Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Попов, Л. В. Коваленко, Поля напряжений на границе стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 61–66

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu411>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 05:14:49

6. Стружанов В.В., Миронов В.И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995. — 192 с.
7. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Таишинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. — М.: Наука. Физматлит, 1997. — 288 с.
8. Стружанов В.В., Баиуров Вяч.В., Каримов П.Ф. К определению параметров инкрементального закона пластичности для изотропных сред // Изв. Урал. гос. ун-та. (сер. Математика и механика. Вып. 2), 1999. — № 14 — С. 119–134.
9. Экспериментальные функции сопротивления легированной стали при растяжении и кручении / С.Д. Волков, Ю.П. Гуськов, В.И. Кривошипная и др. // Проблемы прочности, 1979. — Т. 11, № 1. — С. 3–6.
10. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
11. Шевченко Ю.Н. К построению поверхности нагружения в теории пластичности // Прикладная механика, 1996. — Т. 32, № 11. — С. 31–37.
12. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1970. — Т. 2. — 568 с.
13. Райс Д.Р. Об устойчивости дилатантного упрочнения насыщенных скальных массивов // Механика. Новое в зарубежной науке. — Т. 2. Определяющие законы механики грунтов. — М.: Мир, 1975. — С. 195–209.
14. Ильюшин А.А. Об основах общей математической теории пластичности // Вопросы теории пластичности. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 3–29.
15. Ильюшин А.А. Пластичность. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 271 с.
16. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
17. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987. — 542 с.
18. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии. — Киев: Наукова думка, 1969. — 212 с.

Поступила 27.01.2006 г.

УДК 539.376

Н.Н.Попов, Л.В.Коваленко

ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассмотрена краевая задача о напряженном состоянии стохастически неоднородной полуплоскости $x_2 \geq 0$ в условиях ползучести. Определяющее соотношение ползучести, взятое в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения, сформулировано в стохастической форме. Поставленная задача решается приближенно относительно компонент тензора напряжений σ_{ij} на основе линеаризации по методу малого параметра. Решение линеаризованной задачи получено в виде суммы двух рядов. Первый ряд задает решение вдали от границы полуплоскости без учета краевого эффекта. Члены второго ряда являются функциями координат x_2 , они быстро затухают по мере удаления от границы полуплоскости. Произведено исследование концентрации напряжений, возникающей на границе полуплоскости.

Структурная неоднородность материала обуславливает появление ряда механических эффектов, которые не могут быть изучены в рамках классических детерминированных теорий. Одним из таких эффектов является эффект пограничного слоя. Суть его состоит в том, что вблизи границы структурированного тела имеется пограничный слой, обладающий рядом специфических особенностей. В частности, на границе тела возникает концентрация напряжений, которая может достигать заметной величины. Эффект пограничного слоя для упругих тел был исследован в работах [1–5]. В теории ползучести известны решения стохастических задач для внутренних областей, достаточно удаленных от границы тела [6–9], а влияние стохастических неоднородностей на напряженно-деформированное состояние вблизи поверхности, на которой заданы краевые условия, до настоящего времени практически не изучены.

Пусть к границе стохастически неоднородной полуплоскости $x_2 \geq 0$, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, приложены нагрузки

$$\sigma_{22}|_{x_2=0} = \sigma_{22}^0 = \text{const}, \quad \sigma_{12}|_{x_2=0} = 0, \quad (1)$$

а напряжение σ_{11} удовлетворяет условию макроскопической однородности $\langle \sigma_{11} \rangle = \sigma_{11}^0 = \text{const}$, которое соответствует приложению при $x_1 = \pm h$, где h достаточно велико, постоянных по x_2 напряжений σ_{11}^0 . Здесь и далее угловыми скобками обозначена операция математического ожидания.

Определяющее соотношение ползучести принимается в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения (установившейся ползучести) в стохастической форме [6]

$$\mathcal{P}_{ij} = cs^{n-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) (1 + \alpha U(x_1, x_2)), \quad (2)$$

где s — интенсивность напряжений:

$$s^2 = \frac{1}{2} (3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}),$$

p_{ij} — компоненты тензора деформаций ползучести, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, δ_{ij} — символ Кронекера, $U(x_1, x_2)$ — случайная однородная функция, описывающая флуктуации реологических свойств материала с математическим ожиданием $\langle U \rangle = 0$ и дисперсией $\langle U^2 \rangle = 1$; c, n, α — постоянные материала, точка означает дифференцирование по времени. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (3)$$

а компоненты тензора скоростей деформаций $\mathcal{P}_{ij}$ — условиям

$$\Lambda_{ij}\Lambda_{kl}\mathcal{P}_{jk,il} = 0, \quad (4)$$

которые получены из уравнений совместности деформаций путем дифференцирования по времени. Здесь Λ_{ij} — единичный антисимметричный псевдотензор.

Соотношения (2)–(4) при краевых условиях (1) задают стохастическую задачу ползучести, которая в дальнейшем решается приближенно относительно напряжений. Частный случай этой задачи рассматривался в работе [9] при условии $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma^0$, что соответствует равномерно-му растяжению полуплоскости вдоль главных осей.

Тензор напряжений σ_{ij} с учетом (1) может быть представлен в виде суммы двух слагаемых

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^*, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0, \quad \langle \sigma_{ij}^* \rangle = 0, \quad (5)$$

где σ_{ij}^* — флуктуации напряжений.

Линеаризация задачи ползучести (2)–(4) была произведена в работе [6]. С целью физической линеаризации функция s^{n-1} была разложена в степенной ряд и в этом разложении были учтены только линейные члены. Для статистической линеаризации определяющего соотношения (2) использовалось корреляционное приближение теории случайных функций, т.е. предполагалось, что произведениями вида $\sigma_{ij}^* \sigma_{kl}^*$, $\alpha U \sigma_{ij}^*$ допустимо пренебречь. В итоге была получена система линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно флуктуаций напряжений:

$$\sigma_{ij,j}^* = 0, \quad (6)$$

$$\sigma_{11,22}^* (2 + k_1 l_1) + \sigma_{22,22}^* (-1 + k_1 l_2) + \sigma_{11,11}^* (-1 + k_2 l_1) + \sigma_{22,11}^* (2 + k_2 l_2) - 6\sigma_{12,12}^* = -\alpha (U_{,22} l_1 + U_{,11} l_2),$$

где $l_1 = 2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0$, $l_2 = 2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0$, $k_i = \frac{(n-1)l_i}{2s_0^2}$, $s_0^2 = (\sigma_{11}^0)^2 + (\sigma_{22}^0)^2 - \sigma_{11}^0 \sigma_{22}^0$.

Краевые условия для системы (6) с учетом (1), (5) имеют вид

$$\sigma_{22}^* \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{12}^* \Big|_{x_2=0} = 0. \quad (7)$$

Если ввести функцию напряжений F для флуктуаций тензора напряжений

$$\sigma_{11}^* = F_{,22}, \quad \sigma_{22}^* = F_{,11}, \quad \sigma_{12}^* = -F_{,12}, \quad (8)$$

то вместо системы уравнений (6) получим единственное дифференциальное уравнение относительно F :

$$F_{,1111} (2 + k_2 l_2) + 2F_{,1122} (2 + k_1 l_2) + F_{,2222} (2 + k_1 l_1) = -\alpha (U_{,22} l_1 + U_{,11} l_2) \quad (9)$$

с краевыми условиями

$$F_{,11} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad F_{,12} \Big|_{x_2=0} = 0. \quad (10)$$

Пусть однородная функция $U(x_1, x_2)$, с помощью которой задается случайное поле возмущений реологических свойств материала, является почти периодической быстро осциллирующей функцией [1]

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} \cos(\omega \beta_s^{(k)} x_s + \phi^{(k)}), \quad (11)$$

где ω — большой параметр, имеющий размерность, обратную длине; $\beta_s^{(k)}$ — безразмерные величины порядка единицы; $A^{(k)}$ — центрированные случайные величины; $\phi^{(k)}$ — случайные величины, распределенные равномерно на участке $(0; 2\pi)$, причем все случайные величины $A^{(k)}$, $\phi^{(k)}$ — независимы. При этом имеем [10]

$$\langle U^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} D[A^{(k)}],$$

где $D[A^{(k)}]$ — дисперсия случайной величины $A^{(k)}$. Отсюда с учетом равенства $\langle U^2 \rangle = 1$ следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} D[A^{(k)}] = 2. \quad (12)$$

Для удобства выкладок целесообразно перейти к комплексным функциям

$$\mathcal{U} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}^{(k)} \exp(i\omega\beta_s^{(k)}x_s), \quad (13)$$

где $\mathcal{A}^{(k)} = A^{(k)} \exp(i\phi^{(k)})$.

Решение краевой задачи (9), (10) можно представить в виде

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} (v^{(k)} + w^{(k)}), \quad (14)$$

где $v^{(k)}$ — частное решение уравнения (9), полученное при замене функции $\mathcal{U}$ k -тым членом разложения (13), а $w^{(k)}$ — решение соответствующего (9) однородного уравнения, удовлетворяющее при $x_2 = 0$ условиям

$$w_{,11}^{(k)} \Big|_{x_2=0} = -v_{,11}^{(k)} \Big|_{x_2=0}, \quad w_{,12}^{(k)} \Big|_{x_2=0} = -v_{,12}^{(k)} \Big|_{x_2=0} \quad (15)$$

В дальнейшем, там, где это не приводит к недоразумениям, верхний индекс будет опускаться.

Функцию v можно искать в виде

$$v = f \exp(i\omega\beta_s x_s), \quad f = \text{const}. \quad (16)$$

После подстановки (16) в (9) для нахождения f получается алгебраическое уравнение

$$\omega^2 \beta_1^4 (2 + k_2 l_2) f + 2\omega^2 \beta_1^2 \beta_2^2 (2 + k_1 l_2) f + \omega^2 \beta_2^4 (2 + k_1 l_1) f = \alpha \mathcal{A} (\beta_2^2 l_1 + \beta_1^2 l_2),$$

из которого следует

$$f = \frac{2\alpha s_0^2}{\omega^2} \cdot \frac{\mathcal{A} (\beta_2^2 l_1 + \beta_1^2 l_2)}{4s_0^2 \beta^4 + n(\beta_2^2 l_1 + \beta_1^2 l_2)^2}, \quad \beta^2 = \beta_1 \beta_2. \quad (17)$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v^{(k)}$ задает решение задачи вдали от границы полуплоскости без учета краевых эффектов. Функция w имеют характер пограничного слоя: она быстро затухает по мере удаления от границы полуплоскости. Ее можно искать в виде

$$w = \phi(x_2) \exp(i\omega\beta_1 x_1), \quad (18)$$

где функция $\phi(x_2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\phi_{,2222} (2 + k_1 l_1) - 2\omega^2 \beta_1^2 \phi_{,22} (2 + k_1 l_2) + \omega^4 \beta_1^4 \phi (2 + k_2 l_2) = 0 \quad (19)$$

с краевыми условиями

$$\phi|_{x_2=0} = -f, \quad \phi_{,2}|_{x_2=0} = -i\omega\beta_2 f. \quad (20)$$

Уравнение (19) получено подстановкой (18) в однородное уравнение, соответствующее (9), а краевые условия получены из условий (15) с использованием выражений (16), (18).

Решение уравнения (19) при $\sigma_{11}^0 \neq \sigma_{22}^0$ имеет вид

$$\phi = \sum_{s=1}^4 C_s \exp(r_s x_2), \quad (21)$$

где C_s — произвольные постоянные, r_s — корни характеристического уравнения

$$(2 + k_1 l_1) r^4 - 2\omega^2 \beta_1^2 (2 + k_1 l_2) r^2 + \omega^4 \beta_1^4 (2 + k_2 l_2) = 0. \quad (22)$$

Решение поставленной задачи при $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma^0$ приведено в работе [9].

Корни характеристического уравнения (22) равны

$$r_{1,2} = -\omega \beta_1 \left(\frac{\sqrt{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}}{\sqrt{2}} \pm i \frac{\sqrt{-a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}}{\sqrt{2}} \right), \quad r_{3,4} = \omega \beta_1 \left(\frac{\sqrt{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}}{\sqrt{2}} \pm i \frac{\sqrt{-a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\text{где } a_1 = \frac{4s_0^2 + (n-1)l_1 l_2}{4s_0^2 + (n-1)l_1^2}, \quad a_2 = \frac{2s_0^0 \sqrt{n-1} |l_1 - l_2|}{4s_0^2 + (n-1)l_1^2}.$$

Из четырех корней характеристического уравнения (22) два корня r_3 и r_4 имеют положительные действительные части. Так как при $x \rightarrow \infty$ краевой эффект должен затухать, то две постоянные, соответствующие этим корням, равны нулю. Для нахождения двух других констант C_1 и C_2 применяются краевые условия (20). Они равны:

$$C_1 = \frac{f(r_2 - i\omega\beta_2)}{r_1 - r_2}, \quad C_2 = -\frac{f(r_1 - i\omega\beta_2)}{r_1 - r_2}.$$

Решение уравнения (21), бесконечно малое при $x_1 \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\phi = \frac{f(r_2 - i\omega\beta_2)}{r_1 - r_2} e^{r_1 x_2} - \frac{f(r_1 - i\omega\beta_2)}{r_1 - r_2} e^{r_2 x_2}. \quad (23)$$

Подставляя выражения (16), (18), (23) в (14) можно найти функцию напряжения

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)} \exp(i\omega\beta_1^{(k)} x_1) \left[\exp(i\omega\beta_2^{(k)} x_2) - \frac{r_2^{(k)} - i\omega\beta_2^{(k)}}{r_2^{(k)} - r_1^{(k)}} \exp(r_1^{(k)} x_2) + \frac{r_1^{(k)} - i\omega\beta_2^{(k)}}{r_2^{(k)} - r_1^{(k)}} \exp(r_2^{(k)} x_2) \right].$$

Теперь, используя соотношения (8), решение краевой задачи (6), (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* &= \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)} \exp(i\omega\beta_1^{(k)} x_1) \left[-\omega^2 (\beta_2^{(k)})^2 \exp(i\omega\beta_2^{(k)} x_2) - \frac{(r_1^{(k)})^2 (r_2^{(k)} - i\omega\beta_2^{(k)})}{r_2^{(k)} - r_1^{(k)}} \exp(r_1^{(k)} x_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(r_2^{(k)})^2 (r_1^{(k)} - i\omega\beta_2^{(k)})}{r_2^{(k)} - r_1^{(k)}} \exp(r_2^{(k)} x_2) \right], \\ \sigma_{22}^* &= \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)} \omega^2 (\beta_1^{(k)})^2 \exp(i\omega\beta_1^{(k)} x_1) \left[-\exp(i\omega\beta_2^{(k)} x_2) - \frac{r_2^{(k)} - i\omega\beta_2^{(k)}}{r_2^{(k)} - r_1^{(k)}} \exp(r_1^{(k)} x_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_1^{(k)} - i\omega\beta_2^{(k)}}{r_2^{(k)} - r_1^{(k)}} \exp(r_2^{(k)} x_2) \right], \\ \sigma_{12}^* &= \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)} \omega \beta_1^{(k)} \exp(i\omega\beta_1^{(k)} x_1) \left[-\omega \beta_2^{(k)} \exp(i\omega\beta_2^{(k)} x_2) - \frac{i r_1^{(k)} (r_2^{(k)} - i\omega\beta_2^{(k)})}{r_2^{(k)} - r_1^{(k)}} \exp(r_1^{(k)} x_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i r_2^{(k)} (r_1^{(k)} - i\omega\beta_2^{(k)})}{r_2^{(k)} - r_1^{(k)}} \exp(r_2^{(k)} x_2) \right]. \quad (24) \end{aligned}$$

Используя решение краевой задачи (24), можно найти статистические характеристики случайного поля напряжений в любой точке полуплоскости.

Дальнейшие расчеты будут производиться при условии, что все величины $\beta_i^{(k)}$ равны единице. При этом условии случайное поле U , заданное разложением (11), можно считать приблизительно изотропным [1].

Проведем исследование концентрации напряжений на границе полуплоскости $x_2 = 0$. Согласно граничным условиям (7)

$$\sigma_{22}^*(0) = \sigma_{22}^* \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{12}^*(0) = \sigma_{12}^* \Big|_{x_2=0} = 0,$$

а первая из формул (24) при $x_2 = 0$ дает $\left(\beta_i^{(k)} = 1\right)$:

$$\sigma_{11}^*(0) = \exp(i\omega x_1)(-\omega^2 + r_1 r_2 - i\omega(r_1 + r_2)) \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)},$$

Последнее выражение после подстановки постоянной $f^{(k)}$ (формула (17)) и корней r_1 и r_2 характеристического уравнения (22) преобразуется к виду

$$\sigma_{11}^*(0) = \frac{2\alpha s_0^2(l_1 + l_2)}{16s_0^2 + (n-1)(l_1 + l_2)^2} \exp(i\omega x_1) \left(-1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + i\sqrt{2} \left(\sqrt{a_1 + \sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right) \right) \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}.$$

Дисперсия напряжения σ_{11} на границе полуплоскости $x_2 = 0$ с учетом формулы (12) выражается следующим образом

$$D_{11}(0) = \left\langle \left| \sigma_{11}^*(0) \right|^2 \right\rangle = \frac{8\alpha^2 s_0^4 (l_1 + l_2)^2}{\left(16s_0^2 + (n-1)(l_1 + l_2)^2 \right)^2} (1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1),$$

а при $x \rightarrow \infty$ она равна

$$D_{11}(\infty) = \frac{8\alpha^2 s_0^4 (l_1 + l_2)^2}{\left(16s_0^2 + (n-1)(l_1 + l_2)^2 \right)^2}.$$

Концентрация напряжений, возникшая на границе полуплоскости $x_2 = 0$, определяется коэффициентом изменчивости среднего квадратического отклонения:

$$\rho = \frac{\sqrt{D_{11}(0)}}{\sqrt{D_{11}(\infty)}} = \sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1}.$$

В таблице 1 приведены значения коэффициента изменчивости ρ в зависимости от степени нелинейности n и параметра нагружения $h = \frac{\sigma_{11}^0}{\sigma_{22}^0}$. Для упругой полуплоскости величина ρ приведена в работе [2] при коэффициенте Пуассона равным 0,25 и $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0$ (соответствует параметру $h = 1$). Она равна 1,55.

Т а б л и ц а 1

Значения коэффициента изменчивости ρ напряжения σ_{11}

$\begin{matrix} h \\ n \end{matrix}$	0	0,25	0,5	1	2	4
1	2	2	2	2	2	2
3	1,22	1,46	1,68	2	2,15	2,05
5	1	1,25	1,52	2	2,30	2,09
7	0,89	1,13	1,42	2	2,43	2,12
9	0,82	1,06	1,36	2	2,56	2,15

В таблице 2 приведены в зависимости от переменных α и n значения коэффициента вариации $d_{11} = \frac{\sqrt{D_{11}(0)}}{\sigma_{11}^0} 100\%$ на границе полуплоскости $x_2 = 0$ при $h = 2$. При этом значении h , как

Т а б л и ц а 2

Значения коэффициента вариации напряжения σ_{11} на границе полуплоскости

$\begin{matrix} n \\ \alpha \end{matrix}$	1	3	5	7	9
0,05	5,30	4,92	4,61	4,36	4,14
0,1	10,61	9,84	9,23	8,71	8,28
0,2	21,21	19,69	18,45	17,42	16,55
0,3	31,82	29,53	27,68	26,14	24,83
0,4	42,43	39,37	36,91	34,85	33,10
0,5	53,03	49,22	46,13	43,56	41,38

следует из таблицы 1, величина d_{11} принимает наибольшее значение (при фиксированных α и n). Как видно из таблицы 2, для материалов с высоким показателем нелинейности ($n = 9$) коэффициент вариации находится в пределах от 4,14% ($\alpha = 0,05$) до 41,38% ($\alpha = 0,5$). В случае низких показателей нелинейности, когда возможна полная физическая линеаризация закона ползучести ($n = 1$) разброс напряжения σ_{11} около среднего значения больше: здесь d_{11} заключена в пределах от 5,30% до 53,03%.

Таким образом, в поверхностном слое флуктуации напряжения σ_{11} достигают заметных величин, которые могут быть значительно больше, чем для глубинных слоев.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. — М.: Наука, 1970. — 137с.
2. Ломакин В. А., Шейнин В. И. Концентрация напряжений на границе случайно-неоднородного упругого тела // Изв. АН СССР. МТТ, 1974. — № 2. — С. 124–130.
3. Подалков В. В., Романов В. А. Концентрация напряжений на границе микронеоднородного упругого полупространства // ПММ, 1978. — Т. 42, Вып. 3. — С. 540–545.
4. Подалков В. В., Романов В. А. Деформация упругого анизотропного микронеоднородного полупространства // ПММ, 1983. — Т. 47, Вып. 3. — С. 455–461.
5. Архипов Н. В. Задача о деформировании микронеоднородного цилиндра // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика, 1984. — № 3. — С. 50–54.
6. Кузнецов В. А. Ползучесть стохастически неоднородных сред в условиях плоского напряженного состояния // Математическая физика. — Куйбышев: КнТИ, 1976. — С. 69–74.
7. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // ПМТФ, 1985. — № 2. — С. 150–155.
8. Попов Н. Н., Должковой А. А. Нелинейная задача о деформировании стохастически неоднородной плоскости // Математические модели и краевые задачи: Тр. 13 межвуз. конф. Ч. 1. — Самара: СамГТУ, 2003. — С.148–154.
9. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // ПМТФ, 1988. — № 1. — С. 159–164.
10. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории вероятностей. — М.: Радио и связь, 1983. — 416 с.

Поступила 24.12.2005 г.

УДК 539.214; 539.374

Е. П. Кочеров, А. И. Хромов

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СОСТОЯНИЯ И РАЗРУШЕНИЕ ИДЕАЛЬНЫХ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Деформационные состояния идеально жесткопластического тела изображаются точками в пространстве главных деформаций и образуют для несжимаемых тел гиперболическую поверхность третьего порядка. Деформационные процессы изображаются линиями на этой поверхности. Рассматриваются простые процессы деформирования, когда главные направления тензоров скоростей деформаций и конечных деформаций Альманси совпадают. Показано, что простые процессы деформирования описывают все возможные непрерывные кривые, лежащие на поверхности деформационных состояний. Вместе с этим непрерывные кривые деформирования отображают и другие сложные процессы деформирования, связанные с изменением взаимного положения осей тензоров скоростей деформаций и конечных деформаций, при реализации которых требуются различные удельные диссипации энергии. Формулируются деформационно-энергетические критерии разрушения пластических тел с учетом диссипации энергии в процессе деформирования.

1. Основные соотношения. Запишем ассоциированный закон течения

$$\epsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \text{ или } \epsilon_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_i}, \quad \lambda > 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i}),$$

где $f(\sigma_{ij})$ — функция текучести; $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ — тензоры напряжений и скоростей деформаций; V_i — вектор скорости перемещений.