Общероссийский математический портал

С. В. Богатырев, Фундаментальные решения одного класса дифференциальных операторов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 182–185

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu431>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 03:18:57

Случай 4. Пусть $\omega = 0$, т.е. $\lambda_{1,2} = \pm \theta i$. Здесь необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$S = 0, d > 0. \quad (19)$$

Исходя из формулы (12) получим явный вид решения видоизмененной задачи Коши. Методика получения решения подобной задачи подробно изложена для первого случая. Итак, компоненты видоизмененной задачи Коши описываются следующими равенствами:

$$\begin{cases} U_1(\xi, \eta) = \tau_1(\xi) + \frac{1}{\theta} \left\{ \int_{\xi}^{\eta} \left[p \sin\left(\theta \ln \frac{2}{t-\xi}\right) + \theta \cos\left(\theta \ln \frac{2}{t-\xi}\right) \right] v_1(t) dt + \alpha \int_{\xi}^{\eta} \sin\left(\theta \ln \frac{2}{t-\xi}\right) v_2(t) dt \right\}, \\ U_2(\xi, \eta) = \tau_2(\xi) + \frac{1}{\theta} \left\{ \beta \int_{\xi}^{\eta} \sin\left(\theta \ln \frac{2}{t-\xi}\right) v_1(t) dt + \int_{\xi}^{\eta} \left[q \sin\left(\theta \ln \frac{2}{t-\xi}\right) + \theta \cos\left(\theta \ln \frac{2}{t-\xi}\right) \right] v_2(t) dt \right\}. \end{cases} \quad (20)$$

Таким образом, из полученных результатов следует, что наличие матрицы Римана для системы (1) или (6) позволяет получить решения задачи Коши и видоизмененной задачи Коши в квадратурах. При этом постановка задач, а именно вид матрицы $k(y)$, существенно зависит от спектра матрицы G .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев А.А. О некоторых приложениях ассоциированных гипергеометрических функций. //Тезисы докладов Куйбышевск. обл. межвуз. научн. совещ.-семинара. Куйбышев, 1984. С.8.
2. Сеницкий А.Ю. О системе уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу (II). // Краевые задачи для уравнения математической физики. Сб. научн. тр. Куйб. пед. ин-т. Куйбышев: КПИ, 1990. С.61-64
3. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
4. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 563с.

Поступила 17.11.2005 г.

УДК 517.95

С.В. Богатырев

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Для одного класса дифференциальных операторов получено явное представление для фундаментальных решений. Этот класс включает в себя оператор Лапласа, оператор Гельмгольца, бигармонический оператор.

Пусть $p(\lambda)$ – многочлен степени l с коэффициентами из поля вещественных чисел. Тогда для $p(\lambda)$ имеет место представление

$$p(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_l). \quad (1)$$

Заметим, что среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ многочлена $p(\lambda)$ могут быть совпадающие.

Через Δ обозначим оператор Лапласа для случая трех переменных, то есть

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Рассмотрим уравнение

$$p(-\Delta)u(x) = \delta(x), \quad (2)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Любое решение этого уравнения в классе обобщенных функций $D'(\mathbb{R}^3)$ называется фундаментальным решением оператора $p(-\Delta)$. Известны [1,2] фундаментальные решения оператора $p(-\Delta)$ в некоторых частных случаях. Например, фундаментальным решением оператора Лапласа является функция $-1/4\pi \|x\|$.

Фундаментальным решением оператора $\Delta - a^2$, где $a > 0$, являются функции $-e^{\pm a\|x\|} / 4\pi\|x\|$, а для оператора $\Delta + a^2$, где $a > 0$, функции $-e^{\pm ia\|x\|} / 4\pi\|x\|$. Наконец, фундаментальным решением оператора Δ^m , где $m \in \mathbb{N}$, является функция $-\|x\|^{2m-3} / 4\pi(2m-2)!$. Целью настоящей работы является получение явного представления фундаментального решения для оператора $p(-\Delta)$ в общем случае.

Для нахождения фундаментального решения уравнения (2) часто применяется следующая схема. Пусть уравнение (2) имеет фундаментальное решение $E(x)$ из класса медленно растущих распределений $S'(\mathbb{R}^3)$. Тогда преобразование Фурье $F[E(x)](\xi) \equiv \hat{E}(\xi)$ этой функции также попадает в класс $S'(\mathbb{R}^3)$ и удовлетворяет уравнению

$$p(\|\xi\|)\hat{E}(\xi) = 1. \quad (3)$$

Отсюда следует, что $\hat{E}(\xi) = 1/p(\|\xi\|)$ на множестве $\{\xi : p(\|\xi\|) \neq 0\}$. Если $p(\|\xi\|) \neq 0$ всюду на $\mathbb{R}^3$, то для вычисления $E(x)$ надо найти обратное преобразование Фурье F^{-1} от функции $1/p(\|\xi\|)$. В более сложном случае, когда $p(\|\xi\|)$ имеет нули в $\mathbb{R}^3$, функцию $1/p(\|\xi\|)$ нужно регуляризовать и вычислять обратное преобразование Фурье от ее регуляризации. Трудности здесь очевидны. Во-первых, не всегда понятно, как регуляризовать функцию $1/p(\|\xi\|)$. Во-вторых, имеются чисто технические трудности вычисления обратного преобразования Фурье.

Идея преодоления этих трудностей была предложена в работе [3]. Она заключается в том, чтобы заменить уравнение (2) последовательностью уравнений

$$p(-\Delta)u_n(x) = \gamma_n(x), \quad (4)$$

где $\gamma_n(x)$ подбирается так, чтобы выполнялся ряд условий. Во-первых, $\gamma_n(x)$ должна лежать в классе $S'(\mathbb{R}^3)$. Во-вторых, $\gamma_n(x)$ должна сходиться к $\delta(x)$. Для формулировки остальных условий преобразуем по Фурье (4). Тогда получим уравнение

$$p(\|\xi\|)\hat{u}_n(\xi) = \hat{\gamma}_n(\xi). \quad (5)$$

В качестве третьего условия на $\gamma_n(x)$ потребуем, чтобы решение $\hat{\gamma}_n(\xi)/p(\|\xi\|)$ этого уравнения лежало в классе $S'(\mathbb{R}^3)$. Наконец потребуем, чтобы обратное преобразование Фурье функций $\hat{\gamma}_n(\xi)/p(\|\xi\|)$ выражалось через известные (желательно, элементарные) функции. Если все эти условия выполнены, то фундаментальное решение $E(x)$ может быть вычислено как предел последовательности $F^{-1}[\hat{\gamma}_n(\xi)/p(\|\xi\|)](x)$.

В работе [3] кроме идеи был предложен также способ построения последовательности $\gamma_n(x)$. Эта последовательность должна быть построена так, чтобы ее преобразование Фурье имело вид

$$\hat{\gamma}_n(\xi) = \prod_{k=1}^l \hat{\sigma}_n(\|\xi\| - \mu_k) \hat{\sigma}_n(\|\xi\| + \mu_k),$$

где $\mu_k^2 = \lambda_k$. Функция $\hat{\sigma}_n(\tau)$ является преобразованием Фурье функции

$$\sigma_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{-t^2/n}. \quad (6)$$

Заметим, что

$$\hat{\sigma}_n(\tau) = e^{-\tau^2/4n} - e^{-n\tau^2/4}. \quad (7)$$

Нетрудно показать, что $\gamma_n(x) \in S'(\mathbb{R}^3)$ и что $\gamma_n(x) \rightarrow \delta(x)$. Используя (1), получим для представления решений уравнений (5) следующие формулы:

$$\hat{u}_n(\xi) = \frac{\gamma_n(\xi)}{p(\|\xi\|)} = \frac{1}{a_0} \prod_{k=1}^l \frac{\hat{\sigma}_n(\|\xi\| - \mu_k) \hat{\sigma}_n(\|\xi\| + \mu_k)}{(\|\xi\| - \mu_k)(\|\xi\| + \mu_k)}. \quad (8)$$

Отсюда следует, что $u_n(\xi) \in S'(\mathbb{R}^3)$.

Найдем теперь обратное преобразование Фурье для последовательности (8). Прежде всего отметим, что функции $\hat{u}_n(\xi)$ лежат в классе быстро убывающих функций $S'(\mathbb{R}^3)$, а значит обратное преобразование Фурье этих функций может быть вычислено по формуле

$$u_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x,\xi)} \hat{u}_n(\xi) d\xi. \quad (9)$$

Переходя в (9) к сферическим координатам, с помощью несложных преобразований нетрудно получить представление

$$u_n(x) = - \left(\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ir\rho} \frac{1}{a_0} \prod_{k=1}^l \frac{\hat{\sigma}_n(\rho - \mu_k) \hat{\sigma}_n(\rho + \mu_k)}{\rho^2 - \mu_k^2} \right)_{r=\|x\|}.$$

Другими словами, последнее равенство может быть переписано следующим образом:

$$u_n(x) = - \left(\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} F_{\rho \rightarrow r}^{-1} \left[\frac{1}{a_0} \prod_{k=1}^l \frac{\hat{\sigma}_n(\rho - \mu_k) \hat{\sigma}_n(\rho + \mu_k)}{(\rho - \mu_k)(\rho + \mu_k)} \right] \right)_{r=\|x\|}.$$

Обратное преобразование Фурье переводит произведение изображений в свертку оригиналов. Это позволяет последнее равенство привести к виду

$$u_n(x) = - \left(\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{a_0} \otimes_{k=1}^l F_{\rho \rightarrow r}^{-1} \left[\frac{\hat{\sigma}_n(\rho - \mu_k)}{(\rho - \mu_k)} \right] \otimes F_{\rho \rightarrow r}^{-1} \left[\frac{\hat{\sigma}_n(\rho + \mu_k)}{(\rho + \mu_k)} \right] \right) \right)_{r=\|x\|}, \quad (10)$$

где символом $\otimes$ обозначена свертка функций.

Используя представление (7) можно получить соотношение

$$F_{\rho \rightarrow r}^{-1} \left[\frac{\hat{\sigma}_n(\rho - \alpha)}{(\rho - \alpha)} \right] = -ie^{-iar} s_n(r),$$

где $s_n(r)$ определяется равенством

$$s_n(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{r/\sqrt{n}}^{r\sqrt{n}} e^{-z^2} dz.$$

Отметим, что $s_n(r) \rightarrow \frac{1}{2}$ при $r > 0$, и что $s'_n(r) = \sigma_n(r)$, где σ_n определяется формулой (6). Легко видеть, что $\sigma_n(r) \rightarrow \delta(r)$. Теперь мы можем переписать равенство (10) в следующем виде

$$u_n(x) = (-1)^{l+1} \left(\frac{1}{2\pi r} \frac{1}{a_0} \frac{d}{dr} \left(\otimes_{k=1}^l e^{-i\mu_k r} s_n(r) \otimes e^{i\mu_k r} s_n(r) \right) \right)_{r=\|x\|}. \quad (11)$$

Для того, чтобы найти предел последовательности $u_n(x)$ получим несколько вспомогательных формул. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Дифференцируя по r выражение $e^{\alpha_1 r} s_n(r) \otimes e^{\alpha_2 r} s_n(r)$ и выполняя несложные преобразования (детали см. в [3]), получим равенство

$$e^{\alpha_1 r} s_n \otimes e^{\alpha_2 r} s_n = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{\alpha_1 r} s_n \otimes e^{\alpha_2 r} \sigma_n + \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} e^{\alpha_1 r} \sigma_n \otimes e^{\alpha_2 r} s_n. \quad (12)$$

Пусть теперь $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ и все эти числа различны. С помощью (12) нетрудно получить следующее равенство

$$\otimes_{k=1}^m e^{\alpha_k r} s_n(r) = \sum_{k=1}^m \left(\prod_{j \neq k} \frac{1}{\alpha_k - \alpha_j} \right) e^{\alpha_1 r} \sigma_n \otimes \dots \otimes e^{\alpha_{k-1} r} \sigma_n \otimes e^{\alpha_k r} s_n \otimes e^{\alpha_{k+1} r} \sigma_n \otimes \dots \otimes e^{\alpha_m r} \sigma_n.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $n \rightarrow \infty$ получим

$$\otimes_{k=1}^m e^{\alpha_k r} s_n \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\prod_{j \neq k} \frac{1}{\alpha_k - \alpha_j} \right) e^{\alpha_k r}. \quad (13)$$

Теперь из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ построим последовательность $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ и пусть в этой последовательности число α_j встречается a_j раз. Тогда с помощью формулы (13) нетрудно получить

$$\otimes_{k=1}^l e^{\beta_k r} s_n \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\prod_{j \neq k} \frac{1}{\alpha_k - \alpha_j} \right) \frac{r^{a_k-1}}{(a_k-1)!} e^{\alpha_k r}. \quad (14)$$

Снова возьмем последовательность $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$, составленную из различных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Тогда с помощью несложных преобразований из (14) можно получить соотношение

$$\otimes_{k=1}^l \left(e^{-\beta_k r} s_n \otimes e^{\beta_k r} s_n \right) \rightarrow \sum_{k=1}^m A_k \varphi_k(r), \quad (15)$$

в котором каждому числу α_k соответствует слагаемое $A_k \varphi_k(r)$. При этом если $\alpha_k \neq 0$, то

$$A_k = \frac{1}{2\alpha_k} \prod_{j \neq k} \frac{1}{\alpha_k^2 - \alpha_j^2}, \quad \varphi_k(r) = \frac{r^{a_k-1}}{(a_k-1)!} sh(\alpha_k r). \quad (16)$$

Если $\alpha_k = 0$, то

$$A_k = \frac{1}{2} \prod_{j \neq k} \frac{1}{-\alpha_j^2}, \quad \varphi_k(r) = \frac{r^{2a_k-1}}{(2a_k-1)!}. \quad (17)$$

Из (11) и (15)–(17) теперь можно получить представление для фундаментального решения оператора $p(-\Delta)$ в общем случае. Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Пусть многочлен $p(\lambda)$ степени l имеет m различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и корень λ_k имеет кратность ω_k . Тогда одно из фундаментальных решений оператора $p(-\Delta)$ может быть представлено в виде

$$E(x) = \frac{(-1)^{l+m}}{a_0} \left(\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} \sum_{k=1}^m A_k \varphi_k(r) \right)_{r=\|x\|},$$

где каждому корню λ_k соответствует слагаемое $A_k \varphi_k(r)$. При этом если $\lambda_k \neq 0$, то

$$A_k = \frac{1}{2} \prod_{j \neq k} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j}, \quad \varphi_k(r) = \frac{r^{\omega_k-1}}{(\omega_k-1)!} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k} r)}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Если $\lambda_k = 0$, то

$$A_k = \frac{1}{2} \prod_{j \neq k} \frac{1}{-\lambda_j}, \quad \varphi_k(r) = \frac{r^{2\omega_k-1}}{(2\omega_k-1)!}.$$

Отметим, что известные представления фундаментальных решений операторов Δ , $\Delta - a^2$, $\Delta + a^2$ и Δ^m нетрудно получить из результатов этой теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
2. Полянский А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
3. Radyno N.Y., Papantolaou V.G. Fundamental Solutions of Linear Differential Equations in the Sense of Mnemofunctions // Journal of Computational Analysis and Applications. 1999, Vol. 1, No 2, P.163-176.

Поступила 17.01.2006 г.