Общероссийский математический портал

Ю. И. Кадашевич, С. П. Помыткин, А. М. Пейсахов, Влияние формы задания градиента деформаций на решение задач эндохронной теории неупругости при конечных деформациях, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 82–85

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu415>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 08:31:54

Ю.И.Кадашев, С.П.Помыткин, А.М.Пейсахов

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ЗАДАНИЯ ГРАДИЕНТА ДЕФОРМАЦИЙ НА РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ НЕПРУГОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В рамках эндохронной теории неупругости, учитывающей конечные деформации, анализируется влияние формы градиента деформаций и начальных условий для его компонент на тип решения задач жесткого нагружения.

В работе [1] авторы предложили новый подход к построению теории ползучести эндохронного типа, учитывающей конечные деформации. В предлагаемой работе дается расширение теории, которое позволяет описать ряд экспериментальных данных, опубликованных в литературе.

Исследуется основной вариант эндохронной теории неупругости для конечных деформаций в виде:

$$\begin{aligned} a t s + s |r| &= 2G \left(t r + \frac{r}{g+a} |r| \right), \\ e &= D, \quad \Omega = \dot{Q} Q^T, \\ \dot{e} + e \Omega - \Omega e &= \dot{e}^*, \quad \dot{s} + s \Omega - \Omega s = \dot{s}^*, \\ r &= e - (1-a) \frac{s}{2G}, \\ t &= t(|r|, |\dot{r}|), \quad |\dot{r}| = \sqrt{\frac{dr}{dt} : \frac{dr}{dt}}. \end{aligned} \quad (1)$$

В соотношения (1) в безындексной форме записи входят: a – параметр эндохронности, t – аналог деформационного предела текучести, s , e , r – девиаторы тензоров напряжений, деформаций и вспомогательного параметрического тензора, G – модуль сдвига, g – аналог коэффициента упрочнения, Q – ортогональный тензор поворота, Ω – спин, D – тензор скоростей деформаций. Кроме того, здесь используется, что $e_{ii} = s_{ii}/K$, $D = (L + L^T)/2$, $L = \dot{F} F^{-1}$, $Q = F u^{-1}$ – полярное разложение ортогонального тензора поворота, F – градиент деформаций; L – скорость градиента деформаций, u – правый тензор удлинения, K – объемный модуль.

При постановке и решении задач сложного нагружения необходимо четко сформулировать вид градиента деформаций F , его начальные значения и форму ортогонального тензора поворота Q . В работе [1] был рассмотрен вариант теории, в котором градиент деформации имел вид:

$$F = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix},$$

$$k_{11}(0) = k_{22}(0) = k_{33}(0) = 1, \quad k_{21}(0) = k_{31}(0) = k_{32}(0) = 0.$$

Предположим теперь, что форма градиента деформаций имеет структуру

$$F = \begin{pmatrix} k_{11} & m_1 k_{21} & m_2 k_{31} \\ k_{21} & k_{22} & m_3 k_{32} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix},$$

где m_1 , m_2 , m_3 – постоянные параметры, характеризующие исходные свойства материала, и рассмотрим два примера, которые позволяют оценить новые возможности теории.

Предположим, что градиент деформаций таков, что

$$F = \begin{pmatrix} a_1 & mb & 0 \\ b & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \Delta = a_1 a_2 - mb^2, F^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_2 & -mb & 0 \\ -b & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta/a_3 \end{pmatrix},$$

тогда ортогональный тензор поворота будет иметь структуру:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos b & \sin b & 0 \\ -\sin b & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что в этом случае

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 a_2 - mb \dot{b} &= \Delta \cdot D_{11}, \quad \dot{a}_2 a_1 - mb \dot{b} = \Delta \cdot D_{22}, \quad D_{23} = D_{13} = 0, \\ \frac{\dot{a}_3}{a_3} &= D_{33}, \quad \dot{b}(a_2 + ma_1) - b(\dot{a}_2 + m\dot{a}_1) = 2 \cdot \Delta \cdot D_{12}. \end{aligned}$$

Кроме того, $\operatorname{tg} b = \frac{b(m-1)}{a_1 + a_2}$. В этом классе градиентов решим две задачи (по заданным компонентам тензора скоростей деформации восстанавливаются значения компонент градиента деформаций и компонент ортогонального тензора поворота).

Задача 1. Предположим, что

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = D_{13} = D_{23} = 0, \quad D_{12} = 1, \quad m \neq 0, \quad a_1(0) = 1, \quad a_2(0) = 1, \quad a_3(0) = 1, \quad b(0) = 0.$$

Тогда $a_1 = a_2$, $a_1^2 = mb^2 + 1$, $a_3 = 1$. Нетрудно проверить, что при $m = k^2$, задача имеет решение:

$$\begin{aligned} a_1 = \operatorname{ch}(A_1 t), \quad b = \frac{1}{k} \operatorname{sh}(A_1 t), \quad \operatorname{tg} b = B_1 \cdot \operatorname{th}(A_1 t), \quad \dot{b} = \frac{A_1 B_1}{\operatorname{ch}^2(A_1 t) + B_1^2 \operatorname{sh}^2(A_1 t)}, \\ A_1 = \frac{2k}{1+k^2}, \quad B_1 = \frac{k^2-1}{2k}. \end{aligned}$$

Если же $m = -l^2$, тогда

$$\begin{aligned} a_1 = \cos(A_2 t), \quad b = \frac{1}{l} \sin(A_2 t), \quad \operatorname{tg} b = B_2 \cdot \operatorname{tg}(A_2 t), \quad \dot{b} = \frac{A_2 B_2}{\cos^2(A_2 t) + B_2^2 \sin^2(A_2 t)}, \\ A_2 = \frac{2l}{1-l^2}, \quad B_2 = \frac{-(1+l^2)}{2l}. \end{aligned}$$

Отметим, что аналогичная задача (определение угла b) исследовалась и в работе [2]. В отличие от авторов данной публикации, в этой работе задавалась не форма градиента деформаций, а связь спина со скоростью тензора деформаций. Качественное поведение угла b в условиях сдвиговых деформаций оказалось сходным (при этом тождественными результаты были лишь в одном случае, когда параметр $m = 3$, а параметр h , рассматриваемый в работе [2], равен 2).

После нахождения величин a_1 , a_2 , a_3 и b по соотношениям (1) определяются тензор деформаций e и тензор напряжений s . На рис. 1 а, 1 б и 1 в приведены результаты расчетов для значений параметра: $m = 2$, $m = 0,5$ и $m = -0,6$. С качественной точки зрения результаты отвечают работам [2-4]. Для простоты при расчетах принято, что $a = 1$, $t = 1$, $2G = 1$, $g = \infty$.

Задача 2. Пусть теперь $D_{12} = 0$, $D_{23} = 0$, $D_{13} = 0$, $D_{11} = 1$, $D_{22} = D_{33} = -0,5$. В этом случае можно установить, что $b = (a_2 + ma_1) \cdot C_0$, где $C_0 = \operatorname{const}$.

Для простоты примем, что $C_0 = 1$, $a_1(0) = 1$, $a_2(0) = 1$, тогда $b(0) = 1 + m$ и $b = a_2 + ma_1$. Значения a_1 и a_2 определяются решениями уравнения

$$\ddot{a} - (D_{11} + D_{22}) \dot{a} + (D_3^2 m^2 + D_{11} D_{22}) a = 0,$$

где $D_3 = D_{22} - D_{11}$.

Кроме того, справедливы следующие соотношения:

$$\dot{a}_1 = D_{11} a_1 + mb D_3, \quad \dot{a}_2 = D_{22} a_2 - m^2 b D_3.$$

Р и с. 1.

Можно установить, что при $|m| \leq 0,5$, решение носит монотонный характер, а при $|m| > 0,5$ – колебательный. В частности, для изохорического растяжения (случай, когда $D_{11} = 1$ и $D_{22} = D_{33} = -0,5$), определяющее уравнение для a принимает вид: $\ddot{a} - 0,5 \dot{a} + \left(\frac{9}{4}m^2 - \frac{1}{2}\right)a = 0$ с начальными условиями $a_1(0) = 1$, $\dot{a}_1(0) = 1 - \frac{3}{2}m(m+1)$, $a_2(0) = 1$, $\dot{a}_2(0) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}m^2(m+1)$.

Пусть $k_1 = 0,25 + w$, $k_2 = 0,25 - w$, $w = 0,75\sqrt{1 - 4m^2}$, тогда при $|m| < 0,5$ решение выражается соотношениями

$$a_1 = C_1(e^{k_1 t} - e^{k_2 t}) + e^{k_2 t}, \quad C_1 = \frac{\dot{a}_1(0) - k_2}{2w},$$

$$a_2 = C_2(e^{k_1 t} - e^{k_2 t}) + e^{k_2 t}, \quad C_2 = \frac{\dot{a}_2(0) - k_2}{2w}.$$

Если $|m| > 0,5$ то структура решения имеет вид ($w = 0,75\sqrt{4m^2 - 1}$):

$$a_1 = e^{0,25t}(\cos wt + C_1 \sin wt), \quad C_1 = \frac{\dot{a}_1(0) - 0,25}{w},$$

$$a_2 = e^{0,25t}(\cos wt + C_2 \sin wt), \quad C_2 = \frac{\dot{a}_2(0) - 0,25}{w}.$$

Если обозначить отношение a_1 к a_2 через z , то

$$\operatorname{tg} b = M = \frac{(m-1)(1+mz)}{1+z} \quad \text{и}$$

$$\dot{b} = \frac{2(m-1)^2 (C_1 - C_2) w e^{2wt}}{(1+M^2)(1+z)^2 (C_2 e^{2wt} + 1 - C_2)^2}, \quad \text{если } |m| < 0,5,$$

$$\dot{b} = \frac{(m-1)^2 (C_1 - C_2)}{(1+M^2)(1+z)^2 (\cos wt + C_2 \sin wt)^2}, \quad \text{если } |m| > 0,5.$$

Для выявления качественного поведения решения было принято, что $a=1$, $t=1$, $2G=1$, $g=\infty$ и рассмотрены рабочие уравнения для напряжений в задаче изохорического растяжения в случае, когда $D_{11}=1$, $D_{22}=D_{33}=0,5$, $S_{22}=S_{33}=-0,5S_{11}$, в форме

$$\dot{S}_{11} + \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11} - 2\dot{b} S_{12} = 1, \quad \dot{S}_{12} + \sqrt{\frac{3}{2}} S_{12} + \frac{3}{2} \dot{b} S_{11} = 0.$$

На рис. 2 а и 2 б приведены графики напряжений S_{11} и S_{12} , полученные при решении поставленной задачи для двух значений параметров m : $m=0,1$ и $m=-1,0$.

Р и с. 2.

Подчеркнем, что внимание к двум поставленным задачам впервые привлекли теоретические работы [2] и [5]. Интересные опытные данные опубликованы в [3, 4, 6].

Таким образом, обобщение эндохронной теории неупругости позволяет существенно расширить описательные возможности теории при изучении простого и сложного нагружений, в соответствии с эффектами, обнаруженными в [3, 4, 6].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кадашев Ю.И., Помыткин С.П. Эндохронная теория ползучести при конечных деформациях // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Физ.-матем. науки. Самара. 2004. № С.1-7.
2. Dafalias Y.F., Rashid M.M. The effect of plastic spin on anisotropic material behavior // International Journal of Plasticity. 1989. Vol.5. P.227-246.
3. Montheillet F., Cohen M., Jonas J.J. Axial stresses and texture development during the torsion testing of Al, Cu, α -Fe // Acta Metallurgica. 1984. Vol. 32. P. 2077-2089.
4. Montheillet F., Gilormini P., Jonas J.J. Relation between axial stresses and texture development during the torsion testing: A. Simplified theory. // Acta Metallurgica. 1985. Vol. 33. P. 705-714.
5. Rubin M.B. Plasticity theory formulated in terms of physically based microstructural variables – Part II. Examples // International Journal of Solids and Structures. 1994. Vol.31. N 19. P.2635-2652.
6. Kuroda M., Tvergaard V. Plastic spin associated with a non-normality theory of plasticity // European Journal of Mechanics. A. 2001. Vol.20. N 6. P.893-905.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00169).

Поступила 23.11.2005 г.