Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Сеницкий, О задаче коши для одной вырождающейся системы уравнений частного вида, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 179–182

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu430>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 11:35:16

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.96

А.Ю. Сеницкий

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЧАСТНОГО ВИДА

Построено замкнутое решение в квадратурах задачи Коши и видоизмененной задачи Коши для системы дифференциальных уравнений специального вида.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{G}{y}(Ux - Uy) = 0, \quad (1)$$

где $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} p & \alpha \\ \beta & q \end{pmatrix}$, $S = SpG$, $d = \det G$, $\Delta(G) = S^2 - 4d$, $\Lambda_G = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ – спектр матрицы G .

Для матричного уравнения (1) в области $D: \{(x, y) \mid 0 < -y < x < y + 1\}$ рассмотрим следующие задачи:

Задача Коши. Найти матрицу $U(x, y)$ со свойствами:

1. $U(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$;
2. $U(x, y)$ является решением системы (1);
3. $U(x, y)$ удовлетворяет начальным условиям на линии $y = 0$:

$$U(x, 0) = \tau(x), \quad x \in \overline{J}; \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} k(y) \left[\frac{\partial U}{\partial y} \right] = \nu(x), \quad x \in J = (0, 1), \quad (3)$$

где $\tau(x) = \begin{pmatrix} \tau_1(x) \\ \tau_2(x) \end{pmatrix}$, $\nu(x) = \begin{pmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \end{pmatrix}$.

Если в задаче Коши условие (3) заменить на условие

$$\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} k(y) [U_x - U_y] = \nu(x), \quad (4)$$

а соотношение (2) оставить прежним, то такая постановка соответствует видоизмененной задаче Коши. Отметим, что вид матрицы $k(y)$ зависит от спектра матрицы G .

Введем в рассмотрение характеристические координаты:

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y. \end{cases} \quad (5)$$

Тогда область D преобразуется в область $H^+ : \{(\xi, \eta) \mid 0 < \xi < \eta < 1\}$, а система (1) имеет следующий вид:

$$L(U) \equiv U_{\xi\eta} + \frac{G}{\xi - \eta} U_{\eta} = 0. \quad (6)$$

Начальные условия (2), (3) и (4) соответственно трансформируются к виду

$$U(\xi, \xi) = \tau(\xi), \quad \xi \in \bar{J}, \quad (7)$$

$$\lim_{\eta-\xi \rightarrow +0} k\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right) \left[\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] = \nu(\xi), \quad \xi \in J, \quad (8)$$

$$\lim_{\eta-\xi \rightarrow +0} k\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right) \frac{\partial U}{\partial \eta} = \nu(\xi), \quad \xi \in J, \quad (9)$$

Отметим, что для системы более общего вида матрица Римана была построена в работе [1]. В случае матричного уравнения (6) она записывается следующим образом:

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \left(\frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0} \right)^G = \begin{cases} \left(\frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0} \right)^{\lambda_1} \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} + \left(\frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0} \right)^{\lambda_2} \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1}; & \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ \left(\frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0} \right)^{\lambda} \left\{ E + (G - \lambda E) \ln \frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0} \right\}; & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda. \end{cases} \quad (10)$$

В статье [2] методом Римана получено решение задачи Коши и обосновано его существование и единственность в случае, когда матрица G имеет простую структуру. Рассмотрим более подробно первый случай, когда $0 < \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{p+q}{2} < 1$, то есть выполняются следующие условия:

$$1.) S = 2\sqrt{d}, \quad 0 < d < 1. \quad (11)$$

Если $U(\xi, \eta)$ является решением (6), а $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ – матрица Римана этой системы, то используя свойства этой матрицы [3] получаем:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(\xi_0, \eta_0) &= \frac{1}{2} (RU) \Big|_{\eta=\eta_0}^{\xi=\eta_0-\varepsilon} + \frac{1}{2} (RU) \Big|_{\eta=\xi_0+\varepsilon}^{\xi=\xi_0} + \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon} R \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon} \left(\frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{2RG}{\xi-\eta} \right) U \Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi = \sum_{k=1}^4 J_k(\varepsilon). \end{aligned} \quad (12)$$

В этом случае матрица Римана берется из второго соотношения равенства (10). Очевидно, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_1(\varepsilon) = 0$, а $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_2(\varepsilon) = \frac{1}{2} \tau(\xi_0)$.

Матрицу $k(y)$ из начального условия (3) берем в виде

$$k(y) = (-y)^\lambda \begin{pmatrix} (p-\lambda) \ln(-y) + 1 & \alpha \ln(-y) \\ \beta \ln(-y) & (p-\lambda) \ln(-y) + 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда $J_3(\varepsilon)$ с учетом равенства (10) запишется следующим образом:

$$J_3(\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon} P(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) k^{-1} \left(\frac{\xi-\eta}{2} \right) k \left(\frac{\xi-\eta}{2} \right) \left[\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \xi} \right] \Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi.$$

После несложных преобразований, учитывая что $(G - \lambda E)^2 = 0$, последнее выражение преобразуется к виду

$$J_3(\varepsilon) = -2^{\lambda-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon} (\eta - \xi_0)^{-\lambda} \left\{ E - (G - \lambda E) \ln \left(\frac{\eta - \xi_0}{2} \right) \right\} k \left(\frac{\xi - \eta}{2} \right) \left[\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] \Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $J_3(\varepsilon)$ с учетом начального условия (8) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_3(\varepsilon) &= -2^{\lambda-1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} (\eta - \xi_0)^{-\lambda} \left\{ E - (G - \lambda E) \ln \left(\frac{\xi - \xi_0}{2} \right) \right\} \nu(\xi) d\xi, \\ M(R) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{2RG}{\xi - \eta} \right] = -\frac{1}{2} \frac{(\eta - \xi)^\lambda}{(\eta - \xi_0)^{\lambda+1}} \left[G + \lambda(G - \lambda E) \ln \frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
J_4(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \frac{(\eta - \xi)^\lambda}{(\eta - \xi_0)^{\lambda+1}} \left[G + \lambda(G - \lambda E) \ln \frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0} \right] U \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi = \\
&= \frac{\varepsilon^\lambda}{2} G \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} (\xi - \xi_0 + \varepsilon)^{-\lambda-1} U(\xi, \xi + \varepsilon) d\xi + \frac{1}{2} \lambda \varepsilon^\lambda \ln \varepsilon (G - \lambda E) \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} (\xi - \xi_0 + \varepsilon)^{-\lambda-1} \cdot U(\xi, \xi + \varepsilon) d\xi - \\
&- \frac{1}{2} \lambda \cdot \varepsilon^\lambda (G - \lambda E) \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} (\xi - \xi_0 + \varepsilon)^{-\lambda-1} \ln(\xi - \xi_0 + \varepsilon) U(\xi, \xi + \varepsilon) d\xi = \sum_{j=1}^3 B(G_j; \varepsilon_j) \cdot J'_j(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Каждое из слагаемых в правой части последнего равенства проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned}
J'_1(\varepsilon) &= -\frac{1}{\lambda} (\eta_0 - \xi_0) U(\eta_0 - \varepsilon, \eta_0) + \frac{\varepsilon^{-\lambda}}{\lambda} U(\xi_0, \xi_0 + \varepsilon) + \frac{1}{\lambda} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} (\xi - \xi_0 + \varepsilon)^{-\lambda} U' d\xi; \\
J'_2(\varepsilon) &= J'_1(\varepsilon); \quad J'_3(\varepsilon) = -\frac{(\eta_0 - \xi_0)^{-\lambda}}{\lambda} \ln(\eta_0 - \xi_0) U(\eta_0 - \varepsilon, \eta_0) + \frac{1}{\lambda} \varepsilon^{-\lambda} \cdot \ln \varepsilon \cdot U(\xi_0, \xi_0 + \varepsilon) + \\
&+ \frac{1}{\lambda} J'_1(\varepsilon) + \frac{1}{\lambda} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} (\xi - \xi_0 + \varepsilon)^{-\lambda} \ln(\xi - \xi_0 + \varepsilon) U' d\xi; \\
J_4(\varepsilon) &= \frac{G}{2\lambda} U(\xi_0, \xi_0 + \varepsilon) + \frac{1}{2} \ln \varepsilon \cdot (G - \lambda E) \cdot U(\xi_0, \xi_0 + \varepsilon) + \frac{\varepsilon^\lambda}{2} (G - \lambda E) \times \\
&(\eta_0 - \xi_0)^{-\lambda} \ln(\eta_0 - \xi_0) U(\eta_0 - \varepsilon, \eta_0) - \frac{1}{2} \ln \varepsilon (G - \lambda E) U(\xi_0, \xi_0 + \varepsilon) - \frac{\varepsilon^\lambda}{2} (G - \lambda E) J'_1 - \\
&- \frac{\varepsilon^\lambda}{2} (G - \lambda E) \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} (\xi - \xi_0 + \varepsilon)^{-\lambda} \ln(\xi - \xi_0 + \varepsilon) U' d\xi.
\end{aligned}$$

Теперь очевидно, что

$$J_4 = \lim J_4(\varepsilon) = \frac{G}{2\lambda} \tau(\xi_0) - \frac{(G - \lambda E)}{2\lambda} \tau(\xi_0) = \frac{1}{2} \tau(\xi_0).$$

Следовательно, решение поставленной задачи имеет вид

$$U(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left\{ \tau(\xi) - 2^\lambda \int_{\xi}^{\eta} (t - \xi)^{-\lambda} \left[E - (G - \lambda E) \ln \left(\frac{t - \xi}{2} \right) \right] \nu(t) dt \right\}. \quad (14)$$

Или покомпонентно

$$\begin{cases} U_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \tau_1(\xi) + 2^{\lambda-2} \int_{\xi}^{\eta} (t - \xi)^{-\lambda} \left[\alpha \ln \left(\frac{t - \xi}{2} \right) \nu_2(t) - \left(1 - (p - \lambda) \ln \left(\frac{t - \xi}{2} \right) \right) \nu_1(t) \right] dt, \\ U_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \tau_2(\xi) + 2^{\lambda-1} \int_{\xi}^{\eta} (t - \xi)^{-\lambda} \left[\beta \ln \left(\frac{t - \xi}{2} \right) \nu_1(t) - \left(1 - (q - \lambda) \ln \left(\frac{t - \xi}{2} \right) \right) \nu_2(t) \right] dt. \end{cases} \quad (15)$$

Случай 2. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$, т.е. $S = 0$, $d = 0$ и $G^2 = 0$. Здесь в силу ограничений на спектр матрицы G [2] удастся получить решение лишь видоизмененной задачи Коши

$$U(\xi, \eta) = \tau(\xi) + \int_{\xi}^{\eta} \left(E - G \ln \frac{t - \xi}{2} \right) \nu(t) dt. \quad (16).$$

Случай 3. Пусть $\lambda_{1,2} = \omega \pm i\theta$, или $2\omega = S$, $\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. Потребуем, чтобы $0 < \omega < 1$. Для выполнения этого условия необходимо и достаточно, чтобы [4]

$$0 < S < 2, \quad S^2 < 4d \quad (17)$$

Здесь решение задачи Коши имеет вид

$$U(\xi, \eta) = \tau(\xi) - 2^{G-E} \int_{\xi}^{\eta} (t - \xi)^{-G} V(t) dt. \quad (18)$$

Случай 4. Пусть $\omega = 0$, т.е. $\lambda_{1,2} = \pm \theta i$. Здесь необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$S = 0, d > 0. \quad (19)$$

Исходя из формулы (12) получим явный вид решения видоизмененной задачи Коши. Методика получения решения подобной задачи подробно изложена для первого случая. Итак, компоненты видоизмененной задачи Коши описываются следующими равенствами:

$$\begin{cases} U_1(\xi, \eta) = \tau_1(\xi) + \frac{1}{\theta} \left\{ \int_{\xi}^{\eta} \left[p \sin\left(\theta \ln \frac{2}{t-\xi}\right) + \theta \cos\left(\theta \ln \frac{2}{t-\xi}\right) \right] v_1(t) dt + \alpha \int_{\xi}^{\eta} \sin\left(\theta \ln \frac{2}{t-\xi}\right) v_2(t) dt \right\}, \\ U_2(\xi, \eta) = \tau_2(\xi) + \frac{1}{\theta} \left\{ \beta \int_{\xi}^{\eta} \sin\left(\theta \ln \frac{2}{t-\xi}\right) v_1(t) dt + \int_{\xi}^{\eta} \left[q \sin\left(\theta \ln \frac{2}{t-\xi}\right) + \theta \cos\left(\theta \ln \frac{2}{t-\xi}\right) \right] v_2(t) dt \right\}. \end{cases} \quad (20)$$

Таким образом, из полученных результатов следует, что наличие матрицы Римана для системы (1) или (6) позволяет получить решения задачи Коши и видоизмененной задачи Коши в квадратурах. При этом постановка задач, а именно вид матрицы $k(y)$, существенно зависит от спектра матрицы G .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев А.А. О некоторых приложениях ассоциированных гипергеометрических функций. //Тезисы докладов Куйбышевск. обл. межвуз. научн. совещ.-семинара. Куйбышев, 1984. С.8.
2. Сеницкий А.Ю. О системе уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу (II). // Краевые задачи для уравнения математической физики. Сб. научн. тр. Куйб. пед. ин-т. Куйбышев: КПИ, 1990. С.61-64
3. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
4. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 563с.

Поступила 17.11.2005 г.

УДК 517.95

С.В. Богатырев

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Для одного класса дифференциальных операторов получено явное представление для фундаментальных решений. Этот класс включает в себя оператор Лапласа, оператор Гельмгольца, бигармонический оператор.

Пусть $p(\lambda)$ – многочлен степени l с коэффициентами из поля вещественных чисел. Тогда для $p(\lambda)$ имеет место представление

$$p(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_l). \quad (1)$$

Заметим, что среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ многочлена $p(\lambda)$ могут быть совпадающие.

Через Δ обозначим оператор Лапласа для случая трех переменных, то есть

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Рассмотрим уравнение

$$p(-\Delta)u(x) = \delta(x), \quad (2)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Любое решение этого уравнения в классе обобщенных функций $D'(\mathbb{R}^3)$ называется фундаментальным решением оператора $p(-\Delta)$. Известны [1,2] фундаментальные решения оператора $p(-\Delta)$ в некоторых частных случаях. Например, фундаментальным решением оператора Лапласа является функция $-1/4\pi \|x\|$.