Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. П. Кочеров, А. И. Хромов, Деформационные состояния и разрушение идеальных жесткопластических тел, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 66–71

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu412>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:04:06

следует из таблицы 1, величина d_{11} принимает наибольшее значение (при фиксированных α и n). Как видно из таблицы 2, для материалов с высоким показателем нелинейности ($n = 9$) коэффициент вариации находится в пределах от 4,14% ($\alpha = 0,05$) до 41,38% ($\alpha = 0,5$). В случае низких показателей нелинейности, когда возможна полная физическая линеаризация закона ползучести ($n = 1$) разброс напряжения σ_{11} около среднего значения больше: здесь d_{11} заключена в пределах от 5,30% до 53,03%.

Таким образом, в поверхностном слое флуктуации напряжения σ_{11} достигают заметных величин, которые могут быть значительно больше, чем для глубинных слоев.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. — М.: Наука, 1970. — 137с.
2. Ломакин В. А., Шейнин В. И. Концентрация напряжений на границе случайно-неоднородного упругого тела // Изв. АН СССР. МТТ, 1974. — № 2. — С. 124–130.
3. Подалков В. В., Романов В. А. Концентрация напряжений на границе микroneоднородного упругого полупространства // ПММ, 1978. — Т. 42, Вып. 3. — С. 540–545.
4. Подалков В. В., Романов В. А. Деформация упругого анизотропного микroneоднородного полупространства // ПММ, 1983. — Т. 47, Вып. 3. — С. 455–461.
5. Архипов Н. В. Задача о деформировании микroneоднородного цилиндра // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика, 1984. — № 3. — С. 50–54.
6. Кузнецов В. А. Ползучесть стохастически неоднородных сред в условиях плоского напряженного состояния // Математическая физика. — Куйбышев: КнТИ, 1976. — С. 69–74.
7. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // ПМТФ, 1985. — № 2. — С. 150–155.
8. Попов Н. Н., Должковой А. А. Нелинейная задача о деформировании стохастически неоднородной плоскости // Математические модели и краевые задачи: Тр. 13 межвуз. конф. Ч. 1. — Самара: СамГТУ, 2003. — С.148–154.
9. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // ПМТФ, 1988. — № 1. — С. 159–164.
10. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории вероятностей. — М.: Радио и связь, 1983. — 416 с.

Поступила 24.12.2005 г.

УДК 539.214; 539.374

Е. П. Кочеров, А. И. Хромов

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СОСТОЯНИЯ И РАЗРУШЕНИЕ ИДЕАЛЬНЫХ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Деформационные состояния идеально жесткопластического тела изображаются точками в пространстве главных деформаций и образуют для несжимаемых тел гиперболическую поверхность третьего порядка. Деформационные процессы изображаются линиями на этой поверхности. Рассматриваются простые процессы деформирования, когда главные направления тензоров скоростей деформаций и конечных деформаций Альманси совпадают. Показано, что простые процессы деформирования описывают все возможные непрерывные кривые, лежащие на поверхности деформационных состояний. Вместе с этим непрерывные кривые деформирования отображают и другие сложные процессы деформирования, связанные с изменением взаимного положения осей тензоров скоростей деформаций и конечных деформаций, при реализации которых требуются различные удельные диссипации энергии. Формулируются деформационно-энергетические критерии разрушения пластических тел с учетом диссипации энергии в процессе деформирования.

1. Основные соотношения. Запишем ассоциированный закон течения

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \text{ или } \varepsilon_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_i}, \quad \lambda > 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i}),$$

где $f(\sigma_{ij})$ — функция текучести; $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — тензоры напряжений и скоростей деформаций; V_i — вектор скорости перемещений.

Будем рассматривать идеальное жесткопластическое тело [1] при условии текучести

$$f(\sigma_i) = 0,$$

удовлетворяющему условию несжимаемости

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \quad (2)$$

и, например, условиям Мизеса или Треска – Сен-Венана.

В качестве меры деформаций будем использовать тензоры конечных деформаций Коши C_{ij} и Альманси E_{ij}

$$C_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j}, \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - C_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где X_i, x_i — соответственно лагранжевы и эйлеровы координаты.

Тензоры E_{ij} и ε_{ij} связаны соотношением

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{dE_{ij}}{dt} + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{ij}, \quad (4)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} V_k$.

2. Деформационные состояния идеального жесткопластического тела. Идеальное жесткопластическое тело является несжимаемым. Условие несжимаемости можно записать в виде:

$$\det H_{ij} = 1, \quad (5)$$

где $H_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ — пространственный градиент деформаций.

Рассмотрим тензор деформаций Коши

$$C = H_c H, \quad (6)$$

который определяет меру деформаций в виде квадрата бесконечно малого расстояния в деформированной конфигурации

$$(dx)^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j \quad (7)$$

или в недеформированной конфигурации —

$$(dX)^2 = \delta_{ij} dX_i dX_j = C_{ij} dx_i dx_j, \quad (8)$$

Квадратичная форма (8) должна быть положительно определенной, поэтому главные значения C_i тензора C_{ij} должны быть положительными:

$$C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \quad C_3 > 0. \quad (9)$$

Таким образом, в пространстве главных деформаций C_i действительные деформированные состояния описываются первым октантом. Согласно свойствам определителей

$$\det C = \det(H_c H) = 1.$$

Поэтому главные значения тензора Коши для идеального жесткопластического тела должны быть связаны соотношением

$$C_1 C_2 C_3 = 1, \quad (10)$$

которое с учетом (9) определяет в пространстве C_i гиперболическую поверхность третьего порядка $\mathcal{E}$, расположенную в первом октанте. Она представлена на рис. 1 сечениями плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Тензор деформаций Коши C_{ij} связан с тензором конечных деформаций Альманси E_{ij} (3) соотношением

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - C_{ij}), \quad C_1 = 1 - 2E_1, \quad C_2 = 1 - 2E_2, \quad C_3 = 1 - 2E_3. \quad (11)$$

Согласно (11), пространство главных значений тензора Альманси получается из пространства главных значений тензора Коши сменой координатных направлений C_i на противоположные, изменением масштаба и переносом начала координат в точку $O_1(1,1,1)$ (рис. 1). Поверхность $\mathcal{E}$ изображает все возможные деформационные состояния идеального же-

сткопластического тела при условии несжимаемости. Точка O_1 изображает исходное недеформированное состояние.

Р и с. 1. Деформационная поверхность в пространстве главных напряжений

Р и с. 2. Проекция линий уровня $E_1+E_2+E_3=h$ на девиаторную плоскость

Уравнение поверхности $\mathcal{E}$ в пространстве E_i имеет вид

$$(1-2E_1)(1-2E_2)(1-2E_3)=1 \quad (12)$$

или

$$-I_E + 2II_E - 4III_E = 0, \quad (13)$$

$$I_E = E_1 + E_2 + E_3, \quad II_E = E_1E_2 + E_1E_3 + E_2E_3, \quad III_E = E_1E_2E_3.$$

Уравнение (13) задает возможные деформированные состояния в пространстве главных инвариантов тензора E_{ij} в виде плоскости.

Рассмотрим проекцию поверхности $\mathcal{E}$ на девиаторную плоскость с нормалью, равнонаклоненной к осям E_i (рис. 2), на которой представлены проекции линий уровня (линий пересечения поверхности $\mathcal{E}$ с плоскостью, параллельной девиаторной плоскости, расположенной на расстоянии h до начала координат ($h = (E_1 + E_2 + E_3)/\sqrt{3}$)).

Поверхность $\mathcal{E}$ обладает симметрией относительно трех плоскостей проходящих через координатные оси и линию равнонаклоненную к осям координат, что следует из симметрии уравнения (12) относительно E_1, E_2, E_3 .

Будем изображать процессы деформирования частиц идеального жесткопластического материала линиями L расположенными на поверхности $\mathcal{E}$ (рис. 2).

3. Простые процессы деформирования. Рассмотрим поле скоростей вида

$$V_1 = x_1 \epsilon_1(t), \quad V_2 = x_2 \epsilon_2(t), \quad V_3 = x_3 \epsilon_3(t). \quad (14)$$

Из (14) компоненты тензора скоростей деформаций определяются в виде

$$\epsilon_{11} = \epsilon_1(t), \quad \epsilon_{22} = \epsilon_2(t), \quad \epsilon_{33} = \epsilon_3(t), \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0, \quad (15)$$

т.е. $\epsilon_i(t)$ — главные значения тензора скоростей деформаций в выбранной декартовой системе координат.

Деформирование в поле скоростей (14) можно рассматривать как процесс однородного деформирования прямоугольного параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям. При этом три грани движутся вдоль координатных осей со скоростями $V_i(t)$ соответственно, а три других остаются в координатных плоскостях.

Рассматриваются квазистатические процессы, в которых физическое время не учитывается, и время t является параметром, поэтому из трех функций $\epsilon_i(t)$ одну можно задать произвольно, например, $\epsilon_1(t) \equiv 1$. В этом случае из (2) следует

$$\epsilon_1(t) = 1, \quad \epsilon_2 = -1 - \epsilon_3(t), \quad (16)$$

и только одна функция $\varepsilon_3(t)$ определяет процесс деформирования в пространстве E_i (линию на поверхности $\mathcal{E}$).

При условии (14) уравнения (4) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{dE_{11}}{dt} + (2E_{11} - 1)\varepsilon_1(t) &= 0, \quad \frac{dE_{22}}{dt} + (2E_{22} - 1)\varepsilon_2(t) = 0, \quad \frac{dE_{33}}{dt} + (2E_{33} - 1)\varepsilon_3(t) = 0, \\ \frac{dE_{12}}{dt} + E_{12}\varepsilon_2(t) &= 0, \quad \frac{dE_{13}}{dt} + E_{13}\varepsilon_3(t) = 0, \quad \frac{dE_{23}}{dt} + E_{23}\varepsilon_3(t) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть деформационный процесс начинается из недеформированного состояния (точка O_1 на рис. 1, 2):

$$E_{ij}|_{t=0} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (18)$$

Система уравнений (17) при начальных условиях (18) имеет решения

$$\begin{aligned} E_{12} = E_{13} = E_{23} &\equiv 0, \\ E_i &= \frac{1}{2} \left(1 - e^{\tau_i(t)} \right), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\tau_i(t) = -2 \int_0^t \varepsilon_i(t) dt$.

Из (19) следует, что главные направления тензоров E_{ij}, ε_{ij} совпадают в любой момент времени с направлением координатных осей.

Уравнения (19) с учетом (16) можно записать в виде

$$E_1 = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2t} \right), \quad E_2 = \frac{1}{2} \left(1 - e^{2t - \tau_3(t)} \right), \quad E_3 = \frac{1}{2} \left(1 - e^{\tau_3(t)} \right). \quad (20)$$

Функция $\varepsilon_3(t)$ должна быть интегрируемой и может иметь точки разрыва первого рода. Пусть в момент времени $t = t_*$ функция $\varepsilon_3(t)$ имеет разрыв

$$[\varepsilon_3(t_*)] = \varepsilon_3^+(t_*) - \varepsilon_3^-(t_*). \quad (21)$$

Значениям $\varepsilon_3^+(t_*)$ и $\varepsilon_3^-(t_*)$ соответствуют следующие векторы приращения деформаций в пространстве E_3 , лежащие в касательной плоскости к поверхности $\mathcal{E}$:

$$dE^\pm = i e^{-2t_*} + j \left[1 + \varepsilon_3^\pm \right] e^{2t_* - \tau_3(t_*)} + k \varepsilon_3^\pm(t_*) e^{\tau_3(t_*)}, \quad (22)$$

где i, j, k — единичные векторы системы координат E_i .

Угол между векторами dE^- и dE^+ определяется соотношением

$$\cos \varphi = \frac{dE^+ \cdot dE^-}{|dE^+| \cdot |dE^-|}.$$

Изменение значения $[\varepsilon(t_*)]$ определяет угол φ в интервале $[0, \pm\pi]$, в частности, при

$$[\varepsilon_3] = \frac{A(\varepsilon_3^- - 1)}{B^2 \left[(\varepsilon_3^-)^2 - 1 \right] - AB - A^2}, \quad A = e^{-4\tau_3(t_*)}, \quad B = e^{4t_*}.$$

Вектора dE^- и dE^+ имеют противоположное направление.

Указанное замечание означает, что выбор функции $\varepsilon_3(t)$ определяет все возможные непрерывные кривые деформирования на поверхности $\mathcal{E}$. Вместе с этим, каждой непрерывной кривой будут соответствовать и другие деформационные процессы, происходящие в условиях несовпадения главных направлений тензоров E_{ij} и ε_{ij} .

4. Частные случаи деформационных процессов. Осесимметричная деформация реализуется при условии

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t), \quad E_3(t) \equiv E_2(t). \quad (23)$$

Р и с. 3. Схема простого деформирования

Условию (23) будет соответствовать кривая сечения поверхности $\mathcal{E}$ с плоскостью, проходящей через ось E_1 и нормаль к девиаторной плоскости. Ее проекция на девиаторную плоскость будет совпадать с проекцией оси x_1 (рис. 2)

В частном случае осесимметричная деформация может происходить при постоянных значениях ϵ_i , например при $\epsilon_3 = 1$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -\frac{1}{2}$. Это условие соответствует процессу деформирования цилиндрического образца при одноосном растяжении.

При $\epsilon_3 = -1$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{2}$ определяется процесс одноосного сжатия цилиндрического образца.

Плоская деформация реализуется при

$$\epsilon_3(t) \equiv 0, \quad E_3(t) \equiv 0. \quad (24)$$

Условию (24) будет соответствовать кривая сечения поверхности $\mathcal{E}$ координатной плоскостью $E_3 = 0$. Ее проекцией на девиаторную плоскость будет кривая L_1 (рис. 2).

Плоская деформация также может происходить при постоянных ϵ_i . При $\epsilon_3 = 0$, $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = -1$ определяются процессы растяжения и сжатия образцов при плоской деформации.

Плоская деформация может происходить на поверхностях разрыва скоростей перемещений, в центре веера линий скольжения [5]. Эти процессы изображены пунктирной линией.

Возможны и другие процессы деформирования в условиях плоской деформации.

Пусть до некоторого момента времени t_* деформирование происходило в условиях осесимметричной деформации (прямая, совпадающая с проекцией оси $E_1 - AB$, рис. 2), а при $t > t_*$ деформирование осуществляется в условиях плоской деформации при $E_1 = \text{const}$ (пунктирная кривая BC , рис. 2). Аналогичный процесс подробно описан в [5] при рассмотрении одноосного растяжения цилиндрического образца с разрушением: первый этап накопления деформаций соответствует простому деформированию в однородном поле скоростей перемещений, второй этап описывает деформации частиц на поверхности разрыва скоростей перемещений в вершине трещины.

С точки зрения геометрии поверхности $\mathcal{E}$ интерес представляют линии уровня $I_E = \text{const}$:

$$\begin{cases} (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1, \\ E_1 + E_2 + E_3 = h. \end{cases} \quad (25)$$

Деформационные процессы, соответствующие этим линиям, также могут быть реализованы при простом деформировании выбором соответствующей функции $\epsilon_3(t)$. Этим линиям уровня можно поставить в соответствие семейство ортогональных к ним меридиональных кривых, соответствующих деформационным процессам, начинающихся из недеформированного состояния (точка O_1 , рис. 1,2).

5. Условия разрушения. С точки зрения идеального жесткопластического тела условия разрушения должны содержать величины, входящие в определяющие уравнения модели, такие как тензоры деформаций, напряжений, производные по пространственным переменным и времени:

$$\hat{O}_k(E_{ij}, \epsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \dots) = 0, \quad k = 1, \dots, N,$$

где $\hat{O}_k$ — изотропные функции тензорных аргументов, N определяется моделью разрушения.

Стандартные экспериментальные исследования по растяжению плоских и цилиндрических образцов показывают, что разрушения материалов происходит при определенных деформациях. При этом экспериментально определяемые характеристики разрушения (δ , ψ — относительное удлинение и сужение образца при разрушении) могут служить основой для вычисления соответствующих значений E_i^* (см. [5]). Эти эксперименты определяют минимальную систему точек на поверхности $\mathcal{E}$, которая может быть аппроксимирована некоторой кривой вида

$$\begin{cases} \hat{O}(E_1, E_2, E_3) = 0, \\ (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1. \end{cases} \quad (26)$$

Это позволяет постулировать: при пересечении кривой, соответствующей процессу деформирования, линии (26) происходит разрушение материала

В качестве аппроксимирующих кривых естественный интерес представляют линии уровня (25), так как эти линии всегда пересекаются меридиональными процессами деформирования и, в частности, кривыми, соответствующими стандартным испытаниям на одноосное растяжение–сжатие. Поэтому положение кривой (25) с определенной степенью приближения может быть определено экспериментально для каждого конструкционного материала.

Вместе с тем из опыта известно, что даже при небольших циклически изменяющихся пластических деформациях происходит разрушение практически всех материалов. Поэтому в уравнениях (26) должны быть включены параметры, учитывающие историю деформирования частиц материала. Одним из основных параметров истории деформирования является удельная диссипация энергии

$$D = \int \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dt ,$$

совершенная частицей. Уравнения (26) при этом примут вид

$$\begin{cases} \dot{O}(E_1, E_2, E_3, D) = 0, \\ (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1 \end{cases} \quad (27)$$

или в частном случае

$$\begin{cases} E_1 + E_2 + E_3 = h(D), \\ (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1. \end{cases} \quad (28)$$

Уравнения (28) означают, что критическая линия уровня, определяющая момент разрушения каждой частицы, приближается к недеформированному состоянию в процессе пластического деформирования соответственно диссипации энергии. Функция $h(D)$ должна определяться экспериментально.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. — Владивосток: Дальнаука, 1998. — 529 с.
2. Хромов А. И. Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жесткопластических тел// Доклады РАН, 1998. — Т. 362, № 2. — С. 202–205.
3. Козлова О. В., Хромов А. И. Константы разрушения для идеальных жесткопластических тел// Доклады РАН, 2002. — Т. 385, № 3. — С. 342–345.
4. Хромов А. И. Разрушение жесткопластических тел, константы разрушения//Известия РАН. МТТ. 2005. № 3. С. 137–152.
5. Хромов А. И., Козлова О. В. Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения. — Владивосток: Дальнаука, 2005. — 159 с.
6. Хромов А. И. Деформация и разрушение жесткопластической полосы при растяжении// Известия РАН. МТТ, 2000. — № 1. — С. 136–142.

Поступила 17.01.2006 г.