Общероссийский математический портал

Т. В. Шувалова, Некоторые композиционные свойства обобщенных операторов дробного дифференцирования, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 45–48

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:58:31

Математический анализ

УДК 517.9

Т. В. Шувалова

НЕКОТОРЫЕ КОМПОЗИЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Для обобщенного оператора дробного дифференцирования в смысле М. Сайго получены различные формулы композиционного характера, которые используются при исследовании нелокальных краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типов.

В теории краевых задач для дифференциальных уравнений часто используются обобщенные операторы дробного дифференцирования в смысле М. Сайго.

Настоящая работа посвящена изучению свойств операторов с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; z)$ в ядре и получению новых формул композиций для них на основании преобразования Меллина.

Следуя работе [1], введем оператор

$$I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}\right) f(t) dt, \alpha > 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f(x), \alpha \leq 0, n = [1-\alpha]. \end{cases} \quad (1)$$

Напомним, что преобразованием Меллина от функции $f(x)$, $x > 0$ называется функция

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} f(t) t^{s-1} dt.$$

Обратное преобразование имеет вид: $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-\infty}^{\delta+\infty} f^*(s) x^{-s} ds$, $\delta = \text{Re } s$.

Выпишем простейшие свойства и формулы преобразования Меллина ряда функций, которые нам потребуются [2]:

$$x^\alpha f(x) \leftrightarrow f^*(s + \alpha), \quad (2)$$

$$x^\alpha \int_0^x t^\beta f_1\left(\frac{x}{t}\right) f_2(t) dt \leftrightarrow f_1^*(s + \alpha) f_2^*(s + \alpha + \beta + 1), \quad (3)$$

$$(x-1)_+^{c-1} F\left(a, b; c; 1-\frac{1}{x}\right) \leftrightarrow \Gamma(c) \Gamma\left[\begin{matrix} 1-c-s, 1-a-b-s \\ 1-a-s, 1-b-s \end{matrix}\right], \quad (4)$$

$$(1-x)_+^{c-1} F(a, b; c; 1-x) \leftrightarrow \Gamma(c) \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+c-a-b \\ s+c-a, s+c-b \end{matrix}\right], \quad (5)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \leftrightarrow (1-s)_n f^*(s-n), \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) \leftrightarrow (1-s) f^*(s-1), \quad (7)$$

где $x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$, $\Gamma\left[\begin{matrix} a_1, a_2 \\ b_1, b_2 \end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}$.

Рассмотрим функцию

$$g(x) = (I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(t) t^{\alpha-1} K\left(\frac{x}{t}\right) dt, \alpha > 0,$$

$$\text{где } K\left(\frac{x}{t}\right) = \left(\frac{x}{t} - 1\right)_+^{\alpha-1} F\left(\alpha + \beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{t}{x}\right).$$

Можно принять $f_1\left(\frac{x}{t}\right) = K\left(\frac{x}{t}\right)$, $f_2(t) = f(t)$. Тогда по формулам (3), (4) получим

$$g^*(s) = \Gamma\left[\frac{1+\beta-s, 1+\eta-s}{1-s, 1+\alpha+\beta+\eta-s}\right] f^*(s-\beta), \quad (8)$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re} \alpha, 1 - \operatorname{Re} (\alpha + \beta - \eta).$$

Теперь рассмотрим выражение $g_1(x) = (I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} t^l f(t))(x)$. С учетом формул (2) и (8) заключаем, что

$$g_1^*(s) = \Gamma\left[\frac{1+\beta-s, 1+\eta-s}{1-s, 1+\alpha+\beta+\eta-s}\right] f^*(s+l-\beta), \quad (9)$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re} \alpha, 1 - \operatorname{Re} (\alpha + \beta - \eta).$$

Пусть $g_2(x) = x^d g_1(x) = x^d (I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} t^l f(t))(x)$. С учетом формул (2) и (9) $g_2^*(s)$ запишем следующим образом:

$$g_2^*(s) = \Gamma\left[\frac{1+\beta-d-s, 1+\eta-d-s}{1-d-s, 1+\alpha+\beta+\eta-d-s}\right] f^*(s+d+l-\beta), \quad (10)$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re} \alpha, 1 - \operatorname{Re} (\alpha + \beta - \eta).$$

Теперь рассмотрим обобщенную дробную производную $g_3(x) = I_{0+}^{a, b, c} g_2(x)$ ($a < 0$). Согласно введенного оператора (1) имеем

$$g_3(x) = I_{0+}^{a, b, c} g_2(x) = \frac{d}{dx} (I_{0+}^{a+1, b-1, c-1} g_2(x)) = \frac{d}{dx} [A(x)].$$

С учетом формул (7) и (8)

$$g_3^*(s) = \frac{d}{dx} [A(x)]_{(s)}^* = (1-s) \Gamma\left[\frac{b+1-s, c+1-s}{2-s, 1+a+b+c-s}\right] g_2^*(s-b),$$

$$\operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re}(a+1), 1 - \operatorname{Re}(a+b-c+1).$$

С учетом формулы (10)

$$g_3^*(s) = (1-s) \frac{\Gamma(b+1-s) \Gamma(c+1-s) \Gamma(1+\beta-d+b-s) \Gamma(1+\eta-d+b-s)}{\Gamma(2-s) \Gamma(1+a+b+c-s) \Gamma(1-d+b-s) \Gamma(1+\alpha+\beta+\eta-d+b-s)} \times \\ \times f^*(s-b+d+l-\beta).$$

Таким образом,

$$\left[\left(I_{0+}^{a, b, c} x^d I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} t^l f(t) \right) (x) \right]_{(s)}^* = \\ = \frac{\Gamma(b+1-s) \Gamma(c+1-s) \Gamma(1+\beta-d+b-s) \Gamma(1+\eta-d+b-s)}{\Gamma(1-s) \Gamma(a+b+c+1-s) \Gamma(1-d+b-s) \Gamma(1+\alpha+\beta+\eta-d+b-s)} \times \\ \times f^*(s-b+d+l-\beta), \quad (11)$$

где $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re} \alpha$, $1 - \operatorname{Re} (\alpha + \beta - \eta) < 1 - \operatorname{Re} (a+1)$, $1 - \operatorname{Re} (a+b-c+l)$.

В работе [3] сформулировано и доказано следующее утверждение.

ЛЕММА. Если некоторая функция $\Phi(x)$ имеет преобразование Меллина вида

$$\Phi^*(s) = \Gamma\left[\frac{a_1-s, b_1-s}{c_1-s, d_1-s}\right] f^*(s+l_1),$$

$\operatorname{Re} (d_1 + c_1 - a_1 - b_1) > 0$, $\operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re} (d_1 + c_1 - a_1 - b_1) < 1 - \operatorname{Re} (d_1 + c_1 - 2b_1)$, то ее можно выразить через обобщенный оператор дробного интегродифференцирования

$$\Phi(x) = x^{1-c_1} \left(I_{0+}^{d_1+c_1-a_1-b_1, a_1-c_1, b_1-c_1} t^{a_1+l_1-1} f(t) \right) (x).$$

Чтобы воспользоваться леммой, необходимо чтобы в числителе и в знаменателе дроби в формуле (11) оставались по две гамма-функции. Таким образом, накладывая ограничения

и перебирая все возможные варианты, получены тридцать две формулы для композиций операторов:

1. $I_{0+}^{a,b,-a} x^{a+b} I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f(t) = I_{0+}^{\alpha+a,\beta-a,\eta-a} t^l f(t) = I_{0+}^{\alpha+a,\eta-a,\beta-a} t^{l+\eta-\beta} f(t) =$
 $= x^{a-\alpha-\beta-\eta} I_{0+}^{\alpha+a,-\alpha-\eta,-\alpha-\beta} t^l f(t) = x^{a-\alpha-\beta-\eta} I_{0+}^{\alpha+a,-\alpha-\beta,-\alpha-\eta} t^{l+\eta-\beta} f(t);$
2. $I_{0+}^{a,b,-a} x^{a+b+\alpha+\beta+\eta} I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,-a-\alpha-\eta,-a-\alpha-\beta} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,-a-\alpha-\beta,-a-\alpha-\eta} t^{l+\eta-\beta} f(t) =$
 $= x^{a+\alpha+\beta+\eta} I_{0+}^{\alpha+a,\beta,\eta} t^l f(t) = x^{a+\alpha+\beta+\eta} I_{0+}^{\alpha+a,\eta,\beta} t^{l-\beta+\eta} f(t);$
3. $I_{0+}^{a,b,-a} x^{b+\beta} I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f(t) = x^\beta I_{0+}^{a+\alpha,\beta-a,\eta} t^{l-a} f(t) = x^\beta I_{0+}^{a+\alpha,\eta,\beta-a} t^{l-\beta+\eta} f(t) =$
 $= x^{-\alpha-\eta} I_{0+}^{a+\alpha,-a-\alpha-\eta,-\alpha-\beta} t^{l-a} f(t) = x^{-\alpha-\eta} I_{0+}^{a+\alpha,-\alpha-\beta,-a-\alpha-\eta} t^{l-\beta+\eta} f(t);$
4. $I_{0+}^{a,b,-a} x^d I_{0+}^{\alpha,\beta,-\alpha} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,-a,b-d-\alpha} t^{d-a-b+l-\beta} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,b-d-\alpha,-a} t^{l-\beta+\eta} f(t) =$
 $= x^{d-b} I_{0+}^{a+\alpha,d-a-b,\eta} t^{d-a-b+l-\beta} f(t) = x^{d-b} I_{0+}^{a+\alpha,\eta,d-a-b} t^{l-\beta+\eta} f(t);$
5. $I_{0+}^{a,b,-a} x^{b+\eta} I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f(t) = x^\eta I_{0+}^{a+\alpha,\eta-a,a+\beta-\eta} t^{\eta+l-\beta-a} f(t) = x^\eta I_{0+}^{a+\alpha,a+\beta-\eta,-a} t^l f(t) =$
 $= x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{a+\alpha,-a-\alpha-\beta,-\alpha-\eta} t^{\eta+l-\beta-a} f(t) = x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{a+\alpha,-\alpha-\eta,-a-\alpha-\beta} t^l f(t);$
6. $I_{0+}^{a,b,-a} x^d I_{0+}^{\alpha,-\alpha,\eta} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,-a,b-\alpha-d} t^{d-a-b+\alpha+l} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,b-\alpha-d,-a} t^l f(t) =$
 $= x^{d-b} I_{0+}^{a+\alpha,d-a-b,\beta} t^{d-a-b+\alpha+l} f(t) = x^{d-b} I_{0+}^{a+\alpha,\beta,d-a-b} t^l f(t);$
7. $I_{0+}^{a,-a,c} x^{\alpha+\beta+\eta} I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,-\alpha-\eta-a,-\alpha-\beta-a} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,-\alpha-\beta-a,-\alpha-\eta-a} t^{l+\beta+\eta} f(t) =$
 $= x^{a+\alpha+\beta+\eta} I_{0+}^{\alpha+a,\beta,\eta} t^l f(t) = x^{a+\alpha+\beta+\eta} I_{0+}^{a+\alpha,\eta,\beta} t^{l-\beta+\eta} f(t);$
8. $I_{0+}^{a,b,c} x^{b-c} I_{0+}^{\alpha,\beta,b-c-\alpha-\beta} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,c+\beta,b-\alpha-\beta} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,b-\alpha-\beta,c+\beta} t^{l+b-c-\alpha-2\beta} f(t) =$
 $= x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha,\beta-a-b,-a-c-\alpha-\beta} t^l f(t) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha,-a-c-\alpha-\beta,\beta-a-b} t^{l+b-c-\alpha-2\beta} f(t);$
9. $I_{0+}^{a,b,c} x^{b+\beta} I_{0+}^{\alpha,\beta,b-\alpha} t^l f(t) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha,-a-b,-a-c-\alpha-\beta} t^{c+l} f(t) =$
 $= x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha,-a-c-\alpha-\beta,-a-b} t^{l+b-\beta-\alpha} f(t) = x^\beta I_{0+}^{a+\alpha,c+\beta,b-\alpha} t^{c+l} f(t) = x^\beta I_{0+}^{a+\alpha,b-\alpha,c+\beta} t^{l+b-\beta-\alpha} f(t);$
10. $I_{0+}^{a,b,c} x^{\beta-a-c} I_{0+}^{\alpha,\beta,-\alpha-a-c} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,c,b-\alpha-\beta} t^{l-a-b} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,b-\alpha-\beta,c} t^{l-\alpha-\beta-a-c} f(t) =$
 $= x^{\beta-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha,\beta-a-b,-\alpha-a-c} t^{l-a-b} f(t) = x^{\beta-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha,-\alpha-a-c,\beta-a-b} t^{l-\alpha-\beta-a-c} f(t);$
11. $I_{0+}^{a,b,c} x^{\eta+b} I_{0+}^{\alpha,\beta,-\alpha,\eta} t^l f(t) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha,-a-b,-a-c} t^{l+c-b+\alpha+\eta} f(t) =$
 $= x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha,-a-c,-a-b} t^l f(t) = x^\eta I_{0+}^{a+\alpha,c+\eta,b-\alpha} t^{l+c-b+\alpha+\eta} f(t) = x^\eta I_{0+}^{a+\alpha,b-\alpha,c+\eta} t^l f(t);$
12. $I_{0+}^{a,b,c} x^{\eta-a-c} I_{0+}^{\alpha,-a-c-\alpha,\eta} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,c,b-\alpha-\eta} t^{c-b+\alpha+\eta+l} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,b-\alpha-\eta,c} t^l f(t) =$
 $= x^{\eta-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha,\eta-a-b,-a-c-\alpha} t^{c-b+\alpha+\eta+l} f(t) = x^{\eta-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha,-a-c-\alpha,\eta-a-b} t^l f(t);$
13. $I_{0+}^{a,-a,c} x^{\beta-a} I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} t^l f(t) = x^\beta I_{0+}^{a+\alpha,\beta-a,\eta} t^{l-a} f(t) = x^\beta I_{0+}^{a+\alpha,\eta,\beta-a} t^{l+\eta-\beta} f(t) =$
 $= x^{-\alpha-\eta} I_{0+}^{a+\alpha,-a-\alpha-\eta,-\alpha-\beta} t^{l-a} f(t) = x^{-\alpha-\eta} I_{0+}^{a+\alpha,-\alpha-\beta,-a-\alpha-\eta} t^{l+\eta-\beta} f(t);$
14. $I_{0+}^{a,-a,c} x^d I_{0+}^{\alpha,\beta,-\alpha} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,-a,-a-d-\alpha} t^{d+l-\beta} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,-a-d-\alpha,-a} t^{l-\alpha-\beta} f(t) =$
 $= x^{d+a} I_{0+}^{a+\alpha,d,-\alpha} t^{d+l-\beta} f(t) = x^{d+a} I_{0+}^{a+\alpha,-\alpha,d} t^{l-\alpha-\beta} f(t);$
15. $I_{0+}^{a,-a,c} x^{\eta-a} I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} t^l f(t) = x^\eta I_{0+}^{a+\alpha,\eta-a,\beta} t^{l+\eta-a-\beta} f(t) = x^\eta I_{0+}^{a+\alpha,\beta,\eta-a} t^l f(t) =$
 $= x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{a+\alpha,-a-\alpha-\beta,-\alpha-\eta} t^{l+\eta-a-\beta} f(t) = x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{a+\alpha,-\alpha-\eta,-a-\alpha-\beta} t^l f(t);$
16. $I_{0+}^{a,-a,c} x^d I_{0+}^{\alpha,-\alpha,\eta} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,-a,-a-d-\alpha} t^{d+l+\alpha} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,-a-d-\alpha,-a} t^l f(t) =$
 $= x^{d+a} I_{0+}^{a+\alpha,d,-\alpha} t^{d+l+\alpha} f(t) = x^{d+a} I_{0+}^{a+\alpha,-\alpha,d} t^l f(t);$
17. $I_{0+}^{a,b,c} x^{b-c} I_{0+}^{\alpha,-c,\eta} t^l f(t) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha,-a-c,\eta-b-a} t^{b+l} f(t) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha,\eta-a-b,-a-c} t^{l+c+\eta} f(t) =$
 $= x^{-\alpha-\eta} I_{0+}^{a+\alpha,b-\alpha-\eta,-\alpha+c} t^{b+l} f(t) = x^{-\alpha-\eta} I_{0+}^{a+\alpha,-\alpha+c,b-\alpha-\eta} t^{l+c+\eta} f(t);$
18. $I_{0+}^{a,b,c} x^{b-c} I_{0+}^{\alpha,a+b,\eta} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,b,\eta+c} t^{l-c-a} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,\eta+c,b} t^{l+\eta-a-b} f(t) =$
 $= x^{-a-b-c-\alpha-\eta} I_{0+}^{a+\alpha,-a-c-\alpha-\eta,-a-b-\alpha} t^{l-c-a} f(t) = x^{-a-b-c-\alpha-\eta} I_{0+}^{a+\alpha,-a-b-\alpha,-a-c-\alpha-\eta} t^{l+\eta-a-b} f(t);$
19. $I_{0+}^{a,b,c} x^{b-c} I_{0+}^{\alpha,\beta,-\alpha} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,b,c-\alpha} t^{l+b-c-\beta} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha,c-\alpha,b} t^{l-\alpha-\beta} f(t) =$

$$\begin{aligned}
&= x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-c, \eta-a-b} t^{l+b-c-\beta} f(t) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, \eta-a-b, -a-c} t^{l-\alpha-\beta} f(t); \\
20. \quad &I_{0+}^{a,b,c} x^{b-c} I_{0+}^{\alpha, \beta, -c} t^l f(t) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-c, \beta-b-a} t^{l-c-\beta} f(t) = \\
&= x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, \beta-b-a, -a-c} t^l f(t) = x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{a+\alpha, b-\alpha-\beta, c-\alpha} t^{l-c-\beta} f(t) = x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{a+\alpha, c-\alpha, b-\alpha-\beta} t^l f(t); \\
21. \quad &I_{0+}^{a,b,c} x^{b-c} I_{0+}^{\alpha, \beta, a+b} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha, b, \beta+c} t^{b-c+l-\beta} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha, \beta+c, b} t^l f(t) = \\
&= x^{-a-b-c-\alpha-\beta} I_{0+}^{a+\alpha, -a-c-\alpha-\beta, -a-b-\alpha} t^{b-c+l-\beta} f(t) = x^{-a-b-c-\alpha-\beta} I_{0+}^{a+\alpha, -a-b-\alpha, -a-c-\alpha-\beta} t^l f(t); \\
22. \quad &I_{0+}^{a,b,c} x^{b-c} I_{0+}^{\alpha, -\alpha, \eta} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha, b, c-\alpha} t^{b-c+l+\alpha} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha, c-\alpha, b} t^l f(t) = \\
&= x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-c, -a-b-\alpha} t^{b-c+l+\alpha} f(t) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-b-\alpha, -a-c} t^l f(t); \\
23. \quad &I_{0+}^{a,b,c} x^{\beta+b} I_{0+}^{\alpha, \beta, c-\alpha} t^l f(t) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-c, -a-c-\alpha-\beta} t^{b+l} f(t) = \\
&= x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-c-\alpha-\beta, -a-c} t^{l+c-\alpha-\beta} f(t) = x^{\beta} I_{0+}^{a+\alpha, b+\beta, c-\alpha} t^{b+l} f(t) = x^{\beta} I_{0+}^{a+\alpha, c-\alpha, b+\beta} t^{l+c-\alpha-\beta} f(t); \\
24. \quad &I_{0+}^{a,b,c} x^{\beta-a-c} I_{0+}^{\alpha, \beta, -a-b-\alpha} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha, b, c-\alpha-\beta} t^{l-a-c} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha, c-\alpha-\beta, b} t^{l-a-b-\alpha-\beta} f(t) = \\
&= x^{\beta-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, \beta-a-c, -a-b-\alpha} t^{l-a-c} f(t) = x^{\beta-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-b-\alpha, \beta-a-c} t^{l-a-b-\alpha-\beta} f(t); \\
25. \quad &I_{0+}^{a,b,c} x^d I_{0+}^{\alpha, c-\alpha, d-b} t^l f(t) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-b, -a-d-\alpha} t^{d+l-c+\alpha} f(t) = \\
&= x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-d-\alpha, -a-b} t^l f(t) = x^{d-b} I_{0+}^{a+\alpha, d, c-\alpha} t^{d+l-c+\alpha} f(t) = x^{d-b} I_{0+}^{a+\alpha, c-\alpha, d} t^l f(t); \\
26. \quad &I_{0+}^{a,b,c} x^{\eta-a-c} I_{0+}^{\alpha, -a-b-\alpha, \eta} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha, b, c-\alpha-\eta} t^{l+\eta-c+b+\alpha} f(t) = \\
&= I_{0+}^{a+\alpha, c-\alpha-\eta, b} t^l f(t) = x^{\eta-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, \eta-a-c, -a-b-\alpha} t^{l+\eta-c+b+\alpha} f(t) = \\
&= x^{\eta-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-b-\alpha, \eta-a-c} t^l f(t); \\
27. \quad &I_{0+}^{a,b,c} x^{b+\beta} I_{0+}^{\alpha, \beta, a+b+c+\beta} t^l f(t) = x^{\beta} I_{0+}^{a+\alpha, b+\beta, c+\beta} t^{l+b} f(t) = x^{\beta} I_{0+}^{a+\alpha, c+\beta, b+\beta} t^{l+c} f(t) = \\
&= x^{-a-b-c-\alpha-\beta} I_{0+}^{a+\alpha, -a-c-\alpha-\beta, -a-b-\alpha-\beta} t^{l+b} f(t) = x^{-a-b-c-\alpha-\beta} I_{0+}^{a+\alpha, -a-b-\alpha-\beta, -a-c-\alpha-\beta} t^{l+c} f(t); \\
28. \quad &I_{0+}^{a,b,c} x^{b-\alpha} I_{0+}^{\alpha, -\alpha, \eta} t^l f(t) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-c, -a-b} t^{l+b} f(t) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-b, -a-c} t^{l+c} f(t) = \\
&= x^{-\alpha} I_{0+}^{a+\alpha, b-\alpha, c-\alpha} t^{l+b} f(t) = x^{-\alpha} I_{0+}^{a+\alpha, c-\alpha, b-\alpha} t^{l+c} f(t); \\
29. \quad &I_{0+}^{a,b,c} x^d I_{0+}^{\alpha, d+a+c, d-b} t^l f(t) = x^{d-b} I_{0+}^{a+\alpha, d, c+d-b} t^{l-a-c} f(t) = x^{d-b} I_{0+}^{a+\alpha, c+d-b, d} t^{-a-b} f(t) = \\
&= x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{a+\alpha, b-a-c-d-\alpha, -a-\alpha-d} t^{l-a-c} f(t) = x^{-\alpha-\beta} I_{0+}^{a+\alpha, -a-\alpha-d, b-a-c-d-\alpha} t^{-a-b} f(t); \\
30. \quad &I_{0+}^{a,b,c} x^{-a-c-\alpha} I_{0+}^{\alpha, -\alpha, \eta} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha, b, c} t^{l-a-c} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha, c, b} t^{l-a-b} f(t) = \\
&= x^{-a-b-c-\alpha} I_{0+}^{a+\alpha, -a-c-\alpha, -a-b-\alpha} t^{l-a-c} f(t) = x^{-a-b-c-\alpha} I_{0+}^{a+\alpha, -a-b-\alpha, -a-c-\alpha} t^{l-a-b} f(t); \\
31. \quad &I_{0+}^{a,b,c} x^{b-\alpha} I_{0+}^{\alpha, \beta, -\alpha} t^l f(t) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-c, -a-b} t^{l+b-\alpha-\beta} f(t) = \\
&= x^{-a-b-c} I_{0+}^{a+\alpha, -a-b, -a-c} t^{l+c-\alpha-\beta} f(t) = x^{-\alpha} I_{0+}^{a+\alpha, b-\alpha, c-\alpha} t^{l+b-\alpha-\beta} f(t) = \\
&= x^{-\alpha} I_{0+}^{a+\alpha, c-\alpha, b-\alpha} t^{l+c-\alpha-\beta} f(t); \\
32. \quad &I_{0+}^{a,b,c} x^{-a-c-\alpha} I_{0+}^{\alpha, \beta, -\alpha} t^l f(t) = I_{0+}^{a+\alpha, b, c} t^{l-a-c-\alpha-\beta} f(t) = I_{0+}^{a+\alpha, c, b} t^{l-a-b-\alpha-\beta} f(t) = \\
&= x^{-a-b-c-\alpha} I_{0+}^{a+\alpha, -a-c-\alpha, -a-b-\alpha} t^{l-a-c-\alpha-\beta} f(t) = \\
&= x^{-a-b-c-\alpha} I_{0+}^{a+\alpha, -a-b-\alpha, -a-c-\alpha} t^{l-a-b-\alpha-\beta} f(t).
\end{aligned}$$

Эти композиционные свойства представляют самостоятельный интерес, а также они могут использоваться при решении задач для дифференциальных уравнений с частными производными, когда краевые условия содержат обобщенные операторы дробного интегродифференцирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu. Univ., 1987. — Vol. 11, No. 2. — P. 135–143.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
3. Ретин О. А., Гайсина Л. Р. О композиционных свойствах для операторов дробного интегродифференцирования // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. десятой межвуз. конф. Ч. 3. — Самара: СамГТУ, 2000. — С. 135–145.

Поступила 27.01.2006 г.