Общероссийский математический портал

В. Н. Анисимов, Описание напряженно-деформированного состояния твердых тел с позиции межмолекулярного взаимодействия, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 42, 197–200

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:24:27

$$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega^2 u = \frac{2Aq_0\alpha Et}{\rho l \sqrt{c\rho t_n}}. \quad (8)$$

В зависимости от соотношения между величинами ω и β уравнение (4) имеет различные решения. Для железа и сталей $E = 2 \times 10^{11}$ Па, $\rho = 7,8 \times 10^3$ кг/м³ [5], $\eta = 4 \times 10^5$ Па·с [6], для условий лазерного воздействия l составляет величину порядка 10^{-4} м [4].

Так как в нашем случае $\beta^2 \gg \omega^2$, то общее решение уравнения (4) имеет вид

$$u = C_1 \exp(-k_1 t) + C_2 \exp(-k_2 t) + At + B, \quad (9)$$

где $k_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 + \omega^2}$, $k_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 + \omega^2}$, C_1 , C_2 – константы, определяемые из начальных условий, а величины A и B частного решения определяются стандартным образом. Учитывая, что начальное смещение и начальная скорость равны нулю, а также используя соотношения $\beta^2 \gg \omega^2$ и $k_1 \gg k_2$, после упрощений получаем

$$u = \left(\frac{2Aq_0\alpha l \eta}{E \sqrt{\pi \lambda c \rho t_n}} \right) \left(\exp\left(-\frac{Et}{\eta}\right) + \frac{Et}{\eta} - 1 \right). \quad (10)$$

Из выражения (10) видно, что при $t = \frac{\eta}{E}$ смещение u будет в e раз меньше, чем в случае

свободного термического расширения. Характерное время $t_p = \frac{\eta}{E}$ по аналогии с процессами движения в вязкой среде можно назвать временем релаксации.

Для железа и сталей $t_p \sim 1$ -2 мкс. Таким образом, если $t_n \leq t_p$, то в системе будут накапливаться очень высокие значения средних напряжений. Более тщательный анализ показывает необходимость учёта релаксационных процессов уже при временах нагрева $t_n \sim 1 \times 10^{-4}$ с.

Выводы.

1. Показана необходимость учета релаксационных процессов при длительности лазерного импульса менее 10^{-4} с.

2. Показано, что время релаксации напряжений при импульсном нагружении определяется отношением двух макропараметров, характеризующих вязкостные и упругие свойства материала.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Иванова В.С., Баланкин А.С., Бунин И.Ж., Оксогоев А.А. Синергетика и фракталы в материаловедении. М.: Наука, 1994. 383с.
2. Бекренев А.Н., Камашев А.В. О фазовых превращениях в сталях при быстром нагреве. // Письма в ЖТФ, 1993. Т.19. В.22, С.58-61.
3. Bekrenov A.N., Kamashev A.V. Features of phase transformations passing and mass transport in metals under intensive external reactions. // Journal of Physics and Chemistry of Solids V.62. 2001, P.647-651.
4. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Зуев И.В., Кокора А.Н. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов. Справочник. М.: Машиностроение, 1985, 496 с.
5. Кикоин И.К. Таблицы физических величин. Справочник. М.: Атомиздат, 1976, 1004 с.
6. Дерибас А.А. Физика упрочнения и сварки взрывом. Новосибирск: Наука, 1980, 188 с.

Поступила 20.01.2006 г.

УДК 539.376

В.Н. Анисимов

ОПИСАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПОЗИЦИИ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Построена нелинейная модель упругого деформирования материалов, основанная на взаимодействии между молекулами.

Прочностные свойства любого материала складываются из взаимодействия между молекулами. Пусть $F(r)$ – сила взаимодействия двух молекул, направленная по прямой, соеди-

няющей их центры. Здесь r – расстояние между центрами. Межмолекулярные силы складываются из сил притяжения и отталкивания. В работе [1] для $F(r)$ предложена следующая функция:

$$F(r) = \frac{a}{r^n} - \frac{b}{r^m}. \quad (1)$$

Найдем выражение для силы, действующей на молекулу, расположенную в точке $M(x_1, x_2, x_3)$ со стороны других молекул (см. рис. 1).

$$V_0 \Phi_i(x_1, x_2, x_3) = \iiint_V F \left(\sqrt{(\Delta x_1 + \Delta u_1)^2 + (\Delta x_2 + \Delta u_2)^2 + (\Delta x_3 + \Delta u_3)^2} \right) \cdot N(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \cdot \frac{\Delta x_i}{r} dV. \quad (2)$$

Здесь $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$ – проекция на ось x_i силы, действующей на единицу объема молекулы; $u_i(x_1, x_2, x_3)$ – перемещение точки сплошной среды в результате деформирования;

Р и с. 1.

$\Delta u_i = u_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - u_i(x_1, x_2, x_3)$; V_0 – объем среды, соответствующий одной молекуле; $N(x_1, x_2, x_3)$ – объемная концентрация центров молекул; $r = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2}$ – расстояние между центрами в недеформированном состоянии. Тело V представляет собой внешность сферы радиуса $d_0 = 2r_0$.

Уравнения равновесия (2) обладают большой общностью. С помощью соответствующего выбора функции N можно описывать анизотропию, объемную неоднородность материалов. Если позволяют

вычислительные мощности, то можно рассматривать деформацию сред с точки зрения перемещения отдельно взятых молекул.

В данной статье рассмотрим случай изотропного материала, т.е. $N(x_1, x_2, x_3) = N = \text{const}$.

Сделаем также допущение, что Δu_i малы по сравнению с r , тогда, используя разложение в ряд, получим

$$\sqrt{(\Delta x_1 + \Delta u_1)^2 + (\Delta x_2 + \Delta u_2)^2 + (\Delta x_3 + \Delta u_3)^2} = r + \Delta u_j \cdot n_j. \quad (3)$$

В данной формуле и в дальнейшем используется суммирование по повторяющемуся индексу. Через n_j обозначена проекция единичного вектора $\bar{n}$ на ось Δx_j , т.е. $n_j = \frac{\Delta x_j}{r}$.

Уравнение (2) с учетом (3) в случае изотропного тела в сферических координатах примет следующий вид:

$$A \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_{d_0}^\infty F(r + \Delta u_j n_j) n_i \cdot r^2 \sin \theta dr = \Phi_i(\bar{x}), \quad (4)$$

где $A = \frac{N}{V_0}$; $\Phi_i(\bar{x}) = \Phi_i(x_1, x_2, x_3)$.

Расположение сферических углов показано на рис. 2. Направляющие косинусы через сферические углы выражаются следующим образом:

$$n_1 = \sin \theta \cdot \cos \varphi; n_2 = \sin \theta \cdot \sin \varphi; n_3 = \cos \theta. \quad (5)$$

Разложим функцию $F(r + \Delta u_j n_j)$ и функцию Δu_j в ряд Тейлора и удержим члены до второго порядка включительно. В результате уравнение (4) примет вид:

Р и с. 2

$$A \cdot \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi d\theta \int_{d_0}^\infty \left[F'(r) \left(u_{j,k} n_k n_j \cdot r + \frac{1}{2} r^2 u_{j,kl} n_k n_l n_j \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} F''(r) (u_{j,k} n_k n_j \cdot r + \frac{1}{2} r^2 u_{j,kl} n_k n_l n_j)^2 \right] n_i \cdot r^2 \cdot \sin \theta dr = \Phi_i(x_0). \quad (6)$$

Здесь учтено, что $\int_{d_0}^\infty F(r) r^2 dr = 0$, так как силы взаимодействия относительно молекулы в недеформированном состоянии находятся в положении равновесия.

Проинтегрируем выражение (6) с учетом (5). После преобразований получим

$$\Phi_3 = \mu_1 \left\{ \Delta u_3 + 2\theta_{33} + \mu_2 \left[\varepsilon_{13} (6u_{3,13} + 3u_{1,33} + 3u_{1,11} + 2u_{2,12} + u_{1,22}) + \right. \right. \\ + \varepsilon_{23} (6u_{3,23} + 3u_{2,33} + 3u_{2,22} + 2u_{1,12} + u_{2,11}) + 2\varepsilon_{12} (u_{1,23} + u_{2,13} + u_{3,12}) + \\ + 3u_{3,3} (5u_{3,33} + 2u_{1,13} + 2u_{2,23} + u_{3,11} + u_{3,22}) + u_{2,2} (6u_{2,23} + 3u_{3,22} + 3u_{3,33} + 2u_{1,13} + u_{3,11}) + \\ \left. \left. u_{1,1} (6u_{1,13} + 3u_{3,11} + 3u_{3,33} + 2u_{2,23} + u_{3,22}) \right] \right\}, \quad (7)$$

где

$$\mu_1 = \frac{2\pi N}{15V_0} \int_{d_0}^\infty F'(r) r^4 dr; \quad \mu_2 = \frac{\int_{d_0}^\infty F''(r) \cdot r^5 dr}{7 \int_{d_0}^\infty F'(r) r^4 dr}; \quad \Delta u_i = u_{i,jj}; \quad \theta = u_{i,i}; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (8)$$

Условие равновесия по оси x_1 получается из выражения (7) заменой индекса 3 на 1 и 1 на 3. Аналогично получается условие равновесия по оси x_2 .

Если пренебречь нелинейными членами, то данные уравнения будут соответствовать уравнениям Ламе при $\nu = 0,25$.

Найдем напряжение, действующее на площадке, перпендикулярной оси Δx_3 :

$$\frac{1}{N} \sigma_{3i} \cdot S_0 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{d_0}^\infty \left(F'(r) r^3 \cdot (u_{j,i} n_j n_i) + \frac{1}{2} F''(r) r^4 (u_{j,i} n_j n_i)^2 \right) \cdot n_i n_3 dr, \quad (9)$$

где S_0 – площадь сечения, приходящаяся на одну молекулу. Интегрирование производится по внешности полусферы, находящейся над плоскостью $\Delta x_1, \Delta x_2$.

После преобразований получим:

$$\sigma_{33} = \mu_1^* \left\{ 3u_{3,3} + u_{1,1} + u_{2,2} + 0,5\mu_2^* \left[9u_{3,3}^2 + 2u_{1,1} \cdot u_{2,2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 3(u_{1,1} + u_{3,3})^2 + 3(u_{2,2} + u_{3,3})^2 + \varepsilon_{12}^2 + 3\varepsilon_{13}^2 + 3\varepsilon_{23}^2 \right] \right\}; \quad (10)$$

$$\sigma_{31} = \mu_1^* \left[\varepsilon_{13} + \mu_2^* (\varepsilon_{12} \varepsilon_{23} + \varepsilon_{13} (3u_{1,1} + 3u_{3,3} + u_{2,2})) \right]; \quad (11)$$

$$\sigma_{32} = \mu_1^* \left[\varepsilon_{23} + \mu_2^* (\varepsilon_{12} \varepsilon_{13} + \varepsilon_{23} (3u_{2,2} + 3u_{3,3} + u_{1,1})) \right], \quad (12)$$

$$\text{где } \mu_1^* = \frac{2\pi N}{15S_0} \int_{d_0}^\infty F'(r) r^3 dr; \quad \mu_2^* = \frac{\int_{d_0}^\infty F''(r) r^4 dr}{7 \int_{d_0}^\infty F'(r) r^3 dr}.$$

Разница между μ_1 и μ_1^* , μ_2 и μ_2^* незначительная. Она зависит от плотности и характера упаковки молекул. Заметим, что при подстановке равенств (10)–(12) в уравнение равновесия $\sigma_{3i,j} = \Phi_3$, получается уравнение (7).

Напряжения, действующие по плоскостям, перпендикулярным Δx_1 и Δx_2 , находятся из выражений (10)–(12) заменой индексов ($1 \leftrightarrow 3$; $2 \leftrightarrow 3$). Линейные части уравнений соответствуют классическим уравнениям при $\nu = 0,25$. Аналогичные уравнения были получены в работе

[2] при моделировании среды хаотически ориентированными локальными элементами (упругими стержнями).

Запишем полученные уравнения в главных осях:

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= \mu_1^* \left[3u_{3,3} + u_{1,1} + u_{2,2} + 0.5\mu_2^* \left(9u_{3,3}^2 + 2u_{1,1}u_{2,2} + 3(u_{1,1} + u_{3,3})^2 + 3(u_{2,2} + u_{3,3})^2 \right) \right]; \\ \sigma_{22} &= \mu_1^* \left[3u_{2,2} + u_{1,1} + u_{3,3} + 0.5\mu_2^* \left(9u_{2,2}^2 + 2u_{1,1}u_{3,3} + 3(u_{1,1} + u_{2,2})^2 + 3(u_{2,2} + u_{3,3})^2 \right) \right]; \\ \sigma_{11} &= \mu_1^* \left[3u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} + 0.5\mu_2^* \left(9u_{1,1}^2 + 2u_{3,3}u_{2,2} + 3(u_{1,1} + u_{2,2})^2 + 3(u_{1,1} + u_{3,3})^2 \right) \right].\end{aligned}$$

Рассмотрим одноосное напряженное состояние. Примем $u_1 = u_2$, $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$, в результате получим

$$\begin{cases} \sigma_{33} = \mu_1^* \left[3e_3 + 2e_1 + 0.5\mu_2^* \left(15e_3^2 + 12e_1e_3 + 8e_1^2 \right) \right]; \\ \sigma_{11} = \mu_1^* \left[4e_1 + e_3 + 0.5\mu_2^* \left(24e_1^2 + 8e_1e_3 + 3e_3^2 \right) \right] = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь: $u_{2,2} = u_{1,1} = e_1$; $u_{3,3} = e_3$.

После обозначения $\nu_0 = \frac{e_1}{e_3}$ система (13) примет вид:

$$\begin{cases} \sigma_{33} = \mu_1^* \left[e_3 (3 + 2\nu_0) + \mu_2^* e_3^2 (4\nu_0^2 + 6\nu_0 + 7.5) \right]; \\ (4\nu_0 + 1) + \mu_2^* e_3 (12\nu_0^2 + 4\nu_0 + 1.5) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

При малых деформациях ν_0 равен $-0,25$. С увеличением e_3 коэффициент Пуассона ν значительно увеличивается. Приняв $\nu_0 = -0,25$, получим:

$$\sigma_{33} = 2,5\mu_1^* e_3 (1 + 2,5\mu_2^* e_3). \quad (15)$$

Аппроксимируем кривую мгновенного деформирования параболой:

$$\sigma_{33} = Ee_3 \left(1 - \frac{E}{4\sigma_{np}} e_3 \right). \quad (16)$$

Сопоставив выражения (15) и (16), найдем значения μ_1^* , μ_2^* :

$$\mu_1^* = 0,4E; \quad \mu_2^* = -0,1 \frac{E}{\sigma_{np}}.$$

Здесь E и σ_{np} – соответственно модуль упругости материала и предел прочности.

В заключении отметим, что

$$\text{rot } \bar{\sigma} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial e_1} & \frac{\partial}{\partial e_2} & \frac{\partial}{\partial e_3} \\ \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. поле главных напряжений потенциально и полученная модель описывает только упругое поведение материала.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бушманов Б.Н., Хромов Ю.А. Физика твердого тела. М.: Высшая школа, 1971. 224 с.
2. Радченко В.П., Еремин Ю.А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение - 1, 2004. 264 с.

Поступила 27.12.2005 г.