mu\tau_q - 1}{\tau_q} D_{0t}^{-\varepsilon} E_{xp}[\tau; \eta] + \frac{\beta\mu^2}{2} D_{0t}^{-\varepsilon} \int_0^\eta \tau(\xi) K(\eta - \xi; \mu c) d\xi + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} D_{0t}^{-\varepsilon} \int_0^\eta \tau(\xi) H^{\varepsilon+1} E_{\eta-\xi}^+(0) d\xi + P_\gamma(t), \end{aligned} \quad (8.12)$$

где $P_\gamma(t) = D_{0t}^{-\varepsilon} [\gamma(\eta) + F_q(\eta)]$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \Gamma(\varepsilon) D_{0t}^{-\varepsilon} \int_0^\eta \tau(\xi) K(\eta - \xi; \mu c) d\xi &= \int_0^t \frac{d\eta}{(t - \eta)^\varepsilon} \int_0^\eta \tau(\xi) K(\eta - \xi; \mu c) d\xi = \\ &= \int_0^t \tau(\xi) d\xi \int_\xi^t \frac{K(\eta - \xi; \mu c)}{(t - \eta)^\varepsilon} d\eta = \int_0^t (t - \xi)^\varepsilon \tau(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{K((t - \xi)s; \mu c)}{(1 - s)^\varepsilon} ds, \\ \Gamma(\varepsilon) D_{0t}^{-\varepsilon} \int_0^\eta \tau(\xi) H^{\varepsilon+1} E_{\eta-\xi}^+(0) d\xi &= \int_0^t (t - \xi)^\varepsilon \tau(\xi) d\xi \int_0^1 \frac{H^{\varepsilon+1} + E_{(t-\xi)s}^+(0)}{(1 - s)^\varepsilon} ds. \end{aligned}$$

Последние равенства вместе с леммой 4.1 говорят о том, что уравнение (8.12) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода, которое в пространстве $C[0, T]$ имеет единственное решение $\tau(t)$. Метод последовательного приближения позволяет найти приближенное его решение с любой наперед заданной точностью.

Пусть $\gamma(t) \in C^1[0, T]$. Тогда из (8.12) следует равенство

$$\tau'(t) = D_{0t}^{-\varepsilon} \frac{d}{d\eta} A[\tau; \eta] + P'_\gamma(t), \quad (8.13)$$

где

$$\begin{aligned} A[\tau; t] &= \frac{\mu\tau_q - 1}{\tau_q} E_{xp}[\tau; t] + \frac{\beta\mu^2}{2} A_1[\tau; t] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} A_2[\tau; t], \\ A_1[\tau; t] &= \int_0^t \tau(\xi) K(t - \xi; \mu c) d\xi, \quad A_2[\tau; t] = \int_0^t \tau(\xi) H^{\varepsilon+1} E_{t-\xi}^+(0) d\xi. \end{aligned}$$

Утверждение (8.13) является прямым следствием равенства $A[\tau; 0] = 0$, которое дает основание записать $D_{0t}^\varepsilon A[\tau; \eta] = D_{0t}^{-\varepsilon} \frac{d}{d\eta} A[\tau; \eta]$.

Из (4.23) видим, что $\frac{\partial}{\partial t} E_{xp}[\tau, t] = \tau(t) - E_{xp}[\tau, t] / \tau_q \in C[0, T]$.

Согласно (5.8) $E_1'[x] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(1+j)\Gamma(3+j)} = E_2[x]$. Поэтому из (8.11) имеем $K'(x; \mu c) \in C[0, \infty[$. Стало быть,

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1[\tau; t] = \int_0^t \tau(\xi) K'(t - \xi; \mu c) d\xi \in C[0, T].$$

По определению и в силу (8.5) функция $H^{\varepsilon+1} E_\xi^+(0) = \xi^{-\varepsilon} E(\xi, \gamma) = \xi^{-\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\gamma n^2 / \xi)$ при $\xi \rightarrow +0$ обращается в нуль. Следовательно, функция

$$\frac{\partial}{\partial t} A_2[\tau; t] = \int_0^t \tau(t) \frac{\partial[(t - \xi)^{-\varepsilon} E(t - \xi, \gamma)]}{\partial t} d\xi \in C[0, T].$$

Полученные включения говорят о том, что функция $\frac{\partial}{\partial t} A[\tau; t]$ принадлежит пространству $C[0, T]$.

Теперь становится ясно, что первое слагаемое $D_{0t}^{-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \eta} A[\tau; \eta]$ в правой части равенства (8.13) является непрерывным на временном сегменте $[0, T]$ и обращается в нуль при $t = 0$.

Функция $P'_\gamma(t) = \frac{\partial}{\partial t} D_{0t}^{-\varepsilon} [\gamma(\eta) + F_q(\eta)] = D_{0t}^\varepsilon \gamma(\eta) + D_{0t}^\varepsilon F_q(\eta)$. Представление (8.2) и свойства функции (8.4) говорят о том, что $\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^\varepsilon F_q(\eta) = 0$.

Поскольку $D_{0t}^{-\varepsilon} \gamma(\eta) = D_{0t}^{-\varepsilon} \gamma'(\eta) + \gamma(0) t^{-\varepsilon} / \Gamma(\varepsilon)$, то равенство (8.13) позволяет утверждать, что функция $\tau'(t)$ при $t \rightarrow 0$ будет ограниченной, если $\gamma(0) = 0$. При $\gamma(0) \neq 0$ она обращается в ∞ порядка ε .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лыков А. В. Тепломассообмен. — М.: Энергия, 1971. — 560 с.
2. Соболев С. Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса // УФН, 1997. — Т. 167, № 10. — С. 1096–1106.
3. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
4. Шапков А. Г. Системно структурный анализ процесса теплообмена и его применение. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 280 с.
5. Нахушева В. А. Некоторые классы дифференциальных уравнений математических моделей нелокальных физических процессов. — Нальчик: КБНЦ РАН, 2002. — 100 с.
6. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.
7. Уфлянд Я. С. К вопросу о распространении колебаний в составных линиях // Инженерно-физический журнал, 1964. — Т. VII, № 1. — С. 89–92.
8. Джурраев Т. Д., Сопуев А. С., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа. — Ташкент: Фан, 1986. — 220 с.
9. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. — М.: Иностранная литература, 1957. — 443 с.
10. Джрбациян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966. 672 с.

Поступила 27.12.2005 г.