Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Миронов, О построении функций Римана для двух уравнений со старшими частными производными, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 49–59

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu444>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:56:04

УДК 517.95

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИЙ РИМАНА ДЛЯ ДВУХ УРАВНЕНИЙ
СО СТАРШИМИ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. Н. Миронов

Елабужский государственный педагогический университет,
423600, Елабуга, ул. Казанская, 89.

E-mail: miro73@mail.ru

*Для двух уравнений со старшими частными производными в двух- и трёхмерном пространствах построены в явном виде функции Римана.***Ключевые слова:** метод Римана, функция Римана, уравнения со старшими частными производными.

Рассмотрим уравнение

$$L_1(u) \equiv u_{xy} + au_{xx} + bu_{xy} + cu_x + du_y + eu = f_1 \quad (1)$$

и его трёхмерный аналог

$$L_2(u) \equiv u_{xyz} + a_{210}u_{xxy} + a_{201}u_{xxz} + a_{111}u_{xyz} + a_{200}u_{xx} + a_{110}u_{xy} + \\ + a_{101}u_{xz} + a_{011}u_{yz} + a_{100}u_x + a_{010}u_y + a_{001}u_z + a_{000}u = f_2. \quad (2)$$

В [1] получено решение задачи Гурса для (1) в терминах функции Римана $R = R(x, y, \xi, \eta)$, которая определяется как решение интегрального уравнения

$$v(x, y) - \int_{\eta}^y a(x, \beta)v(x, \beta) d\beta - \int_{\xi}^x [b(\alpha, y) - (x - \alpha)d(\alpha, y)]v(\alpha, y) d\alpha + \\ + \int_{\xi}^x \int_{\eta}^y [c(\alpha, \beta) - (x - \alpha)e(\alpha, \beta)]v(\alpha, \beta) d\beta d\alpha = 1. \quad (3)$$

Здесь, согласно методике работ [2, 3], получены достаточные условия на коэффициенты (1), приводящие к интегральным уравнениям для функции Римана, содержащим лишь один кратный интеграл.

Функцией Римана $R(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ уравнения (2) называется решение интегрального уравнения [4, с. 143–144]

$$v(x, y, z) - \int_{\zeta}^z a_{210}(x, y, \gamma)v(x, y, \gamma) d\gamma - \int_{\eta}^y a_{201}(x, \beta, z)v(x, \beta, z) d\beta - \\ - \int_{\xi}^x [a_{111}(\alpha, y, z) - (x - \alpha)a_{011}(\alpha, y, z)]v(\alpha, y, z) d\alpha + \\ + \int_{\eta}^y \int_{\zeta}^z a_{200}(x, \beta, \gamma)v(x, \beta, \gamma) d\gamma d\beta +$$

Миронов Алексей Николаевич — доцент кафедры математического анализа Елабужского государственного педагогического университета; к.ф.-м.н., доцент.

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\xi}^x \int_{\zeta}^z [a_{110}(\alpha, y, \gamma) - (x - \alpha)a_{010}(\alpha, y, \gamma)]v(\alpha, y, \gamma) d\gamma d\alpha + \\
 & \quad + \int_{\xi}^x \int_{\eta}^y [a_{101}(\alpha, \beta, z) - (x - \alpha)a_{001}(\alpha, \beta, z)]v(\alpha, \beta, z) d\beta d\alpha - \\
 & - \int_{\xi}^x \int_{\eta}^y \int_{\zeta}^z [a_{100}(\alpha, \beta, \gamma) - (x - \alpha)a_{000}(\alpha, \beta, \gamma)]v(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\beta d\alpha = 1. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Получены достаточные условия, приводящие к системе двух более простых, чем (4), интегральных уравнений для определения функции Римана. Эти результаты используются для построения функций Римана для частных случаев уравнений (1), (2) в явном виде.

1. Сформулируем задачу Гурса для уравнения (1).

ЗАДАЧА ГУРСА. Найти в прямоугольнике $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned}
 u(x_0, y) &= \varphi(y), \quad u_x(x_0, y) = \varphi_1(y), \\
 \varphi, \varphi_1 &\in C^1([y_0, y_1]), \quad u(x, y_0) = \psi(x), \quad \psi \in C^2([x_0, x_1]),
 \end{aligned}$$

где φ, φ_1, ψ — известные функции, удовлетворяющие в точке (x_0, y_0) условиям согласования

$$\varphi(y_0) = \psi(x_0), \quad \psi'(x_0) = \varphi_1(y_0).$$

На коэффициенты уравнения (1) налагаются следующие условия гладкости: $a \in C^{(2,0)}(D)$, $b \in C^{(1,1)}(D)$, $c \in C^{(1,0)}(D)$, $d \in C^{(0,1)}(D)$, $e \in C^{(0,0)}(D)$, где класс $C^{(k,l)}$ означает существование и непрерывность производных $\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}$ ($r = 0, \dots, k; s = 0, \dots, l$). Решение класса $C^{(2,1)}$ называется регулярным.

В работе [1] получена формула, позволяющая записать решение задачи Гурса:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y) &= R(x, y_0, x, y)u_x(x, y_0) + R(x_0, y, x, y)u_y(x_0, y) - \\
 & - M(x, y_0, x, y)u(x, y_0) - M(x_0, y, x, y)u(x_0, y) + \\
 & + M(x_0, y_0, x, y)u(x_0, y_0) - R(x_0, y_0, x, y)u_x(x_0, y_0) + \\
 & + \int_{y_0}^y P(x_0, \beta, x, y)u(x_0, \beta) d\beta - \int_{y_0}^y N(x_0, \beta, x, y)u_x(x_0, \beta) d\beta + \\
 & + \int_{x_0}^x Q(\alpha, y_0, x, y)u(\alpha, y_0) d\alpha + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y R(\alpha, \beta, x, y)f(\alpha, \beta) d\beta d\alpha, \quad (5)
 \end{aligned}$$

где $M = R_x - bR$, $N = R_y - aR$, $P = R_{xy} - (aR)_x - (bR)_y + cR$, $Q = R_{xx} - (bR)_x + dR$. Здесь дифференцирование функции Римана R производится по первой паре аргументов.

Проинтегрируем (5) по частям:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y) &= R(x_0, y_0, x, y)u_x(x_0, y_0) - M(x_0, y_0, x, y)u(x_0, y_0) + \\
 & + \int_{y_0}^y R(x_0, \beta, x, y)[u_{x\beta} + au_x + bu_{\beta} + cu - a_x u](x_0, \beta) d\beta -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{y_0}^y R_\alpha(\alpha, \beta, x, y) \Big|_{\alpha=x_0} [u_\beta + au](x_0, \beta) d\beta + \\
 & + \int_{x_0}^x R(\alpha, y_0, x, y) [u_{\alpha\alpha} + bu_\alpha + du](\alpha, y_0) d\alpha + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y R(\alpha, \beta, x, y) f(\alpha, \beta) d\beta d\alpha. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Пусть коэффициенты (1) удовлетворяют условиям

$$d \equiv b_x, \quad c \equiv ab + 2a_x. \quad (7)$$

Тогда сопряжённое к (1) уравнение

$$v_{xxy} - (av)_{xx} - (bv)_{xy} + (cv)_x + (dv)_y - ev = 0$$

принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - a\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - b\right) v_x = hv, \quad h = e - (a_x + ab)_x, \quad (8)$$

или в развёрнутой форме

$$v_{xxy} - av_{xx} - bv_{xy} + (ab - b_y)v_x = hv.$$

Если записать формулу (6) для уравнения (8), считая его неоднородным с правой частью hv , то получим

$$\begin{aligned}
 v_x(x, y) = & R(x_0, y_0, x, y)v_x(x_0, y_0) - M(x_0, y_0, x, y)v(x_0, y_0) + \\
 & + \int_{y_0}^y R(x_0, \beta, x, y) [v_{x\beta} - av_x - bv_\beta + (ab - b_\beta + a_x)v](x_0, \beta) d\beta - \\
 & - \int_{y_0}^y R_\alpha(\alpha, \beta, x, y) \Big|_{\alpha=x_0} [v_\beta - av](x_0, \beta) d\beta + \\
 & + \int_{x_0}^x R(\alpha, y_0, x, y) [v_{\alpha\alpha} - bv_\alpha](\alpha, y_0) d\alpha + \\
 & + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y R(\alpha, \beta, x, y) hv(\alpha, \beta) d\beta d\alpha.
 \end{aligned}$$

Здесь $v(x, y) = v(x, y, x_0, y_0)$. Используя вытекающие из интегрального уравнения (3) тождества [1]

$$M(x_0, y_0, x_0, y_0) \equiv N(x_0, y, x_0, y_0) \equiv P(x_0, y, x_0, y_0) \equiv Q(x, y_0, x_0, y_0) \equiv 0, \quad (9)$$

записанные для функции v , а также равенство $v(x_0, y_0, x_0, y_0) = 1$, видим, что все однократные интегралы обращаются в нуль. Следовательно,

$$v_x(x, y) = -R_\alpha(\alpha, y_0, x, y) \Big|_{\alpha=x_0} + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y R(\alpha, \beta, x, y) hv(\alpha, \beta) d\beta d\alpha. \quad (10)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция R из уравнения (10) имеет вид

$$R(x, y, x_0, y_0) = \exp \left(\int_x^{x_0} b(\alpha, y_0) d\alpha + \int_y^{y_0} a(x, \beta) d\beta \right). \quad (11)$$

Действительно, все тождества (9) выполняются. Кроме того, (11) удовлетворяет сопряжённому уравнению. Например, проверим выполнение тождества $P(x_0, y, x_0, y_0) \equiv 0$. В силу (8) R должна быть функцией Римана для уравнения

$$v_{xxy} - av_{xx} - bv_{xy} + (ab - b_y)v_x = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P(x_0, y, x_0, y_0) &= [R_{xy} + (aR)_x + (bR)_y + (ab - b_y)R](x_0, y, x_0, y_0) = \\ &= [(-aR)_x + (aR)_x + b_y R - abR + (ab - b_y)R](x_0, y, x_0, y_0) \equiv 0. \end{aligned}$$

Проинтегрируем (10) по x :

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \exp \left(\int_{y_0}^y a(x_0, \beta) d\beta \right) + b(x_0, y_0) \int_{x_0}^x R(x_0, y_0, \alpha, y) d\alpha + \\ &+ \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x \int_{x_0}^\alpha R(\alpha_1, \beta, \alpha, y) h v(\alpha_1, \beta) d\alpha_1 d\alpha d\beta. \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что в соответствии с (2) функция $v(x_0, y)$ определяется из уравнения

$$v(x_0, y) - \int_{y_0}^y a(x, \beta) v(x, \beta) d\beta = 1,$$

откуда

$$v(x_0, y) = \exp \left(\int_{y_0}^y a(x_0, \beta) d\beta \right).$$

Формула (12) представляет собой интегральное уравнение для $v(x, y)$, содержащее лишь один двукратный интеграл.

Возьмём теперь не (7), а другие условия:

$$d \equiv b_x, \quad c \equiv ab + a_x + b_y. \quad (13)$$

Тогда сопряжённое к (1) уравнение расщепляется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - b \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} - a \right) v_x = kv, \quad k = e - (b_y + ab)_x. \quad (14)$$

Аналогично изложенному выше, получаем

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \exp \left(\int_{y_0}^y a(x_0, \beta) d\beta \right) + b(x_0, y_0) \int_{x_0}^x R_1(x_0, y_0, \alpha, y) d\alpha + \\ &+ \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x \int_{x_0}^\alpha R_1(\alpha_1, \beta, \alpha, y) kv(\alpha_1, \beta) d\alpha_1 d\alpha d\beta, \quad (15) \end{aligned}$$

$$R_1(x, y, x_0, y_0) = \exp \left(\int_x^{x_0} b(\alpha, y) d\alpha + \int_y^{y_0} a(x_0, \beta) d\beta \right).$$

Используем (12) для построения функции Римана в явном виде. Пусть имеют место условия (7) и, кроме того,

$$a = a(y), \quad b \equiv 0. \quad (16)$$

Тогда (12) принимает вид

$$\frac{v(x, y)}{r(y)} = \frac{1}{r(y_0)} + \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x \int_{x_0}^\alpha h(\alpha_1, \beta) \frac{v(\alpha_1, \beta)}{r(\beta)} d\alpha_1 d\alpha d\beta,$$

где $r(y) = \exp \left(\int_0^y a(\beta) d\beta \right)$.

Вводя обозначение $w = \frac{v}{r}$, получаем для определения w задачу Гурса:

$$w_{xy} = ew, \quad w|_{x=x_0} = w|_{y=y_0} = \frac{1}{r(y_0)}, \quad w_x|_{x=x_0} = 0. \quad (17)$$

Если $e = e(y)$, то функция Римана уравнения (17) известна [1]:

$$\Omega(x, y, \xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\int_\eta^y e(\beta) d\beta \right]^k \frac{(x - \xi)^{2k}}{(2k)!}. \quad (18)$$

Используя (18), определим w_x по формуле (6):

$$w_x(x, y) = -\frac{1}{r(y_0)} \Omega_\alpha(\alpha, y_0, x, y) \Big|_{\alpha=x_0}. \quad (19)$$

Из (19) получаем

$$w(x, y) = \frac{1}{r(y_0)} \Omega(x_0, y_0, x, y), \quad (20)$$

следовательно,

$$v(x, y) = \exp \left(\int_{y_0}^y a(\beta) d\beta \right) \Omega(x_0, y_0, x, y). \quad (21)$$

Отметим, что условия (7), (16), $e = e(y)$ приводят к уравнению

$$u_{xy} + a(y)u_{xx} + e(y)u = 0. \quad (22)$$

Формула (21) даёт функцию Римана для (22). Условия (13), (16), $e = e(y)$ также приводят к уравнению (22).

2. Рассмотрим теперь уравнение (2). Пусть в параллелепипеде $D_1 = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$ коэффициенты (2) удовлетворяют включениям $a_{klm} \in C^{(k,l,m)}(\overline{D}_1)$, X, Y, Z — грани D_1 при $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ соответственно. Класс $C^{(k,l,m)}$ означает существование и непрерывность производных $\frac{\partial^{r_1+r_2+r_3}}{\partial x^{r_1} \partial y^{r_2} \partial z^{r_3}}$ ($r_1 = 0, \dots, k; r_2 = 0, \dots, l; r_3 = 0, \dots, m$). Решение класса $C^{(2,1,1)}$ называется регулярным.

ЗАДАЧА ГУРСА. Найти регулярное решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$u|_{\overline{X}} = \varphi(y, z), \quad u|_{\overline{Y}} = \psi(x, z), \quad u|_{\overline{Z}} = \theta(x, y), \quad u_x|_{\overline{X}} = \varphi_1(y, z).$$

При этом $\psi, \theta \in C^{(2,1)}$ на $\overline{Y}, \overline{Z}$ соответственно, $\varphi, \varphi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{X})$, а на рёбрах D выполняются условия согласования:

$$\begin{aligned} \varphi(y_0, z) &= \psi(x_0, z), \quad \varphi(y, z_0) = \theta(x_0, y), \quad \psi(x, z_0) = \theta(x, y_0), \\ \psi_x(x_0, z) &= \varphi_1(y_0, z), \quad \theta_x(x_0, y) = \varphi_1(y, z_0). \end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям формулу, дающую решение задачи Гурса для (2) [4, с. 145–146], которая является аналогом (5). В результате получим

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= R(x_0, y_0, z_0)u_x(x_0, y_0, z_0) - P_3(x_0, y_0, z_0)u(x_0, y_0, z_0) + \\ &\quad + \int_{x_0}^x R(\alpha, y_0, z_0)[u_{xx} + a_{111}u_x + a_{011}u](\alpha, y_0, z_0) d\alpha + \\ &\quad + \int_{y_0}^y R(x_0, \beta, z_0)[u_{xy} + a_{201}u_x + a_{111}u_y + a_{101}u - a_{201x}u](x_0, \beta, z_0) d\beta - \\ &\quad - \int_{y_0}^y R_x(x_0, \beta, z_0)[u_y + a_{201}u](x_0, \beta, z_0) d\beta + \\ &\quad + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, \gamma)[u_{xz} + a_{210}u_x + a_{111}u_z + a_{110}u - a_{210x}u](x_0, y_0, \gamma) d\gamma - \\ &\quad - \int_{z_0}^z R_x(x_0, y_0, \gamma)[u_z + a_{210}u](x_0, y_0, \gamma) d\gamma + \\ &\quad + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y R(\alpha, \beta, z_0)[u_{xxy} + a_{201}u_{xx} + a_{111}u_{xy} + a_{101}u_x + \\ &\quad + a_{011}u_y + a_{001}u](\alpha, \beta, z_0) d\beta d\alpha + \\ &\quad + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z R(\alpha, y_0, \gamma)[u_{xxz} + a_{210}u_{xx} + a_{111}u_{xz} + a_{110}u_x + \\ &\quad + a_{011}u_z + a_{010}u](\alpha, y_0, \gamma) d\gamma d\alpha + \\ &\quad + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z R(x_0, \beta, \gamma)[u_{xyz} + a_{210}u_{xy} + a_{201}u_{xz} + a_{111}u_{yz} + a_{200}u_x + \\ &\quad + a_{110}u_y + a_{101}u_z + a_{100}u - a_{210x}u_y - a_{201x}u_z - a_{200x}u](x_0, \beta, \gamma) d\gamma d\beta - \\ &\quad - \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z R_x(x_0, \beta, \gamma)[u_{yz} + a_{210}u_y + a_{201}u_z + a_{200}u](x_0, \beta, \gamma) d\gamma d\beta + \\ &\quad + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z R(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)f(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\beta d\alpha. \quad (23) \end{aligned}$$

В (23) всюду второй тройкой аргументов являются переменные x, y, z , а дифференцирование производится по первым трём аргументам.

Из интегрального уравнения (4) следует, что функция Римана удовлетворяет сопряжённому уравнению

$$v_{xxyz} - (a_{210}v)_{xxy} - (a_{201}v)_{xxz} - (a_{111}v)_{xyz} + (a_{200}v)_{xx} + (a_{110}v)_{xy} + \\ + (a_{101}v)_{xz} + (a_{011}v)_{yz} - (a_{100}v)_x - (a_{010}v)_y - (a_{001}v)_z + a_{000}v = 0, \quad (24)$$

а также тождествам

$$P_1(x, y, \zeta, x, y, z) \equiv P_2(x, \eta, z, x, y, z) \equiv P_3(x, y, z, x, y, z) \equiv \\ \equiv Q_1(x, \eta, \zeta, x, y, z) \equiv Q_2(x, y, \zeta, x, y, z) \equiv Q_3(x, \eta, z, x, y, z) \equiv \\ \equiv Q_4(\xi, y, z, x, y, z) \equiv S_1(x, \eta, \zeta, x, y, z) \equiv S_2(\xi, y, \zeta, x, y, z) \equiv \\ \equiv S_3(\xi, \eta, z, x, y, z) \equiv 0, \quad R(x, y, z, x, y, z) \equiv 1, \quad (25)$$

где $P_1 = R_z - a_{210}R$, $P_2 = R_y - a_{201}R$, $P_3 = R_x - a_{111}R$, $Q_1 = R_{yz} - (a_{210}R)_y - (a_{201}R)_z + a_{200}R$, $Q_2 = R_{xz} - (a_{210}R)_x - (a_{111}R)_z + a_{110}R$, $Q_3 = R_{xy} - (a_{201}R)_x - (a_{111}R)_y + a_{101}R$, $Q_4 = R_{xx} - (a_{111}R)_x + a_{011}R$, $S_1 = R_{xyz} - (a_{210}R)_{xy} - (a_{201}R)_{xz} - (a_{111}R)_{yz} + (a_{200}R)_x + (a_{110}R)_y + (a_{101}R)_z - a_{100}R$, $S_2 = R_{xxz} - (a_{210}R)_{xx} - (a_{111}R)_{xz} + (a_{110}R)_x + (a_{011}R)_z - a_{010}R$, $S_3 = R_{xxy} - (a_{201}R)_{xx} - (a_{111}R)_{xy} + (a_{101}R)_x + (a_{011}R)_y - a_{001}R$. Здесь и далее обозначается $v(x, y, z) = v(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что если

$$a_{200} = a_{210}a_{201} + a_{210}y, \quad a_{110} = a_{210}a_{111} + 2a_{210}x, \\ a_{101} = a_{201}a_{111} + 2a_{201}x, \quad a_{011} = a_{111}x, \quad a_{100} = a_{200}a_{111} + 2a_{200}x, \quad (26) \\ a_{010} = (a_{110} - a_{210}x)_x, \quad a_{001} = (a_{101} - a_{201}x)_x,$$

то уравнение (24) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - a_{210}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - a_{201}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_{111}\right)v_x = h_{123}v, \quad (27) \\ h_{123} = (a_{100} - a_{200}x)_x - a_{000}.$$

Если считать уравнение (27) уравнением с правой частью $h_{123}v$, то функция Римана для него запишется в форме

$$R_{123}(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \exp\left(\int_x^{x_0} a_{111}(\alpha, y_0, z_0) d\alpha + \right. \\ \left. + \int_y^{y_0} a_{201}(x, \beta, z_0) d\beta + \int_z^{z_0} a_{210}(x, y, \gamma) d\gamma\right). \quad (28)$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Действительно, соответствующее (27) однородное уравнение имеет вид

$$v_{xxyz} - a_{210}v_{xxy} - a_{201}v_{xxz} - a_{111}v_{xyz} - (a_{201}z - a_{210}a_{201})v_{xx} - \\ - (a_{111}z - a_{210}a_{111})v_{xy} - (a_{111}y - a_{201}a_{111})v_{xz} + \\ + (a_{210}(a_{111}y - a_{201}a_{111}) + (a_{201}a_{111} - a_{111}y)_z)v_x = 0.$$

Проверим теперь, например, следующее тождество:

$$\begin{aligned} S_2(x, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0) &= [R_{123xx} - (a_{210}R_{123})_{xx} - (a_{111}R_{123})_{xz} + \\ &+ (a_{110}R_{123})_x + (a_{011}R_{123})_z - a_{010}R_{123}](x, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0) = \\ &= [(-a_{210}R_{123})_{xx} + (a_{210}R_{123})_{xx} + ((a_{111}z - a_{210}a_{111})R_{123})_x - \\ &- ((a_{111}z - a_{210}a_{111})R_{123})_x](x, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0) \equiv 0. \end{aligned}$$

Здесь дифференцирование по x, z означает дифференцирование по первой тройке аргументов. То, что функция R_{123} удовлетворяет сопряжённому уравнению и остальным тождествам, проверяется аналогично.

Запишем теперь формулу (23) для уравнения (27), которое считаем неоднородным с правой частью $h_{123}v$. Непосредственным вычислением убеждаемся, что все подынтегральные выражения обращаются в нуль. Следовательно, (23) принимает вид

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z) &= -R_{123\alpha} \Big|_{\alpha=x_0} (\alpha, y_0, z_0, x, y, z) + \\ &+ \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z R_{123}(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) h_{123} v(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma d\beta d\alpha. \end{aligned} \quad (29)$$

Проинтегрируем (29) по x :

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= v(x_0, y, z) + \int_{z_0}^z a_{210}(x_0, y, \gamma) d\gamma + \\ &+ a_{111}(x_0, y_0, z_0) \int_{x_0}^x R_{123}(x_0, y_0, \alpha, y) d\alpha + \\ &+ \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x R_{123}(\alpha_1, \beta, \gamma, \alpha, y, z) h_{123} v(\alpha_1, \beta, \gamma) d\alpha_1 d\alpha d\beta d\gamma. \end{aligned} \quad (30)$$

Для определения $v(x_0, y, z)$ из (4) получаем ещё одно интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} v(x_0, y, z) &- \int_{z_0}^z a_{210}(x_0, y, \gamma) v(x_0, y, \gamma) d\gamma - \int_{y_0}^y a_{201}(x_0, \beta, z) v(x_0, \beta, z) d\beta + \\ &+ \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z a_{200}(x_0, \beta, \gamma) v(x_0, \beta, \gamma) d\gamma d\beta = 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнения (30), (31) представляют собой систему интегральных уравнений для определения функции Римана $v(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$.

Используем указанную систему для построения функции Римана в явном виде. Пусть имеют место условия (26) и, кроме того,

$$a_{210} = B(z), \quad a_{201} = A(y), \quad a_{111} \equiv 0. \quad (32)$$

При указанных условиях решением (31) будет функция

$$v(x_0, y, z) = \exp \left(\int_{y_0}^y A(\beta) d\beta + \int_{z_0}^z B(\gamma) d\gamma \right).$$

Тогда (30) принимает вид

$$\frac{v(x, y, z)}{r(y)s(z)} = \frac{1}{r(y_0)s(z_0)} + \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x h_{123}(\alpha_1, \beta, \gamma) \frac{v(\alpha_1, \beta, \gamma)}{r(\beta)s(\gamma)} d\alpha_1 d\beta d\gamma,$$

$$r(y) = \exp \left(\int_0^y A(\beta) d\beta \right), \quad s(z) = \exp \left(\int_0^z B(\gamma) d\gamma \right).$$

Вводя обозначение $w = \frac{v}{rs}$, получаем для определения w задачу Гурса:

$$w_{xyz} = -a_{000}w, \quad w|_{x=x_0} = w|_{y=y_0} = w|_{z=z_0} = \frac{1}{r(y_0)s(z_0)}, \quad w_x|_{x=x_0} = 0. \quad (33)$$

Если

$$a_{000} = \varphi(y)\psi(z), \quad (34)$$

то функция Римана Ω уравнения (33) может быть найдена из интегрального уравнения

$$\Omega(x, y, z) + \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x (x - \alpha) \varphi(\beta) \psi(\gamma) \Omega(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma = 1.$$

Решение этого уравнения ищем в виде ряда Неймана. Получаем

$$\Omega(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left[\int_{\eta}^y \varphi(\beta) d\beta \right]^k \left[\int_{\zeta}^z \psi(\gamma) d\gamma \right]^k \frac{(x - \xi)^{2k}}{(2k)!}. \quad (35)$$

Используя (35), определим w_x по формуле (23):

$$w_x(x, y, z) = -\frac{1}{r(y_0)s(z_0)} \Omega_{\alpha}(\alpha, y_0, z_0, x, y, z) \Big|_{\alpha=x_0}. \quad (36)$$

Из (36) непосредственным вычислением получаем

$$w(x, y, z) = \frac{1}{r(y_0)s(z_0)} \Omega(x_0, y_0, z_0, x, y, z),$$

следовательно,

$$v(x, y, z) = \exp \left(\int_{y_0}^y A(\beta) d\beta + \int_{z_0}^z B(\gamma) d\gamma \right) \Omega(x_0, y_0, z_0, x, y, z). \quad (37)$$

Отметим, что условия (26), (32), (34) приводят к уравнению

$$u_{xxy} + B(z)u_{xy} + A(y)u_{xxz} + A(y)B(z)u_{xx} + \varphi(y)\psi(z)u = 0. \quad (38)$$

Формула (37) даёт функцию Римана для (38).

Выпишем другие условия, которые приводят к соответствующим аналогам уравнения (27), функции Римана (28) и, в конечном счёте, к аналогу интегрального уравнения (30) для функции v :

$$\begin{aligned} a_{200} &= a_{210}a_{201} + a_{201z}, & a_{110} &= a_{210}a_{111} + 2a_{210x}, \\ a_{101} &= a_{201}a_{111} + 2a_{201x}, & a_{011} &= a_{111x}, & a_{100} &= a_{200}a_{111} + 2a_{200x}, \\ a_{010} &= (a_{110} - a_{210x})_x, & a_{001} &= (a_{101} - a_{201x})_x, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial y} - a_{201}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - a_{210}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_{111}\right)v_x = h_{132}v; \\ & a_{200} = a_{210}a_{201} + a_{210y}, \quad a_{110} = a_{210}a_{111} + 2a_{210x}, \\ & a_{101} = a_{201}a_{111} + a_{201x} + a_{111y}, \quad a_{011} = a_{111x}, \\ & a_{100} = a_{201}(a_{110} - a_{210x}) + (a_{110} - a_{210x})_y + a_{200x}, \\ & a_{010} = (a_{110} - a_{210x})_x, \quad a_{001} = (a_{101} - a_{201x})_x, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial z} - a_{210}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_{111}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - a_{201}\right)v_x = h_{213}v; \\ & a_{200} = a_{210}a_{201} + a_{201z}, \quad a_{110} = a_{210}a_{111} + a_{210x} + a_{111z}, \\ & a_{101} = a_{201}a_{111} + 2a_{201x}, \quad a_{011} = a_{111x}, \\ & a_{100} = a_{210}(a_{101} - a_{201x}) + (a_{101} - a_{201x})_z + a_{200x}, \\ & a_{010} = (a_{110} - a_{210x})_x, \quad a_{001} = (a_{101} - a_{201x})_x, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial y} - a_{201}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_{111}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - a_{210}\right)v_x = h_{312}v; \\ & a_{200} = a_{210}a_{201} + a_{210y}, \quad a_{110} = a_{210}a_{111} + a_{210x} + a_{111z}, \\ & a_{101} = a_{201}a_{111} + a_{201x} + a_{111y}, \quad a_{011} = a_{111x}, \\ & a_{100} = a_{201}(a_{110} - a_{210x}) + (a_{110} - a_{210x})_y + a_{200x}, \\ & a_{010} = (a_{110} - a_{210x})_x, \quad a_{001} = (a_{101} - a_{201x})_x, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} - a_{111}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - a_{210}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - a_{201}\right)v_x = h_{231}v; \\ & a_{200} = a_{210}a_{201} + a_{201z}, \quad a_{110} = a_{210}a_{111} + a_{210x} + a_{111z}, \\ & a_{101} = a_{201}a_{111} + a_{201x} + a_{111y}, \quad a_{011} = a_{111x}, \\ & a_{100} = a_{210}(a_{101} - a_{201x}) + (a_{101} - a_{201x})_z + a_{200x}, \\ & a_{010} = (a_{110} - a_{210x})_x, \quad a_{001} = (a_{101} - a_{201x})_x, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - a_{111}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - a_{201}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - a_{210}\right)v_x = h_{321}v.$$

Здесь всюду

$$h_{ijk} = (a_{100} - a_{200x})_x - a_{000},$$

(i, j, k) — упорядоченный набор чисел 1, 2, 3.

Все условия (39)–(43) приводят к интегральным уравнениям для функции Римана уравнения (2), которые получаются из уравнения (30) путём замены в нем функций R_{123} , h_{123} на соответствующие аналоги. Если дополнительно к любому из этих условий добавить (32), (34), то приходим к функции Римана для уравнения (38).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жегалов, В. И. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка [Текст] / В. И. Жегалов, Е. А. Уткина // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 10. — С. 73–76.
2. Жегалов, В. И. О трёхмерной функции Римана [Текст] / В. И. Жегалов // Сиб. мат. ж. — 1997. — Т. 38, № 10. — С. 1074–1079.
3. Жегалов, В. И. Об интегральных уравнениях для функции Римана [Текст] / В. И. Жегалов, М. П. Котухов // Изв. вузов. Математика. — 1998. — № 1. — С. 26–30.

4. Жегалов, В. И. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными [Текст] / В. И. Жегалов, А. Н. Миронов — Казань: Казан. мат. общ-во, 2001. — 226 с. — ISBN 5-900975-26-6.

Поступила в редакцию 02/II/2008;
в окончательном варианте — 27/VI/2008.

MSC: 35G15

RIEMANN FUNCTION FORMULATION FOR TWO EQUATIONS WITH LEADING PARTIAL DERIVATIVES

A. N. Mironov

Elabuga State Pedagogical University,
423600, Elabuga, Kazanskaya st., 89.

E-mail: miro73@mail.ru

Riemann functions were constructed for two linear equations with leading partial derivatives in two- and three-dimensional spaces.

Key words: *Riemann method, Riemann function, equations with leading partial derivatives.*

Original article submitted 02/II/2008;
revision submitted 27/VI/2008.

Mironov Alexey Nikolaevich, Ph. D. (Phis. & Math.) Assist. Prof., Dept. of Mathematical Analysis of Elabuga State Pedagogical University.