Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Дмитриев, Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения гиперболического типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 35–40

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu407>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 08:50:11

В. Б. Дмитриев

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассматривается задача для гиперболического уравнения с интегральным условием вместо стандартного граничного. Задача рассмотрена в пространстве произвольной размерности. Доказаны существование и единственность решения.

К настоящему времени опубликовано уже значительное число работ, в которых рассматриваются нелокальные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений. Однако большая их часть посвящена исследованию одномерных по пространственной переменной уравнений. Отметим в этой связи работы Д. Г. Гордезиани и Г. А. Авалишвили [1] и Л. С. Пулькиной [2–4]. Смешанная задача для гиперболического уравнения с n пространственными переменными с интегральным условием, содержащим след искомого решения на границе области, исследована в работе [5].

В настоящей работе доказана однозначная обобщенная разрешимость задачи с нелокальным условием, содержащим как интегральный оператор от искомого решения, так и значение производной от него на границе.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x,t) u_{x_j}) + \sum_{i=1}^n a_i(x,t) u_{x_i} + a_{n+1}(x,t) u_t + a(x,t) u = f(x,t) \quad (1)$$

в цилиндре $Q_T = \{(x, \tau) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < \tau < T\}$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, и поставим для него задачу с начальными условиями Коши

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (3)$$

и нелокальным условием

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i) |_{S_T} = \int_{\Omega} K(x, y, t, u(y, t)) dy, \quad (4)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $K(x, y, t, u(y, t))$ заданы, а $S_T = \{(x, t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$ — боковая поверхность цилиндра Q_T .

Стандартным образом получим тождество, с помощью которого введем понятие обобщенного решения:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\partial\Omega} (-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{x_j} v_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t) u_{x_i} v + a_{n+1}(x,t) u_t v + a(x,t) uv) dx dt - \\ & - \int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x,t) \int_{\Omega} K(x, y, t, u(y, t)) dy ds dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} f(x,t) v(x,t) dx dt + \int_{\Omega} \psi(x) v(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем обобщенным решением из $W_2^1(Q_T)$ задачи (1)–(4) функцию $u(x, t)$, принадлежащую $W_2^1(Q_T)$, равную $\varphi(x)$ при $t=0$ и удовлетворяющую тождеству (5) $\forall v \in W_2^1(Q_T)$, $v(x, T) = 0$.

Обозначим $L_{2,1}(Q_T)$ — банахово пространство, состоящее из всех определенных и измеримых по Лебегу на Q_T функций $u(x, t)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{2,1} = \int_0^T \left(\int_{\Omega} u^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Задача (1)–(4) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ для $f \in L_{2,1}(Q_T)$, $\varphi \in W_2^1(\Omega)$ и $\psi \in L_2(\Omega)$ при выполнении следующих условий:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad v\xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \mu\xi^2, \quad v > 0;$$

$$\begin{aligned} \max_{Q_T} \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}, \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, a_i, a \right| &\leq \mu_1; \quad |K(x, y, t, u_1) - K(x, y, t, u_2)| \leq R(y, t) |u_1 - u_2|; \\ \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} R^2(y, t) dy &= R_1; \quad |K(x, y, t, 0)| \leq F(y, t) \quad \forall x \in \Omega; \\ \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} F(y, t) dy &= M_1; \quad \left| \frac{\partial K(x, y, t, u)}{\partial t} \right| \leq A(y, t) |u| + B(y, t); \\ \max_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} A^2(y, t) dy &= M_2; \quad \int_0^T \left(\int_{\Omega} B(y, t) dy \right)^2 dt = M_3. \end{aligned}$$

2. Доказательство единственности решения. Пусть задача (1)–(4) имеет два обобщенных решения u_1 и u_2 из $W_2^1(Q_T)$. Тогда их разность $u = u_1 - u_2 \in W_2^1(Q_T)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_j} v_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) u_{x_i} v + a_{n+1}(x, t) u_t v + a(x, t) uv) dx dt - \\ - \int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x, t) \int_{\Omega} \{K(x, y, t, u_1(y, t)) - K(x, y, t, u_2(y, t))\} dy ds dt = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

и при $t = 0$ обращается в нуль. Возьмем в этом тождестве

$$v(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } b \leq t \leq T; \\ \int_b^t u(x, \tau) d\tau, & \text{при } 0 \leq t \leq b. \end{cases}$$

В силу того, что $u \in W_2^1(Q_T)$, существуют $u_t, u_{x_i} \in L_2(Q_T)$, поэтому $v_t, v_{tx_i} \in L_2(Q_T)$.

Подставим v в (6) и выразим u, u_t и u_{x_i} через v и их производные. Это даст после изменения знака в (6)

$$\begin{aligned} \int_0^b \int_{\Omega} \left[v_t v_{tt} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) v_{tx_j}(x, t) v_{x_i}(x, t) - \sum_{i=1}^n a_i(x, t) v_{tx_i}(x, t) v(x, t) - \right. \\ \left. - a_{n+1}(x, t) v_{tt}(x, t) v(x, t) - a(x, t) v_t(x, t) v(x, t) \right] dx dt = \\ = - \int_0^b \int_{\partial\Omega} v(x, t) \int_{\Omega} \{K(x, y, t, u_1(y, t)) - K(x, y, t, u_2(y, t))\} dy ds dt. \end{aligned}$$

Так как $v_t|_{t=0} = u|_{t=0} = 0, v_{x_i}|_{t=b} = 0$, то

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[v_t^2(x, b) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) v_{x_j}(x, t) v_{x_i}(x, t) \right]_{t=0} dx = \\ = - \int_{Q_b} \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}(x, t)}{\partial t} v_{x_j}(x, t) v_{x_i}(x, t) + 2 \sum_{i=1}^n a_i(x, t) v_{x_i}(x, t) v_t(x, t) + \right. \\ \left. + 2a_{n+1} v_t^2(x, t) + 2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i(x, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{n+1}(x, t)}{\partial t} - a(x, t) \right) v_t(x, t) v(x, t) \right] dx dt - \\ - 2 \int_0^b \int_{\partial\Omega} v(x, t) \int_{\Omega} \{K(x, y, t, u_1(y, t)) - K(x, y, t, u_2(y, t))\} dy ds dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее нам понадобится неравенство

$$\int_{\partial\Omega} |u| ds \leq c \int_{\Omega} (|\nabla u| + |u|) dx, \quad (8)$$

справедливое $\forall u \in W_1^1(\Omega)$ в области Ω с гладкой границей ([6], с. 77). Применяя это неравенство и учитывая, что $v_t = u$ при $t \leq b$, получаем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial\Omega} v(x,t) \int_{\Omega} \{K(x,y,t,u_1(y,t)) - K(x,y,t,u_2(y,t))\} dy ds \right| \leq \\ & \leq \int_{\partial\Omega} |v(x,t)| \int_{\Omega} R(y,t) |u| dy ds = \int_{\partial\Omega} |v(x,t)| \int_{\Omega} R(y,t) |v_t| dy ds \leq \\ & \leq c \int_{\Omega} \left(|v(x,t)| \int_{\Omega} R(y,t) |v_t| dy + |\nabla v(x,t)| \int_{\Omega} R(y,t) |v_t| dy \right) dx \leq \\ & \leq \frac{c}{2} \int_{\Omega} \left(v^2 + \int_{\Omega} R^2(y,t) dy \int_{\Omega} |v_t(y,t)|^2 dy + |\nabla v|^2 + \int_{\Omega} R^2(y,t) dy \int_{\Omega} v_t^2(y,t) dy \right) dx \leq \\ & \leq \frac{c}{2} \int_{\Omega} (v^2 + |\nabla v|^2) dx + c |\Omega| R_1 \int_{\Omega} v_t^2(x,t) dx \leq M \int_{\Omega} (v^2 + |\nabla v|^2 + v_t^2) dx. \end{aligned}$$

Здесь $M = \max(c/2, c |\Omega| R_1)$.

Тогда из (7) и условий теоремы мы получаем

$$\int_{\Omega} \left[v_t^2(x,b) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) v_{x_j} v_{x_i} \Big|_{t=0} \right] dx \leq c_1 \int_{Q_b} (v^2 + |\nabla v|^2 + v_t^2) dx dt. \quad (9)$$

Здесь c_1 зависит только от M и μ_1 . Кроме того, для почти всех $x \in \Omega$

$$\int_0^b v^2 dt = \int_0^b \left(\int_t^b u d\tau \right)^2 dt \leq \int_0^b (b-t) \int_t^b u^2 d\tau dt \leq \frac{b^2}{2} \int_0^b u^2 d\tau.$$

Ввиду этого из (9) следует неравенство

$$\int_{\Omega} \left[u^2(x,b) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) v_{x_j} v_{x_i} \Big|_{t=0} \right] dx \leq c_1 \int_{Q_b} (|\nabla v|^2 + (b^2 + 1)u^2) dx dt. \quad (10)$$

Введем функции $g_i(x,t) = \int_t^0 u_{x_i}(x,\tau) d\tau$. Имеем

$$v_{x_i} = \int_b^t u_{x_i}(x,\tau) d\tau = g_i(x,b) - g_i(x,t), \quad t \leq b.$$

Подставляя это в (10), получаем

$$\int_{\Omega} u^2(x,b) dx + (v - 2c_1 b) \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n g_i^2(x,b) dx \leq c_2 \int_{Q_b} \left(\sum_{i=1}^n g_i^2 + u^2 \right) dx dt,$$

где $c_2 = c_1(2 + b^2)$. Воспользуемся теперь произволом в выборе b . Для $b \in [0, v/(4c_1)]$ коэффициент $v - 2c_1 b \geq v/2$, а $u(x,b)$ и $g_i(x,b)$ при $b = 0$ равны нулю. Тогда получаем

$$\int_{\Omega} \left(u^2(x,b) + \sum_{i=1}^n g_i^2(x,b) \right) dx \leq \frac{c_2}{\min(1, v/2)} \int_0^b \int_{\Omega} \left(u^2(x,\tau) + \sum_{i=1}^n g_i^2(x,\tau) \right) dx d\tau.$$

Это в силу неравенства Гронуолла ([7], с. 23), где $g(t) = 0$, означает, что

$\int_{\Omega} \left(u^2(x,b) + \sum_{i=1}^n g_i^2(x,b) \right) dx = 0$ и тогда $u(x,b) = 0$ и $g_i(x,b) = 0$ при $b \in [0, v/(4c_1)]$. Повторяя рассуждение для $t \in [v/(4c_1), v/(2c_1)]$, убедимся, что $u(x,t) = 0$ на этом промежутке. И так в конечное число шагов докажем обращение $u(x,t)$ в нуль для всех $t \in [0, T]$. Единственность доказана.

3. Доказательство существования решения. Воспользуемся методом Галеркина. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ есть фундаментальная система в $W_2^1(\Omega)$ (то есть замыкание линейной оболочки этой системы в норме $W_2^1(\Omega)$ совпадает с пространством $W_2^1(\Omega)$) и выполняется свойство ортонор-

мированности: $(\Phi_k, \Phi_l) = \int_{\Omega} \Phi_k \Phi_l dx = \delta_k^l$. Приближенное решение $u^N(x, t)$ ищем в виде:

$u^N = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \Phi_k(x)$, из соотношений

$$(u_t^N, \Phi_l) + \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_j}^N(x, t) \Phi_{lx_i}(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) u_{x_i}^N(x, t) \Phi_l(x) + a_{n+1}(x, t) u_t^N(x, t) + a(x, t) u^N(x, t) \Phi_l(x) \right] dx - \int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} K(x, y, t, u^N(y, t)) dy ds = (f, \Phi_l), \quad l = 1, 2, \mathbf{K}, N, \quad (11)$$

$$c_k^N(0) = \alpha_k^N, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} c_k^N(t) |_{t=0} = (\Psi, \Phi_k). \quad (13)$$

Здесь α_k^N — коэффициенты сумм $\Phi^N(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^N \Phi_k(x)$, аппроксимирующих при $N \rightarrow \infty$ функцию $\Phi(x)$ в норме $W_2^1(\Omega)$. Подставим выражение для $u^N(x, t)$ в (11) и после несложных преобразований и смены порядка суммирования получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} c_l^N(t) + \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \Phi_{kx_j}(x) \Phi_{lx_i}(x) + \sum_{i=1}^n a_i \Phi_{kx_i}(x) \Phi_l(x) + a_{n+1} \Phi_{kt}(x) \Phi_l(x) + a \Phi_k(x) \Phi_l(x) \right) dx - \\ - \int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} \Phi_l(x) K(x, y, t, \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \Phi_k(y)) dy ds = (f, \Phi_l), \quad l = 1, \mathbf{K}, N. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим последнее слагаемое левой части (14), которое мы обозначим $s(t, c_1^N, \dots, c_N^N)$. Используя условия теоремы, получаем

$$\begin{aligned} |s(t, c_1^N, \dots, c_N^N)| &= \left| \int_{\partial\Omega} \int_{\Omega} \Phi_l(x) K(x, y, t, \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \Phi_k(y)) dy ds \right| \leq \\ &\leq \int_{\partial\Omega} |\Phi_l(x)| \int_{\Omega} \left(F(y, t) + \left| K(x, y, t, \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \Phi_k(y)) - K(x, y, t, 0) \right| \right) dy ds \leq \\ &\leq \int_{\partial\Omega} |\Phi_l(x)| \int_{\Omega} F(y, t) dy ds + \int_{\partial\Omega} |\Phi_l(x)| \int_{\Omega} R(y, t) \left| \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \Phi_k(y) \right| dy ds. \end{aligned}$$

Заметим, что первый член здесь ограничен по t в силу условий теоремы. Второй же — ограниченная функция переменных $c_k^N(t)$, это легко доказывается при помощи неравенства (8) и неравенства Коши-Буняковского.

Нетрудно также доказать, что функция $s(t, c_1^N, \dots, c_N^N)$ липшицева по каждой из переменных.

Получаем, что вместе с начальными условиями (12) и (13) система (14) представляет собой задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по t для неизвестных $c_k^N(t)$, $k = 1, \mathbf{K}, N$, разрешенной относительно $\frac{d^2 c_k^N(t)}{dt^2}$, остальные слагаемые которой представляют собой липшицевы функции неизвестных $c_k^N(t)$, $k = 1, \mathbf{K}, N$; ее свободные члены $f_l \equiv (f, \Phi_l) \in L_2(0, T)$, если $f \in L_{2,1}(Q_T)$, $\Phi \in W_2^1(\Omega)$ и $\Psi \in L_2(\Omega)$. Таким образом, система (14) $\forall N$ однозначно разрешима при начальных условиях (12), (13) ([8], с. 27), причем $\frac{d^2 c_k^N}{dt^2} \in L_2(0, T)$.

В итоге построена последовательность $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$. Отметим, что для $u^N \forall t \in [0, T]$ справедлива оценка (выводится по аналогии с оценкой решения стандартной задачи см. [6], с. 209)

$$z^{\frac{1}{2}}(t) \leq p(t) z^{\frac{1}{2}}(0) + q(t) \|f\|_{2,1,Q_t} + r(t), \quad (15)$$

где $p(t)$, $q(t)$ и $r(t)$ определяются постоянными c и R и величиной t ,
 $z(t) \equiv \int_{\Omega} \left((u^N)^2 + (u_t^N)^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i}^N u_{x_j}^N \right) dx$. Это энергетическое неравенство, позволяющее оценить энергетическую норму решения $u^N(x, t)$ через начальные данные Коши и $f(x, t)$.

Правая часть (11) мажорируется постоянной, не зависящей от N и $t \in [0, T]$, так что

$$\int_{\Omega} \left[(u^N)^2 + |\nabla u^N|^2 + (u_t^N)^2 \right] dx \leq c_3, \quad t \in [0, T] \quad (16)$$

и тогда

$$\|u^N\|_{W_2^1(Q_T)} \leq c(T). \quad (17)$$

Благодаря неравенству (17), из последовательности $\{u^N\}$, $N = 1, 2, \mathbf{K}$, можно выбрать подпоследовательность (за которой сохраним то же наименование), сходящуюся слабо в $W_2^1(Q_T)$ к некоторому элементу $u_1 \in W_2^1(Q_T)$. Согласно условию (16) имеет место равномерная по t ограниченность полученной последовательности $\{u^N\}$, $N = 1, 2, \mathbf{K}$, в норме $W_2^1(\Omega)$. То

есть — в норме $\|u\| = \left(\int_{\Omega} \left[(u^N)^2 + |\nabla u^N|^2 \right] dx \right)^{\frac{1}{2}}$ (здесь t считается параметром). Поэтому из

этой последовательности можно выделить подпоследовательность (за которой вновь сохраним то же обозначение), которая будет сходиться равномерно по $t \in [0, T]$ в норме $L_2(\Omega)$ слабо к элементу $u \in L_2(\Omega) \forall t \in [0, T]$, при этом в силу (17) $u \in W_2^1(Q_T)$ ([6], с. 214).

Более того, полученная последовательность будет сходиться равномерно по $t \in [0, T]$ в норме $L_2(\Omega)$ к элементу $u \in L_2(\Omega) \forall t \in [0, T]$, сильно. Это следует из ограниченности $\{u^N\}$, $N = 1, 2, \mathbf{K}$, в норме $W_2^1(\Omega)$, а также из следующего факта. Пусть функции $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \mathbf{K}$, образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать номер N_ε такой, что для любой функции $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство ([9], с. 529)

$$\|u\|_{2, \Omega} \leq \left(\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} (u, \psi_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \|u\|_{W_2^1(\Omega)}. \quad (18)$$

Сильная сходимость u^N к u в норме $L_2(\Omega)$ следует из (18), примененного для $u^N - u^{N_1}$ при $N_1 > N$, поскольку $\|u^N\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c_3 \quad \forall t \in [0, T]$ в силу (16).

Покажем, что $u(x, t)$ есть обобщенное решение задачи (1)–(4). Начальное условие будет выполнено в силу отмеченной сходимости $u^N(x, t)$ к $u(x, t)$ в $L_2(\Omega)$ и того, что $u^N(x, 0) \rightarrow \varphi(x)$ в $L_2(\Omega)$. Теперь умножим (11) на свою функцию $d_l(t) \in W_2^1(0, T)$, $d_l(T) = 0$, полученные равенства просуммируем по всем l от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до T . После этого в первом члене проведем интегрирование по частям, переноса $\frac{\partial}{\partial t}$ с u^N на $v \equiv \sum_{i=1}^N d_i(t) \varphi_i(x)$. Это даст тождество

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(-u_t^N v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j}^N v_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}^N v + a_{n+1} u_t^N v + a u^N v \right) dx dt - \\ & - \int_{0 \partial \Omega} \int_{\Omega} v K(x, y, t, u^N(y, t)) dy ds dt = \int_{Q_T} f v dx dt + \int_{\Omega} u_t^N v|_{t=0} dx, \end{aligned} \quad (19)$$

справедливое $\forall v$ вида $\sum_{i=1}^N d_i(t) \varphi_i(x)$. Совокупность таких v обозначим через Ξ_N . В (19) можно перейти к пределу по выбранной выше подпоследовательности при закреплённом v из какого-либо Ξ_{N_i} . Это приведет к тождеству (5) для предельной функции u при $\forall v \in \Xi_{N_i}$.

При этом сильная сходимость $\{u^N\}$ к u в $L_2(\Omega)$ нам нужна для того, чтобы

$\int_{\partial\Omega} v \int_{\Omega} K(x, y, t, u^N(y, t)) dy ds$ сходилась к $\int_{\partial\Omega} v \int_{\Omega} K(x, y, t, u(y, t)) dy ds$. Действительно, мы оцениваем модуль разности этих интегралов интегралом модуля разности, а далее имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |v| \int_{\Omega} |K(x, y, t, u^N(y, t)) - K(x, y, t, u(y, t))| dy ds &\leq \int_{\partial\Omega} |v| \int_{\Omega} R(y, t) |u^N(y, t) - u(y, t)| dy ds \leq \\ &\leq \int_{\partial\Omega} |v| \left(\int_{\Omega} R^2(y, t) dy \int_{\Omega} |u^N(y, t) - u(y, t)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} ds \leq \sqrt{R_1} \|u^N - u\|_{2, \Omega} \int_{\partial\Omega} |v| ds. \end{aligned}$$

Последнее выражение будет стремиться к нулю, если $\{u^N\}$ стремится к u в $L_2(\Omega)$ сильно. (Если бы сходимости была лишь слабой, последняя оценка ничего бы нам не дала.)

Но $\Xi = \bigcup_{N=1}^{\infty} \Xi_N$ плотно в $\hat{W}_2^1(Q_T)$ — пространстве функций из $u \in W_2^1(Q_T)$, обращающихся в нуль при $t = T$ ([6]), а $u \in W_2^1(Q_T)$, следовательно, (5) будет выполняться для $u(x, t)$ при $\forall v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$.

Таким образом, доказано, что предельная функция $u(x, t)$ есть обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ задачи (1)–(4).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Математическое моделирование, 2000. — Т. 12, №1. — С. 94–103.
2. Пулькина Л. С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Математические заметки, 2003. — Т. 74, Вып. 3. — С. 435–445.
3. Пулькина Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения, 2004. — Т. 40, № 7. — С. 887–892.
4. Пулькина Л. С. О разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Вестн. СамГУ, 1998. — № 2 (8). — С. 63–67.
5. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Доклады РАН, 2005. — Т. 404, № 5.
6. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
7. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. — М.: ИЛ, 1961. — 122 с.
8. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения — М.: Наука, 1974. — 331 с.
9. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.

Поступила 26.01.2006 г.