Общероссийский математический портал

В. И. Батищев, Принципы построения стабильных регуляризованных фильтров
Калмана, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2000, вы-
пуск 9, 151–156

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu41>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и со-
гласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 06:43:22

Математическое моделирование и информатика

УДК 621.391

В.И.Батищев

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СТАБИЛЬНЫХ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ ФИЛЬТРОВ КАЛМАНА

Рассмотрены подходы к построению стабилизированных регуляризованных фильтров Калмана с адаптацией параметров к свойствам исходных данных. Приведены алгоритмы фильтрации и структурные схемы фильтров. Проведен анализ сходимости и устойчивости регуляризованных решений.

Калмановская фильтрация как метод оптимальной обработки результатов измерений, искаженных помехами, позволяет решать целый ряд задач [1–5], таких, как фильтрация, сглаживание, интерполяция, экстраполяция непрерывных сигналов и временных рядов; оценивание параметров состояния при реализации алгоритмов оптимального управления в случаях, когда компоненты вектора состояния объекта не поддаются непосредственному измерению; объединение результатов измерений некоторой переменной несколькими измерительными приборами, различающимися типом ошибок и др.

При решении конкретных прикладных задач применение калмановской фильтрации сопряжено с рядом таких проблем, как возможное отсутствие сходимости процесса оценивания, возникающее из-за неполноты или недостаточности априорной информации о свойствах процесса, или потеря работоспособности фильтра при подаче на его вход многомерного сигнала, не имеющего шума хотя бы в одной составляющей.

Указанные недостатки в некоторой мере устраняются при использовании идей и методов регуляризации в алгоритмах фильтрации [4–6]. Примером может быть регуляризованный фильтр Калмана [7], в структуру которого введен генератор стационарного случайного сигнала $u(t)$, что хотя и приводит к смещению оценки выходного сигнала $\hat{x}(t)$, но улучшает ее статистические свойства и сходимость процесса фильтрации.

Однако и такой подход к построению фильтров Калмана не исключает потери устойчивости в случае недоопределенности свойств входного сигнала из-за отсутствия априорной информации о реальной физической задаче. Формально это проявляется в том, что вычисляемый по невязке

$$\sigma_z^2 = \|Z(t) - H(t)\hat{x}(t)\|^2 \quad (1)$$

коэффициент усиления $K(t)$ фильтра становится ниже некоторого порогового значения, ограничивающего область устойчивости. Поэтому в конечном счете все сводится к тому или иному способу определения и установки коэффициента усиления $K(t)$ фильтра. Рассмотрим некоторые подходы к решению этого вопроса.

Составляющими невязки (1) являются:

$Z(t)$ – входной многомерный сигнал фильтра;

$\hat{x}(t)$ – выходной сигнал фильтра, являющийся оценкой выделяемого сигнала;

$H(t)$ – линейный оператор преобразования вектора параметров сигнала $x(t)$, подлежащих оценке, в вектор параметров сигнала $Z(t)$.

Входные векторные воздействия, следовательно, определяются следующим образом:

$$Z(t) = H(t)x(t) + \varepsilon(t), \quad (2)$$

где $\varepsilon(t)$ – аддитивная помеха (шум) в исходных данных.

Алгоритм регуляризованной фильтрации в общем случае определяется векторным дифференциальным уравнением [7]

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + K_\alpha(t)E_\alpha(t). \quad (3)$$

В выражении (2) сигнал предсказания $F(t)\hat{x}(t)$ получается как результат действия линейного матричного оператора на вектор оценок параметров $\hat{x}(t)$.

Коэффициент усиления $K_\alpha(t)$ фильтра определяется по формулам

$$K_\alpha(t) = V_{\hat{x}}(t)H^T(t)[\Psi_\varepsilon(t) + \alpha E]^{-1}; \quad (4)$$

$$\frac{dV_{\hat{x}}(t)}{dt} = F(t)V_{\hat{x}}(t) + V_{\hat{x}}(t)F^T(t) - \quad (5)$$

$$-V_{\hat{x}}(t)H^T(t)[\Psi_\varepsilon(t) + \alpha E]^{-1}H(t)V_{\hat{x}}(t) + G(t)\Psi_w(t)G^T(t);$$

$$E_\alpha(t) = E(t) + u(t), \quad (6)$$

где $V_{\hat{x}}(t)$ – ковариация погрешности выходного сигнала; Ψ_ε и Ψ_w – ковариационные матрицы соответственно шума входного сигнала и белого шума; $E(t) = Z(t) - H(t)\hat{x}(t)$ – вектор невязки; α – параметр регуляризации, минимизирующий невязку $\|E_\alpha(t)\|^2$.

Рассмотрим способ повышения устойчивости регуляризованного фильтра, основанный на сравнении уровней дисперсии σ_z^2 шума входного воздействия и абсолютной величины невязки $E(t)$, реализованной в [8] (рис. 1).

Р и с. 1. Структурная схема регуляризованного фильтра Калмана

Если в процессе работы абсолютная величина невязки $E(t)$ оказывается больше σ_z^2 , сигнал с выхода усилителя коммутируется на выходной сумматор и рассогласование между $Z(t)$ и $H(t)\hat{x}_\alpha(t)$ уменьшается. Как только невязка становится меньше σ_z^2 , вход выходного сумматора отключается от выхода усилителя и обнуляется. Таким образом, весь участок решения разбивается на интервалы неравной длительности с постоянными значениями на каждом интервале, т.е. решение представляет собой кусочно-постоянную функцию времени.

Данный подход обеспечивает совместное действие двух эффектов: стабилизацию матричных коэффициентов усиления за счет введения к элементам матрицы некоторой добавки от регуляризующего оператора αE и ограничение дисперсии ошибок за счет постоянного сопоставления ошибок с дисперсией шума входного воздействия. Эти меры улучшают сходимость фильтра, повышают его точность, сохраняя свойства оптимальности регуляризованного фильтра.

Стабилизирующего эффекта можно добиться также путем введения некоторого масштабирующего регулируемого множителя $c(t)$ к значению интенсивности дополнительного случайного сигнала и установления зоны нечувствительности усилителя. Коэффициент $c(t)$ получается как результат функционального преобразования входного воздействия, что делает процедуру определения параметра регуляризации α адаптивной к изменению свойств входного воздействия. Вектор невязки (6) в данном случае принимает вид

$$E_\alpha(t) = E(t) + c(t)u(t), \quad (7)$$

а коэффициент усиления фильтра будет определяться как

$$K_{\alpha}(t) = V_{\hat{x}}(t)H^T(t)[\Psi_{\varepsilon}(t) + \alpha E + U_{on}]^{-1}, \quad (8)$$

где $U_{on}=const$ – значение некоторого опорного сигнала, определяющего зону нечувствительности усилителя.

Для линейной оценки $\hat{x}(t)$, удовлетворяющей критерию минимума среднеквадратической погрешности фильтрации, существует последовательность линейных оценок $\hat{x}_{\alpha}(t)$, стремящихся к самой оцениваемой величине при $\alpha \rightarrow 0$, т.е.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left| M \left[(\hat{x}(t) - \hat{x}_{\alpha}(t))^2 \right] - M \left[(\hat{x}(t) - x(t))^2 \right] \right| = 0. \quad (9)$$

Оценки $\hat{x}_{\alpha}(t)$ удовлетворяют векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}_{\alpha}(t) + V_{\hat{x}}(t)H^T[\Psi_{\varepsilon}(t) + \alpha E + U_{on}]^{-1}[Z(t) - H(t)\hat{x}_{\alpha}(t)], \quad (10)$$

где $\hat{x}_{\alpha}(0) = 0$, а ковариация погрешности оценки удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dV_{\hat{x}}(t)}{dt} &= F(t)V_{\hat{x}}(t) + V_{\hat{x}}(t)F^T(t) - \\ &- V_{\hat{x}}(t)H^T(t)[\Psi_{\varepsilon}(t) + \alpha E + U_{on}]^{-1}H(t)V_{\hat{x}}(t) + G(t)\Psi_w(t)G^T(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Допустим, что ковариационная функция погрешностей в исходных данных нам априори неизвестна. Очевидно, если найти некоторую «наихудшую» модель помехи и построить для нее оптимальный фильтр, то этот фильтр обеспечит сходимость оценки полезного сигнала и для других помех.

При регулярном полезном сигнале такой «наихудшей» помехой является белый шум [3, 5]. Это вытекает из следующего положения. Пусть $\text{cov}\{\varepsilon(t)\varepsilon(\tau)\} = \Psi_{\varepsilon}(t)\delta(t-\tau)$ – ковариационная матрица r -мерного вектора помехи $\varepsilon(t)$ и пусть существует такая положительно определенная $[r, r]$ матрица $D(t)$, что начиная с некоторого момента $T > t_0$, с учетом введения параметра регуляризации и ограничения коэффициента усиления снизу выполняется условие

$$\left| \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau)H^T(\tau)\{\Psi_{\varepsilon}(t) + \alpha E + U_{on}\}\delta(t-\tau)d\tau \right|_{ij} \leq \left| \Phi^T(t)H^T(t)D(t) \right|_{ij}, \quad T < t < \infty \quad (12)$$

для всех элементов матриц ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, r$).

Тогда оптимальный фильтр, рассчитанный для помехи – белого шума $w(t)$ с ковариационной матрицей $\alpha D(t)\delta(t-\tau)$ и обеспечивающий среднеквадратическую сходимость оценки, обеспечит эту сходимость и в присутствии произвольной помехи $\varepsilon(t)$. Это утверждение можно доказать следующим образом.

В случае регуляризованного фильтра Калмана и ограничения коэффициента усиления снизу погрешность оценки $\Delta(t) = x(t) - \hat{x}_{\alpha}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = F(t)\Delta(t) + V_{\Delta}(t)H^T(t)[\Psi_{\varepsilon}(t) + \alpha E + U_{on}]^{-1}[\varepsilon(t) - H(t)\Delta(t)]. \quad (13)$$

Дифференциальные уравнения, полученные таким образом для помехи – белого шума ($\varepsilon(t)=w(t)$) и для помехи с произвольной ковариационной матрицей оказываются неоднородными линейными относительно σ_z^2 . Они имеют одинаковые собственные функции и различаются только возмущающими составляющими, не содержащими σ_z^2 .

Как следует из условия (12), возмущающие составляющие при $\varepsilon(t)=w(t)$ для $t > T$ всегда не меньше соответствующих составляющих при $\varepsilon(t)$ с ковариационной матрицей, отличной от $D(t)$. Поэтому асимптотическая сходимость дисперсии погрешности к нулю при $\varepsilon(t)=w(t)$ влечет за собой такую же сходимость и для любой $\varepsilon(t)$ с ковариационной функцией, удовлетворяющей условию (12).

На рис.2 представлена структурная схема регуляризованного фильтра Калмана, построенного с учетом доказанных выше утверждений.

Отличительной особенностью схемы является то, что анализируемый многомерный сигнал $Z(t)$ поступает на вход функционального преобразователя (ФП), формирующего сигнал

$v(t) = \sqrt{\frac{Z(t)}{T}}$, где $T=const$ – время экспозиции сигнала. Таким образом, регуляризованная не-

вязка $E_\alpha(t)$, зависящая от интенсивности $U(t)$ дополнительного случайного сигнала, будет определяться как частный случай выражения (7):

$$E_\alpha(t) = Z(t) - H(t)\hat{x}_\alpha(t) + u(t)\sqrt{\frac{Z(t)}{T}}. \quad (14)$$

Кроме того, с выхода усилителя с коэффициентом усиления $K_\alpha(t)$ (8) сигнал поступает на вход повторителя с зоной нечувствительности, определяемой величиной опорного сигнала U_{on} . На выходе формируется сигнал

$$U_{вых} = \begin{cases} U_{ex}, & \text{при } U_{ex} > U_{on}, \\ 0, & \text{при } U_{ex} < U_{on}. \end{cases} \quad (15)$$

Тем самым осуществляется отсечение фоновой составляющей, присутствующей во входном сигнале, т.е. фильтр преобразуется в нелинейный.

Р и с. 2. Структурная схема регуляризованного фильтра Калмана

При решении задач фильтрации с привлечением методов регуляризации устойчивость решения имеет место в том случае, если погрешность результата обработки согласована с погрешностью исходных данных. На практике эта согласованность часто нарушается из-за наличия аномальных погрешностей (сбоев, промахов, грубых ошибок, выбросов). Аномальные значения обычно выявляются и редактируются на этапе предварительной обработки, однако возникают ситуации, когда аномальные результаты носят скрытый характер. Такое скрытое засорение выборки трудно идентифицируемо и может привести к серьезному изменению свойств оценок.

Обеспечить устойчивость фильтра к аномальным выбросам можно введением параметра регуляризации, определяемого соотношением

$$\alpha(t) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i^2(t) \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_i^2(t) \right]^{-1}, \quad (16)$$

где $\varepsilon_i(t)$ – компоненты вектора невязки $E(t)$; $z_i(t)$ – компоненты вектора $Z(t)$.

Сигнал, пропорциональный $\alpha(t)$, является управляющим интенсивностью генератора случайного шума и управляющим коэффициентом усиления усилителя. Структурная схема робастного регуляризованного фильтра Калмана приведена на рис.3.

Рассмотрим примеры распространения методов регуляризации на дискретные варианты фильтров Калмана.

Согласно классическим определениям дискретной Калмановской фильтрации векторы состояния $x(t)$ и измерений Z_i связаны системой уравнений [3, 5]:

$$x(i+1) = A(i)x(i) + w(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad (17)$$

$$Z(i) = H(i)x(i) + \varepsilon(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad (18)$$

где $A(i)$, $H(i)$ – матрицы объекта и измерителя соответственно; $w(i)$, $\varepsilon(i)$ – шумы объекта и измерителя.

Р и с. 3. Структурная схема робастного регуляризованного фильтра Калмана

Обозначая оптимальную апостериорную $\hat{x}(i/i)$ и априорную $\hat{x}(i/i-1)$ оценки текущего состояния $x(i)$ при реализации измерений $y(j)$ до моментов i и $i-1$ соответственно, получим [5]

$$\hat{x}(i/i) = A(i-1)\hat{x}(i-1/i-1) + K(i)[Z(i) - H(i)A(i-1)\hat{x}(i-1/i-1)]; \quad (19)$$

$$\hat{x}(i+1/i) = A(i)\hat{x}(i/i-1) + K^0(i)[Z(i) - H(i)\hat{x}(i/i-1)]; \quad (20)$$

$$K(i) = V(i/i)H^T(i)\Psi_\varepsilon^{-1}(i), \quad (21)$$

где $V(i/i) = M[x(i) - \hat{x}(i)(x(i) - \hat{x}(i/i))^T]$ – матрица ковариации погрешностей оценки; $\Psi_\varepsilon(i) = M[\varepsilon(i)\varepsilon^T(j)]$ – матрица ковариации исходных данных; $K^0(i) = A(i)K(i)$.

Начальные условия фильтрации – это начальные значения оценки состояния и отвечающие ей ковариационные состояния объекта, т.е. необходимо придать конкретные значения вектору $\hat{x}(-1/-1)$ и матрице $P(-1/-1)$. Из условия несмещенности оценки $\hat{x}(i/i)$ этот вопрос должен решаться однозначно:

$$\hat{x}(-1/-1) = M[x(0)] = \bar{x}(0), \quad P(-1/-1) = P(0) = M[(x(0) - \bar{x}(0))(x(0) - \bar{x}(0))^T].$$

Разностные уравнения, описывающие дискретные фильтры, содержат операторы с обращением матриц и оказываются устойчивыми при вполне определенных ограничениях на коэффициенты матричных операторов. При плохой обусловленности матриц задача становится некорректной, а при вырождении матриц теряет устойчивость.

Стабилизирующий эффект в таких фильтрах может быть достигнут использованием эффекта искусственного «старения» ошибок в исходных данных с помощью функционально-временного преобразования (например, экспоненциального). Коэффициент усиления $K(i)$ фильтра в этом случае будет определяться соотношением

$$K_{\alpha 1}(i-k) = \exp\{c(t_i - t_{i-k})\} K_\alpha(i), \quad (22)$$

где $c > 0$ – параметр преобразователя.

В случае равномерно дискретизированных данных, т.е. при $t_{i-k} - t_{i-k-1} = \Delta t = \text{const}$, $t_i - t_{i-k} = K\Delta t$, $\exp\{c(t_i - t_{i-k})\} = s^k > 1$, выражение (22) для одношагового упреждения будет иметь вид

$$K_{\alpha 1}(i) = sK_\alpha(i-1). \quad (23)$$

Регуляризованный коэффициент $K_\alpha(i)$ определяется аналогично (4):

$$K_\alpha(i) = V_{\hat{x}}(i)H^T(i)[\Psi_\varepsilon(i) + \alpha E]^{-1}. \quad (24)$$

Алгоритм фильтрации с регуляризацией и с использованием искусственного «старения» ошибок измерения за счет введения функционального преобразования и выражение для апостериорной дисперсии будут иметь вид