Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Стружанов, Упругопластическая среда с разупрочнением. Сообщение 1. Свойства материала и инкрементальный закон пластичности при растяжении, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 49–61

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu410>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 11:10:35

Механика деформируемого твердого тела

УДК 539.374

В. В. Стружанов

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ СРЕДА С РАЗУПРОЧНЕНИЕМ. СООБЩЕНИЕ 1. СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА И ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЙ ЗАКОН ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Рассмотрено растяжение элементарного кубического объема материала. Получены выражения для инкрементальных модулей и мгновенного коэффициента поперечной деформации как на стадии упрочнения, так и на стадии разупрочнения. Выявлены особенности их изменения. Построены определяющие соотношения, и сформулирован инкрементальный закон пластичности.

1. Введение. Макроизотропные материалы на микроуровне, как правило, представляют собой существенно неоднородную среду. В ходе деформирования в ней происходят множественные повреждения структурных элементов (микропоры в полосах сдвига, микротрещины и т. п.). Данный процесс приводит к зависимости между напряжениями и деформациями, соответствующей разупрочнению материала, когда напряжения падают при одновременном росте деформаций. С феноменологической точки зрения этот эффект характеризуется падающей ветвью диаграммы деформирования. Основная особенность этого явления заключается в том, что на стадии разупрочнения материал реологически неустойчив. Поэтому разупрочнение может быть реализовано только тогда, когда материал находится в составе устойчивой механической системы [1, 2].

В силу данной особенности состояние разупрочнения, как правило, игнорируется и в различных теориях упругопластического тела исследуется только процесс упрочнения [3–5]. Однако учет возможности работы материала на закритической стадии деформирования играет важную роль в расчетах на прочность. Здесь можно выделить три основных аспекта. Во-первых, так как на стадии разупрочнения материал сохраняет несущую способность, хотя и ограниченную, то учет этого обстоятельства позволяет обеспечить более точное определение предельной несущей способности конструкций и их элементов и, следовательно, максимально использовать ресурс материала. Во-вторых, введение в рассмотрение стадии разупрочнения, которая является переходной от сплошной среды к макроразрушению, позволяет установить закономерности возникновения трещин и тем самым устранить существующий разрыв между механикой деформаций и механикой трещин. В-третьих, появление в элементе конструкции зон с неустойчивым материалом существенным образом влияет на устойчивость его деформирования. Поэтому эффект разупрочнения может быть положен в основу теории устойчивости и живучести конструкций и их элементов.

В научной литературе периодически появляются публикации, посвященные вопросам реологической неустойчивости материала. Подробно состояние проблемы, а также некоторые положения теории разупрочняющихся сред изложены в монографиях [6,7]. Однако построение строгой математической теории, характерной для механики деформируемого твердого тела, еще не завершено. В данной работе сделана попытка последовательного изложения основ одного из возможных вариантов математической теории сплошных сред, обладающих эффектом деформационного разупрочнения.

2. Одноосное растяжение.

2.1. Свойства материала [8]. Возьмем кубический представительный объем материала, с гранями которого свяжем прямоугольную систему координат $x_1x_2x_3$. Будем растягивать его вдоль оси x_1 , задавая величину продольной деформации ε_1 и регистрируя значения поперечных деформаций $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ ($\varepsilon_2 = \varepsilon_3$). При этом напряжение σ_1 ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) определяем как отношение растягивающего усилия к первоначальной площади поперечного сечения элементарного объема.

В результате равновесного вплоть до разрушения деформирования получаем зависимость $\sigma_1(\epsilon_1)$, которая определяет так называемую полную диаграмму деформирования (рис. 2.1., кривая 1), имеющую восходящие участки (упругость — $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_1^T$, $0 \leq \sigma_1 < \sigma_1^T$, упрочнение — $\epsilon_1^T \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_1^B$, $\sigma_1^T \leq \sigma_1 \leq \sigma_1^B$) и падающую до нуля ветвь (разупрочнение — $\epsilon_1^B < \epsilon_1 \leq \epsilon_1^Z$) [9]. Разделение элемента на части происходит в момент, когда $\sigma_1 = 0$, а деформация ϵ_1 достигает некоего предельного значения ϵ_1^Z . Здесь σ_1^T , σ_1^B , ϵ_1^T , ϵ_1^B — соответственно пределы текучести и прочности, и им отвечающие деформации.

Р и с. 2.1. Диаграмма деформирования (1) и график зависимости коэффициента поперечной деформации от удлинения (2)

На восходящей ветви сопротивление деформированию растет, и поэтому материал находится в устойчивом состоянии. На ниспадающей ветви рост деформаций сопровождается падением напряжений, т.е. состояние материала неустойчивое — любое увеличение растягивающего усилия приводит к катастрофическому разрушению представительного объема. Неустойчивое состояние может быть реализовано только тогда, когда материал находится в составе устойчивой механической системы [1]. Растяжение с контролем по деформациям обеспечивает указанные условия.

Отметим, что, вообще говоря, падающая ветвь появляется на диаграммах растяжения вследствие уменьшения

эффективной площади сечения представительного объема, вызванного повреждениями на микро и субмикроуровне. Однако такая точка зрения не обязательна для феноменологической теории. Данный процесс непрерывного накопления повреждений можно рассматривать как деформационное разупрочнение, описываемое посредством соответствующего изменения макросвойств эффективного объема материала [10].

По найденным зависимостям $\sigma_1(\epsilon_1)$ и $\epsilon_2(\epsilon_1)$ определяем инкрементальный (мгновенный, касательный) модуль $E^p(\epsilon_1) = \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1}$ и мгновенный коэффициент поперечной деформации $\nu^p(\epsilon_1) = -\frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1}$, график которого показан на рис. 2.1, кривая 2. Заметим, что на стадии разупрочнения возможны и отрицательные значения мгновенного коэффициента поперечной деформации. На упругом участке E^p и ν^p равняются соответственно модулю Юнга E и коэффициенту Пуассона ν . На стадии упрочнения $E^p = E_h^p$ и $E > E_h^p > 0$, при разупрочнении $E^p = E_s^p$ и $E_s^p < 0$. В точках диаграммы $(\epsilon_1^B, \sigma_1^B)$ и $(\epsilon_1^Z, 0)$ имеем $E^p(\epsilon_1^B) = E^p(\epsilon_1^Z) = 0$.

При одноосном растяжении объемное напряжение σ_0 , объемная деформация ϵ_0 и их приращения $d\sigma_0$, $d\epsilon_0$ после линеаризации определены формулами

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1}{3}, \quad d\sigma_0 = \frac{d\sigma_1}{3}, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{3}(\epsilon_1 + 2\epsilon_2), \quad d\epsilon_0 = \frac{1}{3}(d\epsilon_1 + 2d\epsilon_2). \quad (2.1.1)$$

Так как

$$d\epsilon_2 = -\nu^p(\epsilon_1)d\epsilon_1, \quad \epsilon_2 = -\int_0^{\epsilon_1} \nu^p d\epsilon_1, \quad (2.1.2)$$

то

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3} \left(\epsilon_1 - 2 \int_0^{\epsilon_1} \nu^p d\epsilon_1 \right), \quad d\epsilon_0 = \frac{d\epsilon_1}{3} (1 - 2\nu^p). \quad (2.1.3)$$

Выражения для максимальных касательных напряжений τ и сдвигов γ и их приращений $d\tau$, $d\gamma$ с учетом равенств (2.1.2) имеют вид

$$\tau = \frac{\sigma_1}{2}, \quad d\tau = \frac{d\sigma_1}{2}, \quad (2.1.4)$$

$$\gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \int_0^{\varepsilon_1} v^p d\varepsilon_1, \quad d\gamma = d\varepsilon_1 (1 + v^p). \quad (2.1.5)$$

Исходя из вида дифференциала функции $\sigma_1(\varepsilon_1)$, запишем инкрементальное соотношение

$$d\sigma_1 = E^p d\varepsilon_1, \quad (2.1.6)$$

связывающее приращения напряжения σ_1 и деформации ε_1 . Подставим теперь в равенство (2.1.6) выражение для приращения $d\varepsilon_1$, полученное из второго равенства (2.1.3). Затем новую формулу для приращения $d\sigma_1$ подставим во второе равенство (2.1.1). Тогда

$$d\sigma_0 = K^p d\varepsilon_0. \quad (2.1.7)$$

Аналогично, используя равенства (2.1.6), (2.1.5) и (2.1.4), находим, что

$$d\tau = G^p d\gamma. \quad (2.1.8)$$

Здесь

$$K^p = \frac{E^p}{1 - 2v^p}, \quad G^p = \frac{E^p}{2(1 + v^p)} \quad (2.1.9)$$

соответственно инкрементальные объемный модуль и модуль сдвига. Отметим, что соотношения (2.1.9) согласуются с выражениями, полученными из других соображений в работе [11].

Далее легко проверяется, что $\int_0^{\varepsilon_1^Z} E^p d\varepsilon_1 = 0$, $\int_0^{\varepsilon_0^Z} K^p d\varepsilon_0 = 0$, $\int_0^{\gamma^Z} G^p d\gamma = 0$, $\varepsilon_0^Z = \frac{1}{3}(\varepsilon_1^Z + 2\varepsilon_2(\varepsilon_1^Z))$, $\gamma^Z = \varepsilon_1^Z - \varepsilon_2(\varepsilon_1^Z)$, где ε_0^Z , γ^Z — предельные объемная деформация и сдвиг, отвечающие ε_1^Z , а $\varepsilon_2(\varepsilon_1^Z) = -\int_0^{\varepsilon_1^Z} v^p d\varepsilon_1$ — полная поперечная деформация в момент разрушения.

Из первого равенства (2.1.9) следует, что

$$v^p = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E^p}{K^p} \right). \quad (2.1.10)$$

В силу энергетических соображений значения параметра v^p расположены в отрезке $[-1, \frac{1}{2}]$. Это условие накладывает следующие ограничения на отношение инкрементальных модулей $\frac{E^p}{K^p}$. Во-первых, эти модули должны быть одного знака. На восходящей ветви диаграммы деформирования ($E^p > 0$) они положительны, на ниспадающей — отрицательны. Смена знака происходит при $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^B$. Во-вторых, значения отношения $\frac{E^p}{K^p}$ расположены в отрезке $[0, 3]$. Отсюда при $E^p \neq 0$ имеем $K^p \neq 0$. Неопределенность частного $\frac{E^p}{K^p}$ может быть только при $E^p = 0$ ($\varepsilon_1 = \varepsilon_1^B$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^Z$). Но в силу второго ограничения пределы отношения $\frac{E^p}{K^p}$ при стремлении ε_1 к ε_1^B как слева, так и справа должны лежать в отрезке $[0, 3]$, т.е. функция $v^p(\varepsilon_1)$ может иметь разрыв только первого рода. После разрушения значения E^p , K^p и v^p обращаются в нуль. Следовательно, при стремлении слева ε_1 к ε_1^Z неопределенность $\frac{E^p}{K^p}$ имеет предел, равный единице.

На падающей ветви $v^p > 0$, если $0 > E^p > K^p$ ($|K^p| > |E^p|$), $v^p = 0$, если $E^p = K^p$, $v^p < 0$, если $0 > K^p > E^p$ ($|E^p| > |K^p|$).

Из второго равенства (2.1.9) имеем

$$v^p = \frac{1}{2} \frac{E^p}{G^p} - 1. \quad (2.1.11)$$

Соображения, приведенные выше, приводят к тому, что, во-первых, инкрементальные модули E^P и G^P должны быть одного знака. На восходящей ветви они положительны, на ниспадающей — отрицательны. Смена знака происходит при $\epsilon_1 = \epsilon_1^B$. Во-вторых, значения отношения $\frac{E^P}{G^P}$ расположены в отрезке $[0, 3]$. Тогда при $E^P \neq 0$ имеем $G^P \neq 0$. Неопределенность частного $\frac{E^P}{G^P}$ может быть только при $E^P = 0$. В силу второго ограничения пределы отношения $\frac{E^P}{G^P}$ при стремлении ϵ_1 к ϵ_1^B как слева, так и справа должны лежать в отрезке $[0, 3]$. После разрушения при стремлении ϵ_1 к ϵ_1^Z слева неопределенность $\frac{E^P}{G^P}$ имеет предел, равный двум.

На падающей ветви $v^P > 0$, если $0 > G^P > E^P$ ($|E^P| > 2|G^P|$), $v^P = 0$, если $E^P = 2G^P$, $v^P < 0$, если $0 > E^P > G^P$ ($|E^P| < 2|G^P|$).

Таким образом, приведенные выше рассуждения показывают, что все инкрементальные модули одновременно принимают отрицательные значения, т.е. разупрочнение начинается одновременно для сдвиговых и объемных деформаций.

Наконец исследуем поведение в некоторых частных случаях функций K^P и G^P , заданных формулами (2.1.9), в малой окрестности $\epsilon_1^B - \Delta < \epsilon_1 < \epsilon_1^B + \Delta$, в которой функция E^P является убывающей и $E^P(\epsilon_1^B) = 0$. Пусть функция v^P выпукла в этой окрестности и в центре ее достигает максимума, равного 0.5. Тогда функция K^P при $\epsilon_1 = \epsilon_1^B$ не определена (неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$). Используя правило Лопиталя найдем пределы этой функции при стремлении к центральной точке окрестности слева ($\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1^B - 0$) и справа ($\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1^B + 0$). Учитывая, что $\frac{dE^P}{d\epsilon_1} < 0$, $\frac{dE^P}{d\epsilon_1} > 0$ слева, $\frac{dv^P}{d\epsilon_1} < 0$ справа и $\frac{dv^P}{d\epsilon_1} = 0$ при $\epsilon_1 = \epsilon_1^B$, находим, что $K^P \rightarrow (+\infty)$ при $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1^B - 0$ и $K^P \rightarrow (-\infty)$ при $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1^B + 0$. Следовательно, в точке $\epsilon_1 = \epsilon_1^B$ функция K^P имеет разрыв второго рода.

Если в данной окрестности функция v^P вогнутая и в центре достигает минимума, равного (-1) , то при $\epsilon_1 = \epsilon_1^B$ не определена уже функция G^P . Рассуждая аналогично, находим, что $G^P \rightarrow (+\infty)$ при $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1^B - 0$ и $G^P \rightarrow (-\infty)$ при $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1^B + 0$. Следовательно, в точке $\epsilon_1 = \epsilon_1^B$ функция G^P имеет разрыв второго рода.

2.2. Модельный пример. Пусть свойства материала при растяжении характеризуют следующие зависимости. На стадии упругости ($0 \leq \epsilon_1 \leq 0,0035$) $v^P = 0,304$, $\sigma_1 = E\epsilon_1$, $E^P = E$, на стадиях упрочнения и разупрочнения ($0,0035 \leq \epsilon_1 \leq 0,0441$)

$$v^P = 25(1 + \sqrt{2})^{-1} \epsilon_1 \left[(100\epsilon_1 - 2 - \sqrt{2})^2 - 1 \right],$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} E\epsilon_1 \exp 0,35 \exp(-100\epsilon_1), & \text{если } 0,0035 \leq \epsilon_1 \leq 0,0288, \\ E[22,94 \cdot 10^{-4} - 0,15(\epsilon_1 - 0,0288)], & \text{если } 0,0288 \leq \epsilon_1 \leq 0,0441, \end{cases}$$

$$E^P = \begin{cases} E \exp 0,35 \exp(-100\epsilon_1)(1 - 100\epsilon_1), & \text{если } 0,0035 \leq \epsilon_1 \leq 0,0288, \\ -0,15E, & \text{если } 0,0288 \leq \epsilon_1 \leq 0,0441. \end{cases}$$

В момент разрушения ($\epsilon_1 = \epsilon_1^Z = 0,0441$) $v^P = \sigma_1 = E^P = 0$, в точке максимума на диаграмме $\sigma_1(\epsilon_1)$ при $\epsilon_1 = \epsilon_1^B = 0,01$ имеем $E^P = 0$, $v^P = \frac{1}{2}$. Кривые $v^P(\epsilon_1)$ и $\sigma_1(\epsilon_1)$ показаны на рис. 2.1, а кривая $E^P(\epsilon_1)$ изображена на рис. 2.2 (линия 1). Зависимости $K^P(\epsilon_1)$ и $G^P(\epsilon_1)$, построенные с использованием формул (2.1.9), показаны на рис. 2.2 (соответственно кривые 2 и 3). Отметим, что функция $K^P(\epsilon_1)$ имеет в точке $\epsilon_1 = 0,01$ разрыв второго рода.

Далее, используя выражения (2.1.1), (2.1.3) и (2.1.4), (2.1.5), восстановим зависимости $\sigma_0(\epsilon_0)$ (рис. 2.3) и $\tau(\gamma)$ (рис. 2.4). Очевидно, что данные зависимости неявно учитывают влияние сдвиговых деформаций на сопротивление изменению объема и объемных деформаций на сопротивление сдвигу в конкретных условиях одноосного растяжения.

Отметим еще следующую закономерность, вытекающую из сингулярности модуля K^p при $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^B$. После достижения материалом несжимаемого состояния ($\nu^p = \frac{1}{2}$) дальнейшее растяжение снова приводит к росту объемной деформации. Этот рост связан с резким разрывом внутренних связей, т. е. с появлением множественных объемных дефектов континуального разрушения, приводящим к сильному падению величины объемных напряжений.

2.3. Плотность материала. До начала деформирования представительный объем материала имел плотность ρ_0 . Считая объем единичным, находим, что его масса $m = \rho_0$. В ходе нагружения объем изменяется, и, следовательно, согласно закону сохранения массы изменяется и плотность материала. Если не пренебрегать произведениями деформаций, то зависимость объема от продольной деформации имеет вид $V = 1 + \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2^2$, где ε_2 определено выражением (2.1.2). Тогда $\rho_0/\rho = V$. Используя формулу для функции $\nu^p(\varepsilon_1)$, приведенную в модельном примере, построим зависимость $\rho_0/\rho(\varepsilon_1)$ (рис. 2.5, кривая 1).

Кривая 2 – та же зависимость, полученная в результате пренебрежения произведениями деформаций. На кривой 1 наблюдается падающий участок (см. вставку на рис. 2.5), который соответствует возрастанию плотности и уменьшению объема. При растяжении возрастание плотности материала невозможно. Следовательно, должны появиться некоторые дополнительные деформации такие, что суммарные деформации обеспечивают монотонное возрастание объема. Причина возникновения этих деформаций требует специального исследования. Идеализация, заключающаяся в пренебрежении произведениями деформаций, позволяет устранить эту некорректность (см. рис. 2.5., кривая 2).

2.4. Частные случаи идеализации свойств материала. Примем обычное для теории пластичности допущение о том, что на стадии упрочнения отсутствует остаточное (неупругое) изменение объема, и объемные напряжение и деформация связаны линейным образом

Р и с. 2.2. Зависимости экспериментальных модулей E^p (1), K^p (2), G^p (3) от удлинения

Р и с. 2.3. Диаграмма «объемное напряжение – объемная деформация»

Р и с. 2.4. Диаграмма «касательное напряжение – сдвиг»

согласно закону упругости, т.е.

$$K_h^p = K = E/(1-2\nu),$$

где K – объемный модуль на стадии упругого деформирования. Тогда из формул (2.1.10) и (2.1.9) находим

$$\nu_h^p = 0.5 \left[1 - (1-2\nu) E_h^p / E \right], \quad G_h^p = E_h^p E / \left[3E - (1-2\nu) E_h^p \right]. \quad (2.4.1)$$

Величина ν^p изменяется от ν до 0.5 при $E^p = 0$ и в конце участка упрочнения материал становится несжимаемым.

После перехода на стадию разупрочнения, когда объемная деформация превышает величину

$$\epsilon_0^B = \frac{1}{3} \left(\epsilon_1^B - 2 \int_0^{\epsilon_1^B} \nu^p(\epsilon_1) d\epsilon_1 \right) = \frac{1-2\nu}{3} \left(\epsilon_1^T + \frac{1}{E} \int_{\epsilon_1^T}^{\epsilon_1^B} E_h^p d\epsilon_1 \right), \quad (2.4.2)$$

Р и с. 2.5. Зависимость изменения плотности материала от удлинения

модуль K^p не может сохранять предыдущее постоянное значение и становится отрицательным. Допустим, что инкрементальный модуль K_s^p также постоянен (зависимость $\sigma_0(\epsilon_0)$ – билинейная). Тогда $K_s^p = -K/(z-1)$, где $z = \epsilon_0^Z / \epsilon_0^B$. Здесь K_s^p – объемный модуль на стадии разупрочнения, ϵ_0^Z – предельная объемная деформация, отвечающая предельной деформации растяжения ϵ_1^Z . Из выражения (2.1.10) имеем $\nu_s^p = 0.5 \left[1 + (z-1)(1-2\nu) E_s^p / E \right]$. Тогда, используя первое равенство из (2.1.3), находим
$$\epsilon_0^Z = (1-2\nu) \left(\epsilon_1^T + \frac{1}{E} \int_{\epsilon_1^T}^{\epsilon_1^B} E_h^p d\epsilon_1 - \frac{z-1}{E} \int_{\epsilon_1^B}^{\epsilon_1^Z} E_s^p d\epsilon_1 \right)$$

Наконец, возьмем диаграмму деформирования с линейными участками упрочнения и разупрочнения, а именно, $E_h^p = \alpha_h E$,

$E_s^p = -\alpha_s E$, где $\alpha_h, \alpha_s - \text{const}$, $0 < \alpha_h < 1$, $\alpha_s > 0$. Полагая также $K_h^p, K_s^p, G_h^p, G_s^p - \text{const}$, из формул (2.1.10) и (2.1.11) находим $\nu_h^p = 0.5 \left(1 - \alpha_h E / K_h^p \right)$, $G_h^p = \alpha_h E K_h^p / (3K_h^p - \alpha_h E)$, $\nu_s^p = 0.5 \left(1 + \alpha_s E / K_s^p \right)$, $G_s^p = -\alpha_s E K_s^p / (3K_s^p + \alpha_s E)$. Если положить $\nu_h^p = \nu_s^p = \nu$, то $K_h^p = \alpha_h K$, $G_h^p = \alpha_h G$, $K_s^p = -\alpha_s K$, $G_s^p = -\alpha_s G$.

2.5. Несдвигаемый материал. Рассуждая формальным образом, можно допустить, что на стадии упрочнения отсутствует неупругое изменение формы, и сдвиговые напряжения и деформация связаны линейным образом согласно закону упругости, т.е. $G_h^p = G = 0.5 E / (1 + \nu)$, где G – модуль сдвига на стадии упругого деформирования. Тогда из формул (2.1.11), (2.1.9) и (2.1.5) следует, что

$$\nu_h^p = \frac{E_h^p (1 + \nu)}{E} - 1, \quad K_h^p = \frac{E_h^p E}{3E + E_h^p 2(1 + \nu)}, \quad \gamma^B = (1 + \nu) \left(\epsilon_1^T + \frac{1}{E} \int_{\epsilon_1^T}^{\epsilon_1^B} E_h^p d\epsilon_1 \right).$$

Далее, аналогично изложенному в пункте 2.4, полагаем $G_s^p = -G/(z-1)$, $z = \gamma^Z/\gamma^B$. Отсюда $v_s^p = -\frac{E_s^p(1+v)(z-1)}{E} - 1$, $\gamma^Z = (1+v) \left(\epsilon_1^T + \frac{1}{E} \int_{\epsilon_1^T}^{\epsilon_1^B} E_h^p d\epsilon_1 - \frac{z-1}{E} \int_{\epsilon_1^B}^{\epsilon_1^Z} E_s^p d\epsilon_1 \right)$.

2.6. Признаки характерных черт процесса деформирования. О характерных особенностях процесса деформирования материала можно судить, исходя из вида функций $E^p(\epsilon_1)$, $v^p(\epsilon_1)$, $dE^p/d\epsilon_1$, $dv^p/d\epsilon_1$, которые определяют производные

$$\frac{dK^p}{d\epsilon} = \frac{(1-2v^p)dE^p/d\epsilon_1 + 2E^p dv^p/d\epsilon_1}{(1-2v^p)^2}, \quad \frac{dG^p}{d\epsilon} = \frac{(1+v^p)dE^p/d\epsilon_1 - E^p dv^p/d\epsilon_1}{2(1+v^p)^2},$$

полученные дифференцированием выражений (2.1.9). Например, пусть на восходящей ветви при некотором значении деформации растяжения $E^p > 0$, $dE^p/d\epsilon_1 < 0$, $0.5 > v^p > 0$, $dv^p/d\epsilon_1 > 0$. Отсюда $K^p > 0$, $G^p > 0$, $dG^p/d\epsilon_1 < 0$ и G^p в окрестности данного значения деформации является убывающей функцией. Следовательно, уменьшается сопротивление сдвиговым деформациям. Для увеличения сдвигов требуется все меньшие величины касательных напряжений. Пластическая деформация встречает все меньше препятствий своему распространению. Если и $dK^p/d\epsilon_1 < 0$, то уменьшается сопротивление и объемным деформациям. Пластическая деформация приводит к разрыхлению материала.

Если $E^p < 0$, $dE^p/d\epsilon_1 < 0$, $v^p > 0$, $dv^p/d\epsilon_1 < 0$ и $|(1-2v^p)dE^p/d\epsilon_1| > 2E^p dv^p/d\epsilon_1$, то $dG^p/d\epsilon_1 < 0$, $dK^p/d\epsilon_1 < 0$. Отсюда процесс разупрочнения нарастает. Увеличение сдвигов и объемных деформаций сопровождается прогрессирующим падением касательных и объемных напряжений.

2.7. Эффект Баушингера. В случае классического упругопластического тела, когда рассматривается только восходящая ветвь диаграммы деформирования, эффект Баушингера заключается в уменьшении предела текучести при сжатии в результате предварительного упрочнения растяжением (рис. 2.6, сплошная кривая 1 – линия пределов текучести при сжатии). Для определения закономерности соотношения пределов текучести при растяжении и сжатии на падающей ветви рассмотрим точку равновесного разделения элементарного объема на фрагменты (точка Z, рис. 2.6).

Очевидно, что предел текучести при растяжении равен нулю, если о таковом вообще можно говорить. Если теперь из этой точки произвести сжатие, то после закрытия дефектов материал будет деформироваться упруго. Переход в пластическое состояние наступит при некотором конечном значении сжимающего напряжения. Если деформации растяжения существенно влияют на упругие свойства материала, то это значение близко к $(-\sigma_1^T)$. Отсюда можно заключить, что снижение предела текучести при растяжении на стадии разупрочнения сопровождается повышением предела текучести после разгрузки и последующего сжатия (рис. 2.6, штрих пунктирная кривая 2). Таким образом, происходит инверсия классического эффекта Баушингера.

Р и с 2.6. Схема к эффекту Баушингера

3. Определяющие соотношения упругопластического материала при одноосном растяжении.

3.1. Инкрементальный закон пластичности [8]. При изотермическом процессе элементарная работа деформации совершается за счет изменения свободной энергии. Запишем урав-

нение второго закона термодинамики с учетом необратимости и изотермичности деформирования в виде [12]

$$dF = \frac{1}{\rho} \sigma_1 d\varepsilon_1 - dg, \quad (3.1.1)$$

где F – свободная энергия, ρ – плотность материала, dg – некомпенсированное тепло, характеризующее диссипацию подводимой энергии. Полагаем, что модуль разгрузки не изменяется в процессе деформирования и равен модулю упругости, коэффициент поперечной деформации при разгрузке постоянен и равен коэффициенту Пуассона, деформация аддитивна, т.е. $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^e + \varepsilon_1^p$, где ε_1^e , ε_1^p – соответственно упругая и пластическая составляющие полной деформации. Отсюда пластическая деформация не влияет на упругие свойства материала. Из двух механизмов диссипации энергии учитывается только диссипация, проходящая за счет пластической деформации, а диссипацией континуального разрушения (множественного повреждения материала микропорами и микротрещинами) пренебрегаем.

В силу высказанных выше предположений свободная энергия не зависит от пластических деформаций, т.е. $F = F(\varepsilon_1^e)$. Тогда подставляя в закон (3.1.1) $dF = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1^e} d\varepsilon_1^e$ и заменяя $d\varepsilon_1$ сум-

мой $d\varepsilon_1^e + d\varepsilon_1^p$, получаем $\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1^e} - \frac{\sigma_1}{\rho} \right) d\varepsilon_1^e + \left(dg - \frac{1}{\rho} \sigma_1 d\varepsilon_1^p \right) = 0$. Отсюда [12]

$$\sigma_1 = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_1^e}, \quad \rho dg = \sigma_1 d\varepsilon_1^p. \quad (3.1.2)$$

Здесь ρdg определяет механическую диссипацию подводимой энергии, и эта величина равна элементарной работе напряжений на приращениях пластической деформации $dA_p = \sigma_1 d\varepsilon_1^p$.

Как правило, исходя из физических соображений, полагают, что $\rho dg = dA_p \geq 0$ [12] (принцип максимума скорости диссипации механической энергии).

Возьмем теперь в качестве свободной энергии потенциальную энергию упругих деформаций, а именно, $F = E \varepsilon_1^e \varepsilon_1^e / 2\rho$. Подставляя это выражение в первое равенство (3.1.2), находим определяющее соотношение

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1^e = E(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^p). \quad (3.1.3)$$

Из равенства (3.1.3) следует, что $d\sigma_1 = E(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_1^p)$. С другой стороны справедливо инкрементальное соотношение $d\sigma_1 = E^p d\varepsilon_1$ (формула (2.1.6)). Приравняв оба выражения получаем закон, определяющий кинетику развития неупругих деформаций (закон пластичности),

$$d\varepsilon_1^p = (1 - E^p/E) d\varepsilon_1 = (1 - E^p/E) d\sigma_1 / E^p. \quad (3.1.4)$$

Так как значение $d\varepsilon_1^p$ существенным образом зависит от величины инкрементального модуля E^p , то будем называть выражение (3.1.4) инкрементальным законом пластического течения. Для поперечной деформации имеем $d\varepsilon_2 = d\varepsilon_2^e + d\varepsilon_2^p$, $d\varepsilon_2^e = -\nu d\sigma_1 / E = -\nu E^p d\varepsilon_1 / E$, $d\varepsilon_2 = -\nu^p d\sigma_1 / E^p = -\nu^p d\varepsilon_1$. Отсюда

$$d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_2 - d\varepsilon_2^e = (\nu/E - \nu^p/E^p) d\sigma_1 = (1 - E^p \nu / \nu^p E) d\varepsilon_2. \quad (3.1.5)$$

Аналогично, используя соотношения (2.1.7) и (2.1.8), получаем

$$d\varepsilon_0^p = (1 - K^p/K) d\varepsilon_0 = (1 - K^p/K) d\sigma_0 / K^p, \quad (3.1.6)$$

$$d\gamma^p = (1 - G^p/G) d\gamma = (1 - G^p/G) d\tau / G^p. \quad (3.1.7)$$

Здесь $d\varepsilon_1^p$, $d\varepsilon_2^p$, $d\varepsilon_3^p$, $d\varepsilon_0^p$, $d\gamma^p$ – соответственно приращения продольных, поперечных, объемных и сдвиговых пластических деформаций.

Из формулы (3.1.6) следует, что остаточное изменение объема $d\varepsilon_0^p$ равно нулю, если в ходе пластического деформирования объемная деформация подчиняется закону линейной упругости ($K^p = K$). Используя выражение для $d\varepsilon_0^p$ из формулы (2.1.3), получаем

$$d\varepsilon_0^p = \left[E(1-2\nu^p) - E^p(1-2\nu) \right] d\varepsilon_1 / 3E. \quad (3.1.8)$$

Отсюда $d\varepsilon_0^p = 0$ при $\nu^p = 0.5$ и $E^p = 0$ (несжимаемый материал). Случай $\nu^p = 0.5$, $E^p > 0$ невозможен, так как при $d\varepsilon_1 > 0$ получаем $d\varepsilon_0^p < 0$.

Из формулы (3.1.7) следует, что остаточный сдвиг $d\gamma^p$ равен нулю, если в процессе растяжения сдвиговая деформация подчиняется линейному закону упругости ($G^p = G$). Используя выражение для $d\gamma$ из формул (2.1.5), находим

$$d\gamma^p = \left[E(1+\nu^p) - E^p(1+\nu) \right] 2d\varepsilon_1 / E. \quad (3.1.9)$$

Отсюда $d\gamma^p = 0$ при $\nu^p = -1$ и $E^p = 0$ (несжимаемый материал). Случай $\nu^p = -1$, $E^p > 0$ невозможен, так как при $d\varepsilon_1 > 0$ получаем $d\gamma^p < 0$.

Отметим еще одно важное обстоятельство. На стадии упрочнения инкрементальные модули K_h^p и G_h^p должны быть невозрастающими монотонно убывающими функциями, причем $K_h^p \leq K$, $G_h^p \leq G$. В противном случае формулы (3.1.6) и (3.1.7) определяют отрицательные значения пластических (остаточных) деформаций.

3.2. Дополнительные соотношения. Запишем выражение для дифференциала полной диссипации g , которую будем рассматривать как функцию пластической деформации ε_1^p . Имеем

$$dg = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_1^p} d\varepsilon_1^p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_p}{\partial \varepsilon_1^p} d\varepsilon. \text{ Сравнивая это выражение с равенством (3.1.2), находим, что}$$

$$\sigma_1 = \frac{\partial A_p}{\partial \varepsilon_1^p}. \text{ Следовательно, полная работа напряжения на пластической деформации является}$$

для напряжения потенциальной функцией. Записывая далее дифференциал напряжения, получаем инкрементальное соотношение

$$d\sigma_1 = \frac{\partial^2 A_p}{(\partial \varepsilon_1^p)^2} d\varepsilon_1^p = H d\varepsilon_1^p. \quad (3.2.1)$$

Здесь H является инкрементальным модулем упрочнения (разупрочнения). Если теперь выражение для $d\sigma_1$ из (3.2.1) подставить в закон (3.1.4), то $d\varepsilon_1^p = (E - E^p) H d\varepsilon_1^p / EE^p$. Отсюда

$$H = EE^p / (E - E^p). \quad (3.2.2)$$

Следовательно, на стадии упрочнения $H > 0$ ($E^p > 0$, $E - E^p > 0$), на стадии разупрочнения $H < 0$ ($E^p < 0$, $E - E^p > 0$). Отметим, что аналогично пластический модуль упрочнения вводится в [13] для диаграммы $\tau(\gamma)$.

Отметим, что модуль H определяется касательной к кривой $\sigma_1(\varepsilon_1^p)$ (рис. 3.1), в которую можно перестроить диаграмму $\sigma_1(\varepsilon_1)$, используя

$$\varepsilon_1^p(\varepsilon_1) = \int_0^{\varepsilon_1} (1 - E^p(\varepsilon_1)/E) d\varepsilon_1. \text{ Площадь}$$

под диаграммой $\sigma_1(\varepsilon_1)$ равна работе, затраченной на деформирование, и, следовательно, величине подведенной энергии. Площадь под диаграммой $\sigma_1(\varepsilon_1^p)$ — это полная работа пластических деформаций, которая равна диссипированной материалом энергии. Эти площади, очевидно, равны. Действительно,

Р и с. 3.1. Диаграмма деформирования (1) и зависимость напряжения растяжения от пластической продольной деформации (2)

$$\int_0^{\epsilon_1^Z} \sigma_1 d\epsilon_1 = \int_0^{(\epsilon_1^e)^Z} \sigma_1 d\epsilon_1^e + \int_0^{(\epsilon_1^p)^Z} \sigma_1 d\epsilon_1^p = \int_0^{(\epsilon_1^p)^Z} \sigma_1 d\epsilon_1^p.$$

Здесь $(\epsilon_1^e)^Z = 0$, $(\epsilon_1^p)^Z = \epsilon_1^Z$.

Запишем теперь второе равенство (3.1.2) с учетом выражения (3.2.1) в виде $rdg = \sigma_1 d\sigma_1 / H$. При растяжении на стадии упрочнения $\sigma_1 > 0$, $d\sigma_1 > 0$, $H > 0$, на стадии разупрочнения $\sigma_1 > 0$, $d\sigma_1 < 0$, $H < 0$. Таким образом, dg больше нуля на всех стадиях деформирования. Следовательно, процесс разупрочнения не противоречит законам термодинамики (диссипация – положительная и возрастающая величина). При разрушении (после разделения на фрагменты) материал теряет способность диссипировать энергию. Поэтому $dg = 0$. Отсюда в момент разрушения $\sigma_1 = 0$ (точка падающей ветви, отвечающая деформации ϵ_1^Z) и $\epsilon = \epsilon_1^p$ ($d\epsilon_1^p = d\epsilon_1$).

Введем еще два параметра. Коэффициент дилатансии (дилатансионное отношение) $\beta = d\epsilon_0^p / d\gamma^p$ [13]. Он определяет скорость изменения неупругой составляющей объемной деформации в зависимости от роста неупругой сдвиговой деформации и характеризует разрыхление материала, сопровождающее сдвиговую деформацию. С учетом равенств (3.1.6)–(3.1.9) этот коэффициент равен

$$\beta = \frac{d\epsilon_0^p}{d\gamma^p} = \frac{G(K - K^p)}{K(G - G^p)} \frac{d\epsilon_0}{d\gamma} = \frac{1}{3} \frac{E(1 - 2\nu^p) - E^p(1 - 2\nu)}{E(1 + \nu^p) - E^p(1 + \nu)}.$$

Коэффициент неупругой (остаточной) поперечной деформации зададим формулой $\eta = -d\epsilon_2^p / d\epsilon_1^p$, которая с учетом равенств (3.1.4) и (3.1.5) принимает вид

$$\eta = \frac{E\nu^p - E^p\nu}{E - E^p}.$$

Р и с. 3.2. Замкнутые циклы деформирования по напряжениям (LBP) и деформациям (LBC)

3.3. Постулаты Друккера и Ильюшина. Классическая теория деформирования упругопластических материалов опирается на постулат Друккера, который утверждает, что работа дополнительного напряжения на замкнутом цикле по напряжениям должна быть неотрицательна [3]. Возьмем на диаграмме деформирования произвольную точку L с координатами (ϵ_1, σ_1) (рис. 3.2). Произведем деформирование по замкнутому по напряжениям пути LBP, причем $d\epsilon_1 = LK = NM$ настолько мало, что точка B, лежащая на касательной, построенной в точке L, практически расположена и на самой диаграмме. Работа напряжения при этом равна площади

$$\begin{aligned} S_{LBP} + S_{LPRN} &= S_{LKMN} + S_{LBK} - S_{KPRM} - S_{BPK} = \\ &= \sigma_1 d\epsilon_1 + \frac{1}{2} E^p d\epsilon_1 d\epsilon_1 - \frac{1}{2} \frac{1}{E} (E^p d\epsilon_1)^2 - \sigma_1 \frac{1}{E} E^p d\epsilon_1 = \\ &= \sigma_1 \left(1 - \frac{E^p}{E}\right) d\epsilon_1 + \frac{1}{2} E^p d\epsilon_1 \left(1 - \frac{E^p}{E}\right) d\epsilon_1 = \sigma_1 d\epsilon_1^p + \frac{1}{2} d\sigma_1 d\epsilon_1^p = dA_p + \frac{1}{2} d\sigma_1 d\epsilon_1^p. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Первое слагаемое есть величина положительная (см. пп. 3.1 и 3.2). Из постулата Друккера следует, что и второе слагаемое должно быть положительным, т.е. $d\sigma_1 d\epsilon_1^p \geq 0$. С учетом формулы (3.2.1) это неравенство принимает вид $d\sigma_1 d\epsilon_1^p = H d\epsilon_1^p d\epsilon_1^p \geq 0$. Очевидно, что данный постулат выполняется при упрочнении ($H \geq 0$) и не выполняется при разупрочнении ($H < 0$). Однако это обстоятельство не является препятствием для построения теории деформирования упругопластических разупрочняющихся сред, так как постулат Друккера не вытекает из зако-

нов термодинамики. На требование его выполнения следует смотреть как на определение классов устойчивых материалов и путей нагружения [10,14].

Действительно, выражение (3.3.1) представляет собой два первых члена разложения в ряд Тейлора приращения функции полной работы на пластических деформациях $A_p(\epsilon_1^p)$, т.е.

$$\Delta A_p \approx dA_p + \frac{1}{2} d^2 A_p = \frac{\partial A_p}{\partial \epsilon_1^p} d\epsilon_1^p + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_p}{\partial (\epsilon_1^p)^2} d\epsilon_1^p d\epsilon_1^p = d\sigma_1 d\epsilon_1^p + \frac{1}{2} H d\epsilon_1^p d\epsilon_1^p.$$

На стадии упрочнения второй дифференциал является здесь положительно определенной квадратичной формой ($H > 0$), а на стадии разупрочнения – отрицательно определенной формой ($H < 0$). То есть функция A_p строго выпуклая (выпуклая вниз) при упрочнении и строго вогнутая (выпуклая вверх) при разупрочнении [16]. Если $H = 0$, то функция A_p имеет точку перегиба.

Составим потенциальную функцию для действующих на элементарный объем сил

$$\Phi(\epsilon_1^p, q) = A_p - A_p^q,$$

где ϵ_1^p играет роль параметра состояния элементарного объема, q – параметр управления

(внешнее растягивающее усилие), $A_p^q = \int_0^{\epsilon_1^p} q d\epsilon_1^p$. В состоянии равновесия

$$d\Phi = \frac{\partial A_p}{\partial \epsilon_1^p} d\epsilon_1^p - q d\epsilon_1^p = 0 \quad (\sigma_1 - q = 0). \text{ Далее } d^2\Phi = d^2 A_p. \text{ Отсюда, если в положении равновесия } d^2 A_p > 0 \text{ (упрочнение), то функция } \Phi \text{ имеет минимум, и данное положение равновесия элементарного объема устойчивое. Когда } d^2 A_p < 0 \text{ (разупрочнение), то функция } \Phi \text{ в данном положении равновесия имеет максимум, и оно неустойчивое [16,17], и возможно лавинообразное возрастание пластических деформаций.}$$

В основу теории деформирования уругопластических материалов, обладающих эффектом деформационного разупрочнения, может быть положен постулат пластичности Ильюшина А.А. [15], который утверждает, что работа напряжения по любой замкнутой по деформациям траектории должна быть неотрицательна.

Произведем деформирование по замкнутому по деформации пути LBC (рис. 3.2). Работа напряжения при этом равна площади треугольника LBC. Имеем

$$\begin{aligned} S_{LBC} &= S_{LKMN} + S_{LBK} - S_{BDM} + S_{CDN} = \\ &= \sigma_1 d\epsilon_1 + \frac{1}{2} E^p d\epsilon_1 d\epsilon_1 - \frac{1}{2E} (\sigma_1 + E^p d\epsilon_1)^2 + \frac{1}{2E} [(\sigma_1 + E^p d\epsilon_1) E^{-1} - d\epsilon_1]^2 = \frac{1}{2} (E - E^p) d\epsilon_1 d\epsilon_1. \end{aligned}$$

Следовательно, из постулата Ильюшина А.А. вытекает неравенство

$$(E - E^p) d\epsilon_1 d\epsilon_1 \geq 0, \quad (3.3.2)$$

удовлетворяющееся как при упрочнении ($E > E^p \geq 0$), так и при разупрочнении ($E^p < 0$).

Далее из определяющих соотношений (3.1.3) следует, что $\sigma_1 = \sigma_1^m - \sigma_1^p$, где $\sigma_1^m = E\epsilon_1$ – мгновенное напряжение, которое при заданной деформации появилось бы в материале, если бы он обладал идеально упругими свойствами, а $\sigma_1^p = E\epsilon_1^p$ – релаксационное напряжение, характеризующее уровень падения напряжения от идеально упругого состояния. Таким образом, при возрастании деформации на величину $d\epsilon_1$ в материале происходит два последовательных процесса. Сначала при сохранении идеально упругих свойств возникает напряжение $d\sigma_1^m = E d\epsilon_1$. Затем за весьма малый промежуток времени происходит его релаксация (энергия диссипирует за счет пластической деформации) на величину $d\sigma_1^p = E d\epsilon_1^p$. Отсюда неравенство (3.3.2) с учетом соотношения (2.1.6) принимает вид

$$d\sigma_1^m d\epsilon_1 - d\sigma_1^p d\epsilon_1 = (d\sigma_1^m - d\sigma_1^p) d\epsilon_1 = d\sigma_1^p d\epsilon_1 \geq 0.$$

Если воспользоваться соотношениями (3.2.2) и (3.2.1), то получим

$$(E - E^p) d\epsilon_1 d\epsilon_1 = E d\epsilon_1 E^p d\epsilon_1 / H = d\sigma_1^m d\epsilon_1^p \geq 0.$$

Отметим, что требование постулата Друккера является более сильным. Он представляет собой лишь достаточное условие для выполнения постулата пластичности. Действительно, пусть выполнен постулат Друккера. Тогда

$$d\sigma_1 d\epsilon_1^p = (d\sigma_1^m - d\sigma_1^p) d\epsilon_1^p = d\sigma_1^m d\epsilon_1^p - d\sigma_1^p d\epsilon_1^p = d\sigma_1^m d\epsilon_1^p - E d\epsilon_1^p d\epsilon_1^p \geq 0.$$

В силу положительности величины $E d\epsilon_1^p d\epsilon_1^p$ для выполнения данного неравенства необходимо как минимум выполнение неравенства $d\sigma_1^m d\epsilon_1^p \geq 0$.

Таким образом, постулат пластичности справедлив для более широкого класса материалов и процессов [14].

3.4. Интенсивность напряжений и деформаций. Запишем приращения интенсивностей напряжений и деформаций для приращений произвольных симметричных тензоров напряжений и деформаций в виде $d\sigma_i = \sqrt{2} B(d\sigma_{ij})/2$, $d\epsilon_i = \sqrt{2} (1 + \nu^p)^{-1} B(d\epsilon_{ij})/2$, где $B(da_{ij}) = \left[(da_{11} - da_{22})^2 + (da_{22} - da_{33})^2 + (da_{33} - da_{11})^2 + 6(da_{12}^2 + da_{13}^2 + da_{23}^2) \right]^{1/2}$. При одноосном растяжении имеем $d\sigma_{11} = d\sigma_1$, $d\epsilon_{11} = d\epsilon_1$, $d\epsilon_{22} = d\epsilon_{33} = d\epsilon_2 = -\nu^p d\epsilon_1$. Остальные компоненты равны нулю. Тогда $d\sigma_i = d\sigma_1$, $d\epsilon_i = d\epsilon_1$, $d\sigma_i = E^p d\epsilon_i$.

Далее интенсивности приращений упругих и пластических составляющих полных деформаций записываются в виде $d\epsilon_i^e = \sqrt{2} (1 + \nu)^{-1} B(d\epsilon_{ij}^e)/2$, $d\epsilon_i^p = \sqrt{2} (1 + \eta)^{-1} B(d\epsilon_{ij}^p)/2$. При одноосном растяжении с учетом равенств $d\epsilon_2^e = d\epsilon_2^p = -\nu d\epsilon_1^e$, $d\epsilon_2^p = d\epsilon_2^p = -\eta d\epsilon_1^p$ получаем $d\epsilon_i^e = d\epsilon_1^e$, $d\epsilon_i^p = d\epsilon_1^p$. Отсюда $d\epsilon_i = d\epsilon_1^e + d\epsilon_1^p$. Тогда $d\epsilon_i^p = (1 - E^p/E) d\epsilon_i$, $d\epsilon_i^e = (E^p/E) d\epsilon_i$.

3.5. Критерий вида разрушения. Различают два основных вида разрушения – отрывом и срезом [18]. При деформировании элементарного объема происходит одновременное развитие этих процессов. Отрыв, как правило, связан с образованием неупругих объемных деформаций, а срез – с образованием неупругих сдвиговых деформаций. Поэтому определение основной тенденции в разрушении может быть связано со сравнительной оценкой скоростей нарастания неупругих объемных и сдвиговых деформаций. Такую оценку позволяет дать параметр

$$\kappa = \frac{d\epsilon_0^p}{d\epsilon_0} \bigg/ \frac{d\gamma^p}{d\gamma}.$$

Если $\kappa > 1$, то доминирует процесс отрыва, при $\kappa < 1$ доминирует срез. Используя выражения (3.1.6) и (3.1.7), находим, что неравенства $\kappa > 1$ и $\kappa < 1$ эквивалентны неравенствам

$$\left(1 - \frac{K^p}{K}\right) > \left(1 - \frac{G^p}{G}\right) \text{ и } \left(1 - \frac{K^p}{K}\right) < \left(1 - \frac{G^p}{G}\right).$$

Подставляя выражения для инкрементальных модулей (2.1.9) и производя преобразования, находим, что при $E^p > 0$ отрыв доминирует при $\nu^p < \nu$, а срез – при $\nu^p > \nu$. В первом случае справедливо неравенство $K/G > K^p/G^p$ ($K^p > 0$, $G^p > 0$). Это неравенство показывает, что сопротивление объемным деформациям уменьшается по сравнению с сопротивлением сдвигу. Во втором случае сопротивление сдвигу уменьшается по сравнению с сопротивлением объемным деформациям. Данный результат не противоречит традиционным представлениям теории пластичности, по которым на стадии упрочнения величина ν^p возрастает, происходит интенсивная пластическая деформация в полосах сдвига, неупругого изменения объема не происходит.

Когда $E^p < 0$ (разупрочнение), то отрыв доминирует при $\nu^p > \nu$, а срез – при $\nu^p < \nu$. В первом случае $(-K^p)/(-G^p) > K/G$ ($K^p < 0$, $G^p < 0$), т.е. величина K^p уменьшается по сравнению с величиной G^p . Возрастание объемной деформации приводит к значительному падению уровня объемных напряжений. Прирост объемных дефектов существенно выше приращения дефектов в полосах сдвига. Отсюда падение уровня касательных напряжений относительно меньшее. Во втором случае наоборот, рост сдвиговой деформации приводит к возникновению множественных дефектов в полосах сдвига, степень интенсивности развития которых выше, чем объемных дефектов. Разрушение при этом реализуется в виде скола.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никитин Л.В. Направления развития моделей упруговязкопластических тел // Механика и научно-технический прогресс. — Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — С. 136–153.
2. Рыжак Е.И. К вопросу об осуществимости однородного закритического деформирования при испытаниях в жесткой трехосной машине // Изв. АН СССР. МТГ., 1991. — № 1. — С. 111–127.
3. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. — М.: Наука, 1971. — 232 с.
4. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. — М.: Мир, 1979. — 302 с.
5. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача. — Новосибирск: Наука, СО. 1983. — 238 с.

6. Стружанов В.В., Миронов В.И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995. — 192 с.
7. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Таишинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. — М.: Наука. Физматлит, 1997. — 288 с.
8. Стружанов В.В., Баиуров Вяч.В., Каримов П.Ф. К определению параметров инкрементального закона пластичности для изотропных сред // Изв. Урал. гос. ун-та. (сер. Математика и механика. Вып. 2), 1999. — № 14 — С. 119–134.
9. Экспериментальные функции сопротивления легированной стали при растяжении и кручении / С.Д. Волков, Ю.П. Гуськов, В.И. Кривошипная и др. // Проблемы прочности, 1979. — Т. 11, № 1. — С. 3–6.
10. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
11. Шевченко Ю.Н. К построению поверхности нагружения в теории пластичности // Прикладная механика, 1996. — Т. 32, № 11. — С. 31–37.
12. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1970. — Т. 2. — 568 с.
13. Райс Д.Р. Об устойчивости дилатантного упрочнения насыщенных скальных массивов // Механика. Новое в зарубежной науке. — Т. 2. Определяющие законы механики грунтов. — М.: Мир, 1975. — С. 195–209.
14. Ильюшин А.А. Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 3–29.
15. Ильюшин А.А. Пластичность. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 271 с.
16. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
17. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987. — 542 с.
18. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии. — Киев: Наукова думка, 1969. — 212 с.

Поступила 27.01.2006 г.

УДК 539.376

Н.Н.Попов, Л.В.Коваленко

ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассмотрена краевая задача о напряженном состоянии стохастически неоднородной полуплоскости $x_2 \geq 0$ в условиях ползучести. Определяющее соотношение ползучести, взятое в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения, сформулировано в стохастической форме. Поставленная задача решается приближенно относительно компонент тензора напряжений σ_{ij} на основе линеаризации по методу малого параметра. Решение линеаризованной задачи получено в виде суммы двух рядов. Первый ряд задает решение вдали от границы полуплоскости без учета краевого эффекта. Члены второго ряда являются функциями координат x_2 , они быстро затухают по мере удаления от границы полуплоскости. Произведено исследование концентрации напряжений, возникающей на границе полуплоскости.

Структурная неоднородность материала обуславливает появление ряда механических эффектов, которые не могут быть изучены в рамках классических детерминированных теорий. Одним из таких эффектов является эффект пограничного слоя. Суть его состоит в том, что вблизи границы структурированного тела имеется пограничный слой, обладающий рядом специфических особенностей. В частности, на границе тела возникает концентрация напряжений, которая может достигать заметной величины. Эффект пограничного слоя для упругих тел был исследован в работах [1–5]. В теории ползучести известны решения стохастических задач для внутренних областей, достаточно удаленных от границы тела [6–9], а влияние стохастических неоднородностей на напряженно-деформированное состояние вблизи поверхности, на которой заданы краевые условия, до настоящего времени практически не изучены.

Пусть к границе стохастически неоднородной полуплоскости $x_2 \geq 0$, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, приложены нагрузки

$$\sigma_{22}|_{x_2=0} = \sigma_{22}^0 = \text{const}, \quad \sigma_{12}|_{x_2=0} = 0, \quad (1)$$

а напряжение σ_{11} удовлетворяет условию макроскопической однородности $\langle \sigma_{11} \rangle = \sigma_{11}^0 = \text{const}$, которое соответствует приложению при $x_1 = \pm h$, где h достаточно велико, постоянных по x_2 напряжений σ_{11}^0 . Здесь и далее угловыми скобками обозначена операция математического ожидания.

Определяющее соотношение ползучести принимается в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения (установившейся ползучести) в стохастической форме [6]