Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Богданова, В. Ф. Кириченко, Частичная диссипативность эволюционных уравнений в неклассической теории пологих оболочек с переменной массой, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 186–187

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu432>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 11:43:45

Приложения дифференциальных уравнений

УДК 539.3

Л.М. Богданова, В.Ф. Кириченко

ЧАСТИЧНАЯ ДИССИПАТИВНОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

Исследована система эволюционных уравнений, соответствующих одному из вариантов геометрически нелинейной теории оболочек Рейсснера.

В рамках подхода И.В. Мещерского, полая оболочка определяется как распределенная механическая система переменной массы, занимающая в момент времени $t \in [t_0, t_1]$ область $\bar{D} = \bar{\Omega} \times \left[-\frac{h(t)}{2}, \frac{h(t)}{2} \right] \in \mathbb{R}^3$, при этом: пространство $\mathbb{R}^3$ параметризовано декартовой системой координат; (x_1, x_2, x_3) – координаты точки в $\mathbb{R}^3$; уравнение $x_3 = 0$ определяет срединную поверхность оболочки; $[t_0, t_1]$ – отрезок времени наблюдения за эволюцией оболочки; $\bar{\Omega} = \Omega \times \partial\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ измеримая по Лебегу односвязная область с границей $\partial\Omega$; функция $h(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ определяет толщину оболочки в момент времени t ; $\forall t \in [t_0, t_1]$, $h(t) \geq \alpha > 0$, $\alpha = \text{const} \in \mathbb{R}$, $h_0 = h(t_0)$; $D = \Omega \times \left(-\frac{h(t)}{2}, \frac{h(t)}{2} \right)$; $\Gamma = \partial\Omega \times [t_0, t_1]$; $Q = \Omega \times (t_0, t_1)$; n – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Исследуемая система эволюционных уравнений, соответствующая одному из вариантов геометрически нелинейной теории оболочек Рейсснера, с начальными и граничными условиями (первая начально-краевая задача) имеет такой вид:

$$\int_{-\frac{h(t)}{2}}^{\frac{h(t)}{2}} \left\{ \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_{3-i}} \right\} dx_3 = 0; \quad (1)$$

$$\int_{-\frac{h(t)}{2}}^{\frac{h(t)}{2}} \left\{ -\frac{\partial A \sigma_{ii}}{\partial x_i} - \frac{\partial A \sigma_{12}}{\partial x_{3-i}} + \left(1 - \frac{\partial B}{\partial x_3} \right) \sigma_{i3} \right\} dx_3 = 0, i = \overline{1, 2}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\frac{h(t)}{2}}^{\frac{h(t)}{2}} \rho \frac{\partial u_{30}}{\partial t} dx_3 \right) + \int_{-\frac{h(t)}{2}}^{\frac{h(t)}{2}} \varepsilon \frac{\partial u_{30}}{\partial t} dx_3 - \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-\frac{h(t)}{2}}^{\frac{h(t)}{2}} \left(B \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} + \sigma_{ii} \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} + \left[1 - \frac{dB}{dx_3} \right] \sigma_{i3} + \sigma_{12} \frac{\partial u_{30}}{\partial x_{3-i}} + \right. \right. \\ \left. \left. + B \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_{3-i}} \right) dx_3 + \int_{-\frac{h(t)}{2}}^{\frac{h(t)}{2}} k_i \sigma_{ii} dx_3 \right\} = g(x_1, x_2, t); \end{aligned} \quad (3)$$

$$u_{30}|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial u_{30}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, u_{i0}|_{\Gamma} = 0, u_{i1}|_{\Gamma} = 0, i = \overline{1, 2}; \quad (4)$$

$$u_{30}(x_1, x_2, t_0) = \varphi_{30}(x_1, x_2), \frac{\partial u_{30}(x_1, x_2, t_0)}{\partial t} = \psi_{30}(x_1, x_2), \quad (5)$$

где $u_{i0} = u_{i0}(x_1, x_2, t)$, $u_{i1} = u_{i1}(x_1, x_2, t)$, $u_{30} = u_{30}(x_1, x_2, t)$ – искомые функции; $\varepsilon, \rho, E, \nu, k_i$ – строго положительные вещественные постоянные, $0 < \nu < \frac{1}{2}$;

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{ii} + \nu \varepsilon_{3-i3-i}), \sigma_{i3} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{i3}, i = \overline{1, 2}, \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12};$$

$$\varepsilon_{i3} = \frac{1}{2} \left[\frac{dA}{dx_3} u_{i1} + \left(1 - \frac{dB}{dx_3} \right) \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} \right], \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_{i0}}{\partial x_i} + A \frac{\partial u_{i1}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(B \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} \right) - k_i u_{30} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} \right)^2,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u_{i0}}{\partial x_{3-i}} + A \frac{\partial u_{i1}}{\partial x_{3-i}} - \frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \left(B \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\partial u_{30}}{\partial x_1} \frac{\partial u_{30}}{\partial x_2} \right]; A = x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_0^2}, B = \frac{4x_3^3}{3h_0^2};$$

$g(x_1, x_2, t)$ – интенсивность поперечной нагрузки; $\varphi_{30}(x_1, x_2), \psi_{30}(x_1, x_2)$ – известные функции, определяющие начальные условия (5).

Далее используем обозначения функциональных пространств из [1]; символ $|\cdot|_{\Omega}$ – обозначает норму в пространстве $L^2(\Omega)$. Авторами доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\partial\Omega$ имеет гладкость, достаточную для используемых теорем вложения и выполняются такие условия:

$$\text{ess sup } |g(x_1, x_2, t)|_{\Omega} < \infty; \varphi_{30} \in H_0^2(\Omega), \psi_{30} \in H_0^1(\Omega), h(t) \in C^1([t_0, t_1]).$$

Тогда:

1) существует хотя бы одно решение $\{\tilde{u}_{i0}, \tilde{u}_{i1}, \tilde{u}_{30}\}$ задачи (1) – (5), при этом

$$\tilde{u}_{i0}, \tilde{u}_{i1} \in L^{\infty}(t_0, t_1, H_0^1(\Omega)), i = \overline{1, 2}; \tilde{u}_{30} \in L^{\infty}(t_0, t_1, H_0^1(\Omega)), \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial t} \in L^{\infty}(t_0, t_1, H_0^1(\Omega));$$

2) решение задачи (1) – (5) может быть продолжено на интервал (t_0, ∞) ;

3) система эволюционных уравнений (1) – (3) частично диссипативна при всех допустимых в теореме начальных условиях, то есть найдется такое значение $t_2 > t_0$ и вещественное число $\gamma > 0$, что для почти всех $t > t_2$ выполняется условие

$$\left| \frac{\partial \tilde{u}_{30}}{\partial t} \right|_{\Omega}^2 + \left| \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial x_i^2} \right|_{\Omega}^2 \leq \gamma^2.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М. : Мир, 1972. 588 с.