Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Стефанюк, Аналитические решения задач теплообмена при ламинарном течении жидкостей в трубах, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 41–44

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu408>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:36:30

Приложения дифференциальных уравнений

УДК 536.2(075)

Е. В. Стефанюк

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ В ТРУБАХ

Путем совместного использования точных (Фурье) и приближенных аналитических (ортogonalный метод Бубнова–Галеркина) методов получено аналитическое решение задачи теплообмена для жидкости, движущейся в круглой трубе. Показано, что для шести приближений полученные в настоящей работе значения температур на основе метода Бубнова–Галеркина в широком диапазоне изменения продольной координаты практически совпадают с их точными значениями.

Получение аналитических решений задач теплообмена при течении жидкости в трубах и каналах представляет серьезные математические трудности. Точные аналитические решения указанных задач получены лишь для отдельных частных случаев, к тому же при существенных допущениях. В связи с этим разработка приближенных аналитических методов решения таких задач имеет не только научную ценность, но и практическое значение, так как позволяет широко использовать результаты теоретических исследований для инженерных расчетов [1, 2].

Рассмотрим задачу о теплообмене при вязкостном течении жидкости в круглой трубе в случае постоянной температуры стенки. Примем следующие допущения [3]:

- 1) течение жидкости и процесс теплообмена стационарны;
- 2) жидкость несжимаема; ее физические свойства постоянны (т.е. не зависят от температуры и давления);
- 3) течение жидкости стабилизировано, т.е. профиль скорости не изменяется по длине;
- 4) во входном сечении теплообменного участка температура жидкости постоянна по сечению и равна t_0 ;
- 5) температура внутренней поверхности стенки трубы на участке теплообмена постоянна и равна t_c , причем $t_c \neq t_0$;
- 6) в потоке отсутствуют внутренние источники тепла, а количество тепла, выделяющееся вследствие диссипации энергии, пренебрежимо мало;
- 7) изменение теплового потока вдоль оси трубы, обусловленного теплопроводностью, мало по сравнению с изменением теплового потока вдоль оси, обусловленного конвекцией [1].

Математическая постановка задачи теплообмена в круглой трубе при граничных условиях первого рода с учетом принятых выше допущений имеет вид

$$\frac{\partial^2 t(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{2\omega_{cp}}{a} \left(1 - \frac{\xi^2}{r_0^2}\right) \frac{\partial t(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad (\eta > 0, \quad 0 \leq \xi < h); \quad (1)$$

$$t(\xi, 0) = t_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial t(0, \eta)}{\partial \xi} = 0; \quad (3)$$

$$t(h, \eta) = t_c, \quad (4)$$

где t — температура; η — координата, направленная вдоль течения потока; ξ — координата, направленная поперек течения потока; $h = 2r_0$ — диаметр трубы; t_0 — температура на входе в трубу; t_c — температура стенки трубы; a — коэффициент температуропроводности жидкости; $\omega(\xi) = \frac{3}{2} \omega_{cp} \left(1 - \frac{\xi^2}{r_0^2}\right)$; ω_{cp} — средняя скорость течения жидкости.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

где Pe — число Пекле.

$$\frac{\partial^2 \Theta(y, x)}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Theta}{\partial y} = (1 - y^2) \frac{\partial \Theta(y, x)}{\partial x} \quad (x > 0; \quad 0 \leq y < 1); \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, x)}{\partial y} = 0; \quad (7)$$

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (5)–(8) разыскивается в виде

Подставляя (9) в (5), получим следующие два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial\psi}{\partial y} + \mu^2(1-y^2)\psi(y) = 0, \quad (11)$$

где μ^2 — некоторая постоянная.

$$\varphi(x) = A \exp(-\mu^2 x), \quad (12)$$

где A — неизвестный коэффициент.

$$\psi''(y) + \frac{1}{y} \psi'(y) + \lambda(1 - y^2) \psi(y) = 0, \quad (13)$$

где $\lambda = \mu^2$.

Граничные условия для уравнения (12) согласно (7), (8) будут

$$\psi(1) = 0. \quad (15)$$

Следуя методу Бубнова–Галеркина, решение задачи (13)–(15) разыскивается в виде

$$\Psi_n(y) = \sum_{k=1}^n b_k \eta_k(y), \quad (16)$$

где b_k — неизвестные коэффициенты; $\eta_k(y)$ — координатные функции, определяемые по формуле

$$\eta_k(y) = 1 - y^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Соотношение (16) при использовании координатных функций вида (17) точно удовлетворяет граничным условиям (14), (15). Для нахождения неизвестных коэффициентов b_k , $k = 1, 2, \dots, n$, составляется невязка уравнения (13) и требуется ее ортогональность ко всем координатным функциям $\eta_k(y)$, т.е.

$$\int_0^1 \left[\left(\sum_{k=1}^n b_k \eta_k(y) \right)'' + \frac{1}{y} \left(\sum_{k=1}^n b_k \eta_k(y) \right)' + \lambda (1-y^2) \sum_{k=1}^n b_k \eta_k(y) \right] \eta_j(y) dy = 0, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Соотношение (18) представляет систему однородных алгебраических линейных уравнений вида

[illegible]

где $A_{ji} = -\int_0^1 \frac{\partial^2 \eta_j(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \eta_j(y)}{\partial y} \eta_i(y) dy$; $B_{ji} = \int_0^1 (1-y^2) \eta_j(y) \eta_i(y) dy$ ($j = i = 1, 2, \dots, n$).

Однородная система уравнений (19) имеет нетривиальное решение в случае, если ее определитель равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} (A_{11} + \lambda B_{11}) & (A_{12} + \lambda B_{12}) & \dots & (A_{1n} + \lambda B_{1n}) \\ (A_{21} + \lambda B_{21}) & (A_{22} + \lambda B_{22}) & \dots & (A_{2n} + \lambda B_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{n1} + \lambda B_{n1}) & (A_{n2} + \lambda B_{n2}) & \dots & (A_{nn} + \lambda B_{nn}) \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Раскрывая определитель, получим относительно λ алгебраический полином n -ной степени. Так как элементы матрицы положительны и симметричны относительно главной диагонали, то корни λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) должны быть действительными отрицательными числами. Эти корни являются приближенными значениями собственных чисел краевой задачи Бесселя применительно к уравнению теплопроводности с граничными условиями 1-го рода.

Допустим, что найденные из алгебраического полинома собственные числа расположены в порядке возрастания их абсолютных величин и образуют последовательность $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$.

Подставляя значения λ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) в систему уравнений (19), получим ее нетривиальное решение. Так как система уравнений однородная, то можно положить $b_1 = 1$. Собственные функции находятся из (16).

Приближенное решение задачи (5)–(8) с учетом (12), (16), записывается в виде

$$\Theta_n(y, x) = \sum_{k=1}^n D_k \psi_k(y) \exp(-\lambda_k x). \quad (21)$$

Неизвестные коэффициенты D_k находятся из начального условия (6). Для этого составляется невязка уравнения (6) и требуется ортогональность невязки ко всем собственным функциям

$$\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n D_k \psi_k(y) \exp(-\lambda_k \cdot 0) - 1 \right] \psi_j(y) dy = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (22)$$

Соотношение (22) относительно неизвестных коэффициентов D_k представляет систему алгебраических линейных уравнений. Из решения этой системы находим $D_1 = 2,700775$; $D_2 = -8,9103002$; $D_3 = 14,01875$; $D_4 = -11,88024$; $D_5 = 4,70883$; $D_6 = -3,53821$.

После нахождения D_k решение задачи (5)–(8) в замкнутом виде находится из (21).

На графиках (рис. 1, 2) представлены результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (21) в шестом приближении в сравнении с точным решением [1]. Собственные числа для двух, шести и десяти приближений, а также точные их значения представлены в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

Значение собственных чисел

μ	Число приближений			Точные значения [1]
	2	6	10	
μ_1	7,041461	7,3135836944478	7,31358691552132	7,3135868
μ_2	49,208539	44,584341267422	44,6094591537528	44,609460
μ_3		111,3882105904	113,918980473984	113,92104
μ_4		222,64542419205	214,99051576925	215,24053
μ_5		701,88313313994	343,09957968053	348,56412
μ_6		5537,9353071157	523,07622764926	513,89004
μ_7			967,972831450273	711,21753
μ_8			2396,8278994771	940,54604
μ_9			9088,4836857216	1201,8754
μ_{10}			77464,29056704	1495,2052

Анализ полученных результатов показывает, что с увеличением числа приближений собственные числа с низшими порядковыми номерами всякий раз уточняются. Значения температур, полученные по формуле (21) в диапазоне продольной координаты $0,0125 \leq x < \infty$ практически совпадают с точными их значениями.

Р и с. 1. Графики распределения относительной избыточной температуры по координате y :
 — расчет по формуле (21) (шестое приближение); $\circ$ — точное решение [1]

Р и с. 2. Графики распределения относительной избыточной температуры по координате x :
 — расчет по формуле (21) (шестое приближение); $\circ$ — точное решение [1]

Р и с. 3. Невязка ε уравнения (6) при $n=6$ (шесть приближений) при $y=1$

Р и с. 4. Невязка ε начального условия при $n=6$ (шесть приближений) при $x=0$

Невязки уравнения и начального условия в шестом приближении представлены графически на рис. 3, 4. Максимальная невязка начального условия ($x=0$) имеет место в точке $y=1$ ($\varepsilon \approx -1$). Это объясняется тем, что из решения (21) в точке $y=1$ в любой момент времени (включая $x=0$), благодаря особой конструкции координатных функций $\varphi_k(x)$ выполняется граничное условие 1-го рода (8).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Петухов Б. С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. — М.: Энергия, 1967. — 412 с.
2. Кудинов В. А., Карташов Э. М., Калашиников В. В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций: Учеб. пособие для вузов. — М.: Высш. шк., 2005. — 430 с.
3. Кудинов В. А., Аверин Б. В., Стефанюк Е. В., Назаренко С. А. Аналитические методы теплопроводности. — Самара: Самарск. госуд. технич. ун.-т, 2004. — 209 с.

Поступила 01.02.2006 г.