Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Кудюров, Л. В. Кудюров, Математическое моделирование профиля зуба волновой передачи без скольжения в контакте, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 92–97

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu417>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:28:27

Теоретическая механика

УДК 531.8

С.Л. Кудюров, Л.В. Кудюров

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФИЛЯ ЗУБА ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧИ БЕЗ СКОЛЬЖЕНИЯ В КОНТАКТЕ

Рассматривается задача определения профиля рабочей части зуба волновой зубчатой передачи из условия отсутствия относительного проскальзывания контактирующих зубьев. Установлено, что полученная в работе линия профиля зуба близка к траектории, которую описывает точка, движущаяся по радиусу с постоянной скоростью, а радиус вращается вокруг полюса с постоянным замедлением.

Как известно, работа зубчатой передачи сопровождается проскальзыванием зубьев друг относительно друга в зоне контакта. Возникающее при этом трение скольжения неизбежно приводит к износу рабочих поверхностей зубьев. Учитывая, что ресурс передачи во многом зависит от интенсивности изнашивания зубьев, проблеме снижения трения скольжения зубьев можно отнести к разряду актуальных и до настоящего времени окончательно не решённых. И если для обычной пары жёстких колёс решение этой проблемы представляется затруднительным, то в волновой передаче для устранения трения имеются некоторые предпосылки. В частности, как показали графоаналитические исследования движения зуба гибкого колеса при деформации [1] в случае, когда гибкое колесо является ведущим, а деформация кручения оболочки гибкого колеса в сечении, перпендикулярном общей оси, пренебрежимо мала, скорость точки контакта C (полюса) внутренней поверхности гибкого колеса с рабочей поверхностью эллиптического волнообразователя направлена вдоль местного радиуса ведомого жёсткого колеса. Это обстоятельство позволяет предположить, что при определённом выборе профиля рабочей поверхности зуба можно уменьшить или исключить совсем скольжение в контакте. Ниже предлагается кинематическая модель такой передачи.

При выводе основных соотношений использованы следующие допущения:

- оболочку гибкого колеса с венцом зубьев можно разделить на абсолютно твёрдые части, соединённые упругими связями;
- периметр гибкого колеса при деформации не изменяется;
- деформация кручения вокруг общей оси отсутствует;
- каждый из элементов движется плоско-параллельно.

На рис. 1 представлен элемент гибкого колеса, находящийся в зацеплении с зубом жёсткого колеса. Точка A – точка контакта зубьев. Точка C , полюс, совпадает в каждый момент времени с точкой K эллиптического волнообразователя, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω . Введём неподвижную систему координат XOY с началом в точке O , лежащей на оси вращения волнообразователя и жёсткого колеса, и осью OX , направленной по радиусу r_0 (рис. 1). Введём также подвижную систему координат xCy с началом в точке C и осью Cx , направленной по оси симметрии зуба к его вершине. На рисунке ось OY перенесена в точку C для удобства выкладок.

Задача состоит в том, чтобы найти координаты точки A зуба гибкого колеса x_A, y_A , то есть

$$x_A = r \cdot \cos(y + \gamma), \quad x_A = r \cdot \sin(y + \gamma) \quad (1)$$

при условии отсутствия проскальзывания зубьев в точке контакта. Из (1) следует, что неизвестными являются $r(t), y(t), \gamma(t)$. Проведём следующие аналитические преобразования.

Согласно теории плоско-параллельного движения скорость точки A зуба гибкого колеса равна

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{AC}, \quad (2)$$

где $\vec{v}_A$ – абсолютная скорость точки A зуба гибкого колеса, $\vec{v}_C$ – скорость полюса C , $\vec{v}_{AC}$ – линейная скорость вращения точки A относительно полюса: $\vec{v}_{AC} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Исходя из построения, точка B – мгновенный центр скоростей точек зуба гибкого колеса. Поэтому угловая скорость зуба

$$\omega = \frac{v_C}{CB}. \quad (3)$$

Скорость точки A при этом

$$v_A = \omega \cdot AB. \quad (4)$$

Из геометрических соображений следует:

$$\frac{r}{\sin q_A} = \frac{r}{\sin a}, \frac{BC}{\sin a} = \frac{AB}{\cos g}, \quad (5)$$

откуда

$$BC = r \cdot \operatorname{tg} q_A, \quad (6)$$

$$AB = \frac{r \cdot \cos g}{\cos q_A}. \quad (7)$$

После подстановки (6), (7) в (3) и (4) получим

$$\omega = \frac{\dot{\varphi}}{r} \cdot \operatorname{ctg} q_A, \quad (8)$$

$$v_A = \frac{\dot{\varphi}}{r} r \frac{\cos g}{\sin q_A}, \quad (9)$$

где $\dot{\varphi} = v_C = \frac{dr}{dt}$ согласно полученным в [1] результатам.

Как известно, чтобы исключить проскальзывание рабочих поверхностей зубьев, нужно выполнить равенство проекций скорости точки A зуба гибкого колеса и проекции скорости точки A зуба жёсткого колеса на касательную к профилю зуба в точке контакта A .

В поставленной задаче рассмотрим случай равенства скоростей точек A для обоих зубьев и по направлению, и по величине. Тогда высказанное выше условие равенства проекций выполняется автоматически. Равенство величин этих скоростей выполним из следующих соображений. Пусть угловая скорость жёсткого колеса постоянна и равна $\dot{\varphi}_2$. Тогда величина скорости точки A зуба жёсткого колеса

$$v_A = \dot{\varphi}_2 \cdot R_A \quad (10)$$

Можно показать, что $\dot{\varphi}_2$ связана с угловой скоростью волнообразователя формулой

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{z_2 - z_1}{z_1} \dot{\varphi},$$

где z_1 и z_2 – числа зубьев гибкого и жёсткого колёс соответственно.

Значение R_A – радиуса точки A жёсткого колеса относительно центра O можно определить из $\triangle OAC$:

$$R_A = r \frac{\sin g}{\sin q_A}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует

$$v_A = \dot{\varphi}_2 r \frac{\sin g}{\sin q_A}. \quad (12)$$

Сравнивая (9) и (12), получаем

$$g = \arctg \left(\frac{\dot{\varphi}}{r \dot{\varphi}_2} \right). \quad (13)$$

Р и с. 1. Кинематика передачи на участке входа в зацепление:

1 – волнообразователь; 2 – гибкое колесо; 3 – жесткое колесо

Так как $a = g - q_A$, то из (5) значение

$$r = r \frac{\sin q_A}{\sin(g - q_A)}. \quad (14)$$

Таким образом, неизвестными являются r , q_A и y . Чтобы определить r , q_A и y , рассмотрим движение волнообразователя.

Р и с. 2. К определению угла γ

У наклона оси симметрии зуба гибкого колеса (или нормали к поверхности волнообразователя в точке K) к оси OX . Из геометрических соображений следует:

$$y = \frac{p}{\gamma} - (q + c), \quad (15)$$

где

$$c = \arctg\left(\frac{dh}{dx}\right), q = q_0, \quad (16)$$

q_0 – значение q в начальный момент контакта.

Продифференцировав координаты точки $K h$ и x по времени, то есть

$$h = r \sin q, x = r \cos q, \quad (17)$$

и поделив первое уравнение на второе, получим

$$C = \arctg \left(\frac{Rgq + rQ^2}{R - rQ^2gq} \right). \quad (18)$$

Если величины a и b эллипса заданы, то значение r получим, подставив (17) в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1.$$

После подстановки имеем

$$r = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 q}}. \quad (19)$$

Дифференцируя (19) по времени, найдём

$$\mathbf{E} = \frac{q_1 \sin 2q}{2ra_1^2}, \quad (20)$$

где

$$a_1 = a^2 b^2 (a^2 - b^2), \quad a_2 = a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 q. \quad (21)$$

Значение q_A выразим из (14):

$$q_A = \arctg \frac{r \sin g}{R + r \cos g}. \quad (22)$$

Чтобы определить неизвестную r , рассмотрим движение точки контакта A , которая участвует в двух движениях: в переносном – вместе с точкой A , принадлежащей зубу гибкого ко-

леса, и в относительном – по кривой, совпадающей с профилем рабочей поверхности зуба с относительной скоростью

$$\dot{\mathbf{n}}_r = \dot{\mathbf{v}}_p,$$

направленной по касательной к профилю зуба в точке контакта A . Согласно [2] величина этой скорости равна

$$\dot{\mathbf{v}}_p = \omega \mathbf{r}_{np}, \quad (23)$$

где $\mathbf{r}_{np}$ – приведенный радиус кривизны в точке контакта:

$$\mathbf{r}_{np} = \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2},$$

Здесь $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ – радиусы кривизны профилей пары зубьев гибкого и жесткого колёс соответственно. Считая v_p известной величиной, можно определить скорость изменения радиуса $\mathbf{g}$ в каждый момент времени по формуле

$$\dot{\mathbf{g}} = v_p \sin[j - (g + y)], \quad (24)$$

а значение самого радиуса на каждом i -м шаге Δt по времени равно

$$r_i = r_{i-1} + v_{pi} \sin[j_i - (g_i + y_i)] \Delta t. \quad (25)$$

Угол j определяет положение касательной к профилю зуба в связанной системе координат. Продифференцировав (1) по времени и поделив первое уравнение на второе, получим:

$$j = \arctg \left[-\frac{\dot{\mathbf{g}} - r(\dot{\mathbf{g}} + \dot{\mathbf{y}})}{\dot{\mathbf{g}}(g + y) + r(\dot{\mathbf{g}} + \dot{\mathbf{y}})} \right]. \quad (26)$$

Значение $\dot{\mathbf{g}}$ найдём, продифференцировав (14) по времени, в виде:

$$\dot{\mathbf{g}} = \frac{r \dot{\mathbf{g}} - \dot{\mathbf{g}}^2}{r^2 \dot{q}_2^2} \cos^2 g. \quad (27)$$

Значение $\dot{\mathbf{g}}$ определяется из (20) дифференцированием его по времени:

$$\dot{\mathbf{g}} = -\frac{a_1 \dot{q}_2 [2 \dot{q}_2 a_2 r \cos 2q - (\dot{\mathbf{g}} a_2 + 2 a_2 r) \sin 2q]}{2 r^2 a_2^3}, \quad (28)$$

где

$$\dot{\mathbf{g}}_2 = \dot{q}_2 (a^2 - b^2) \sin 2q. \quad (29)$$

Угловая скорость $\dot{\mathbf{y}}$ равна $\dot{\mathbf{w}}$ по величине и направлена в противоположную сторону, то есть

$$\dot{\mathbf{y}} = -\dot{\mathbf{w}}. \quad (30)$$

Но кривизна профиля зуба неизвестна. Формула (23) может быть использована только в начальный момент контакта путём подбора $\mathbf{r}_{np}$. Процедура подбора следующая. Допустим нам известна другая формула для определения v_p . Обозначим это значение v_{p^*} . Зададим первое приближение $\mathbf{r}_{np}(t_0) = R_0$. Вычислим по (23) величину $v_p(t_0) = v_0$ и по другой формуле – $v_{p^*}(t_0) = v_{*0}$. Сравним

$$|v_{*0} - v_0| \leq e, \quad (31)$$

где e – заданная точность. Если (31) выполняется, значит R_0 задан верно. Если (31) не выполняется, задаём новое значение R_0 (второе приближение) и так далее. После выполнения (31) вычисление v_p осуществляется по формуле для v_{p^*} .

Значение v_{p^*} найдём из следующих соображений. Радиус-вектор $\dot{\mathbf{r}}$ участвует в двух движениях – вместе с зубом с угловой скоростью $\dot{\mathbf{w}}$ и относительно зуба с угловой скоростью

$$\dot{\mathbf{g}}_r = \frac{v_p}{r} \cos[j - (g + y)] \quad (32)$$

и направленной противоположно $\dot{\mathbf{w}}$. Следовательно, абсолютная угловая скорость радиуса-вектора $\dot{\mathbf{r}}$ равна

$$\dot{g} = w - \frac{v_p}{r} \cos[j - (g + y)] \quad (33)$$

Решая (33) с учётом (27) относительно v_p , то есть теперь уже v_{p^*} , получим другую (точную) формулу для вычисления v_p :

$$v_{p^*} = \left(w - \frac{\dot{g} - \dot{g}^2}{r^2 \dot{q}^2} \cos^2 g \right) \frac{r}{\cos[j - (g + y)]} \quad (34)$$

После этого задача определения координат точки контакта x_A, y_A стала замкнутой. Для определения траектории точки контакта нужно из уравнений (1) исключить время. Однако получить аналитически x_A и y_A в явной зависимости только от времени затруднительно. Поэтому окончательное решение было получено численными методами. Прежде всего был решён вопрос с подбором приведенного радиуса кривизны по описанной выше процедуре и были вычислены постоянные величины a_1 и $\dot{q}_2$. Время считалось по шагам. На каждом шаге были определены переменные в последовательности $r, q, r, a_2, \dot{g}, c, y, \dot{g}, \dot{g}, g, q_A, w, y, \dot{g}, v_p, \dot{g}$ по формулам (25), (16), (19), (21), (20), (18), (15), (29), (28), (13), (22), (8), (30), (27), (26), (34), (24). Положение точки контакта в начальный момент было принято известным. Это позволило вычислить значение q_0 и другие переменные в этот момент времени.

В качестве контрольного примера был проведён численный расчёт для гибкого колеса с параметрами $a = 50$ мм, $b = 47,5$ мм, $r_0 = 2,4$ мм, $z_1 = 100$, $z_2 = 102$, $q_0 = 19^0,037$, $R_0 = 6,33$ мм, при скоростях волнообразователя $\dot{q} = -0,25$ рад/с, $\dot{q} = -0,5$ рад/с, $\dot{q} = -0,75$ рад/с с шагом по времени $\Delta t = 0,1$ с. Результаты расчёта приведены в графической форме на рисунках 3–5.

Р и с. 3. Профиль зуба гибкого колеса при скорости волнообразования $\dot{q} = -0,25$ рад/с

Р и с. 4. Профиль зуба гибкого колеса при скорости волнообразования $\dot{q} = -0,5$ рад/с

Р и с. 5. Профиль зуба гибкого колеса при скорости волнообразования $\dot{q} = -0,5$ рад/с

Р и с. 6. Скорость изменения радиуса r по величине

Кривые получены для одного и того же периода времени, а скорости движения точки контакта по дуге профиля разные, и поэтому участок дуги, пройденный с меньшей скоростью, соответствующей, например $\dot{\varphi} = -0,25$ рад/с, короче двух других. Но при наложении трёх кривых друг на друга в одном масштабе построения они в точности совпадают. Это значит, что профиль зуба гибкого колеса не зависит от скорости волнообразователя, что в общем является естественным. Однако доказать это было необходимо, учитывая, что форма профиля получена из условия отсутствия проскальзывания контактирующих зубьев, столь важного для увеличения ресурса волновой передачи. На рис. 6 представлены графики скорости изменения величины радиуса r . При данной скорости волнообразователя значение $\dot{\varphi}$ не зависит от времени: при $\dot{\varphi} = -0,25$ рад/с – $\dot{r} = 0,51531$ мм/с; при $\dot{\varphi} = -0,5$ рад/с – $\dot{r} = 1,0306$ мм/с, при $\dot{\varphi} = -0,75$ рад/с – $\dot{r} = 1,0306$ мм/с. Это обстоятельство позволяет аппроксимировать профиль зуба кривой, которая является геометрическим местом последовательных положений точки, движущейся по радиусу r с постоянной скоростью, а сам радиус вращается вокруг полюса C не с постоянной угловой скоростью (случай спирали Архимеда), а с постоянным угловым ускорением (замедлением). Например, при скорости волнообразователя $\dot{\varphi} = -0,5$ рад/с значение $\dot{r} = 1,0306$ мм/с, а значение g с точностью до 1,2% равно: $g = 1,085 - 0,0375t - 1,65t^2$.

Таким образом, в отличие от [3] скорость движения точки контакта по профилю зуба явно входит в математические соотношения предлагаемой модели. Это позволило существенно уточнить решение задачи и построить искомый профиль рабочей поверхности зуба такого колеса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудюров С.Л., Кудюров Л.В. Об одном подходе к кинематике и динамике гибкого колеса волновой зубчатой передачи // Актуальные проблемы надёжности технологических, энергетических и транспортных машин. Сб. трудов международной науч.-технич. конф. М.: Машиностроение, 2003. Т.1. С.314-318
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1969. Часть 1. С.125-127
3. Кудюров С.Л., Кудюров Л.В. Обоснование волновой зубчатой передачи без скольжения в контакте // Известия НЦ РАН. Самара: СНЦ РАН, 2003. С.74-77.

Поступила 14.10.2005 г.