Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Репин, О задаче с операторами М. Сайго на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 10–14

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu446>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:49:27

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956

О. А. Репин

О ЗАДАЧЕ С ОПЕРАТОРАМИ М. САЙГО НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для гиперболического уравнения Геллерстедта в области, ограниченной характеристиками этого уравнения и содержащей внутри линию вырождения, исследована нелокальная краевая задача. Аффиксы точек характеристик и след искомого решения на линии вырождения уравнения связаны линейной комбинацией обобщенных операторов дробного интегродифференцирования. Доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$|y|^l U_{xx} - U_{yy} = 0, \quad (1)$$

где $l = m$ при $y < 0$ и $l = n$ при $y > 0$; m, n — положительные постоянные в конечной области D , ограниченной характеристиками

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1,$$

$$AC_1: x - \frac{2}{n+2}y^{\frac{n+2}{2}} = 0, \quad BC_1: x + \frac{2}{n+2}y^{\frac{n+2}{2}} = 1$$

уравнения (1).

Пусть $D^+ = D \cap (y > 0)$, $D^- = D \cap (y < 0)$, J — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$, а $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ — аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in J$, с характеристиками AC и BC_1 соответственно; $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ и $(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ — операторы обобщенного дробного интегродифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; x)$, введенные в [1] (см. также [2, с. 326–327]) и имеющие при действительных α, β, η и $0 < x < 1$ вид

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}\right) f(t) dt & (\alpha > 0), \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f)(x) & (\alpha \leq 0, n = [-\alpha] + 1); \end{cases} \quad (2)$$

$$(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; \frac{t-x}{1-x}\right) f(t) dt & (\alpha > 0), \\ \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{1-}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f)(x) & (\alpha \leq 0, n = [-\alpha] + 1). \end{cases} \quad (3)$$

Если $\alpha + \beta = 0$, то операторы (2)–(3) сводятся к дробным интегралам $(I_{0+}^{\alpha} f)(x)$, $(I_{1-}^{\alpha} f)(x)$ и производным $(D_{0+}^{\alpha} f)(x)$, $(D_{1-}^{\alpha} f)(x)$ Римана–Лиувилля [2, с. 43–44], [3, с. 13–16].

Для уравнения (1) изучим следующую краевую задачу.

ЗАДАЧА. Найти решение $U(x, y)$ уравнения (1) из класса $U(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D^+ \cup J) \cap C^1(D^- \cup J) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} A_1 \left(I_{0+}^{a, \beta, \beta-1-a} U[\Theta_0(t)] \right)(x) + A_2 \left(I_{0+}^{a+\beta, \beta, \beta-1-a} U(t, -0) \right)(x) &= \Phi_1(x), \\ B_1 \left(I_{1-}^{a_1, b_1, \beta_1-1-a_1} U[\Theta_1(t)] \right)(x) + B_2 \left(I_{1-}^{a_1+\beta_1, b_1, \beta_1-1-a_1} U(t, +0) \right)(x) &= \Phi_2(x) \end{aligned} \quad (4)$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} U_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} U_y(x, y), \quad (5)$$

где $\beta = \frac{m}{2m+4}$, $\beta_1 = \frac{n}{2n+4}$; $A_{1,2}$, $B_{1,2}$ — ненулевые действительные константы одного знака;

$$\begin{aligned} -\beta < a < 1-\beta, \quad b > 1; \\ -\beta_1 < a_1 < 1-\beta_1, \quad b_1 > 1; \end{aligned} \quad (6)$$

$\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ — такие заданные функции, что

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &\in H^{\lambda_1}(\overline{J}), \quad 0 < a + \beta < \lambda_1 \leq 1; \\ \Phi_2(x) &\in H^{\lambda_2}(\overline{J}), \quad 0 < a_1 + \beta_1 < \lambda_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Ниже на функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ будут наложены еще дополнительные условия.

Отметим, что истоком данной работы послужили результаты статей А. М. Нахушева [4] и С. К. Кумыковой, Ф. Б. Нахушевой [5].

2. Доказательство единственности решения задачи. Пусть $v_+(x) = \lim_{y \rightarrow +0} U_y(x, y)$,

$$\tau_+(x) = U(x, +0), \quad v_-(x) = \lim_{y \rightarrow -0} U_y(x, y), \quad \tau_-(x) = U(x, -0).$$

Выписывая решения задачи Коши [6] для уравнения (1) соответственно в областях D^- и D^+ , найдем [7]

$$\begin{aligned} U[\Theta_0(x)] &= \gamma_1 \Gamma(\beta) \left(I_{0+}^{\beta, 0, \beta-1} \tau_-(t) \right)(x) - \gamma_2 \Gamma(1-\beta) \left(I_{0+}^{1-\beta, 2\beta-1, \beta-1} v_-(t) \right)(x), \\ U[\Theta_1(x)] &= \gamma_3 \Gamma(\beta_1) \left(I_{1-}^{\beta_1, 0, \beta_1-1} \tau_+(t) \right)(x) + \gamma_4 \Gamma(1-\beta_1) \left(I_{1-}^{1-\beta_1, 2\beta_1-1, \beta_1-1} v_+(t) \right)(x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}, \\ \gamma_3 &= \frac{\Gamma(2\beta_1)}{\Gamma^2(\beta_1)}, \quad \gamma_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{2\beta_1} \frac{\Gamma(1-2\beta_1)}{\Gamma^2(1-\beta_1)}. \end{aligned}$$

Подставляя $U[\Theta_0(x)]$ и $U[\Theta_1(x)]$ соответственно в краевые условия (4), на основании формул композиций для операторов (2) и (3) [1]

$$\begin{aligned} \left(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \left(I_{0+}^{\gamma, \delta, \alpha+\eta} \Phi \right)(t) \right)(x) &= \left(I_{0+}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta} \Phi \right)(x) \quad (\gamma > 0), \\ \left(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} \left(I_{1-}^{\gamma, \delta, \alpha+\eta} \Phi \right)(t) \right)(x) &= \left(I_{1-}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta} \Phi \right)(x) \quad (\gamma > 0) \end{aligned} \quad (7)$$

после несложных преобразований можно записать

$$\begin{aligned} (A_1 \gamma_1 \Gamma(\beta) + A_2) \left(I_{0+}^{a+\beta, \beta, \beta-1-a} \tau_-(t) \right)(x) - A_1 \gamma_2 \Gamma(1-\beta) \left(I_{0+}^{a+1-\beta, \beta+2\beta-1, \beta-1-a} v_-(t) \right)(x) &= \Phi_1(x), \\ (B_1 \gamma_3 \Gamma(\beta_1) + B_2) \left(I_{1-}^{a_1+\beta_1, b_1, \beta_1-1-a_1} \tau_+(t) \right)(x) + B_1 \gamma_4 \Gamma(1-\beta_1) \left(I_{1-}^{a_1+1-\beta_1, b_1+2\beta_1-1, \beta_1-1-a_1} v_+(t) \right)(x) &= \Phi_2(x). \end{aligned} \quad (8)$$

На обе части равенств (8) подействуем соответственно операторами $I_{0+}^{-(a+\beta), -b, 2\beta-1}$ и $I_{1-}^{-(a_1+\beta_1), -b_1, 2\beta_1-1}$.

В результате получим

$$\tau_-(x) = \kappa_1^* \left(I_{0+}^{1-2\beta} v_-(t) \right)(x) + g_1(x), \quad (9)$$

$$\tau_+(x) = \kappa_2^* \left(I_{1-}^{1-2\beta_1} v_+(t) \right)(x) + g_2(x), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_1^* &= \frac{A_1 \gamma_2 \Gamma(1-\beta)}{A_1 \gamma_1 \Gamma(\beta) + A_2}, \quad \kappa_2^* = -\frac{B_1 \gamma_4 \Gamma(1-\beta_1)}{B_1 \gamma_3 \Gamma(\beta_1) + B_2}; \\ g_1(x) &= \frac{1}{A_1 \gamma_1 \Gamma(\beta) + A_2} \left(I_{0+}^{-(a+\beta), -b, 2\beta-1} \phi_1(t) \right)(x), \\ g_2(x) &= \frac{1}{B_1 \gamma_3 \Gamma(\beta_1) + B_2} \left(I_{1-}^{-(a_1+\beta_1), -b_1, 2\beta_1-1} \phi_2(t) \right)(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Поддействуем на обе части равенства (9) оператором $D_{0+}^{1-2\beta}$, на обе части равенства (10) оператором $D_{1-}^{1-2\beta_1}$. Учитывая соотношения $D_{0+}^\alpha I_{0+}^\alpha f = f$ ($\alpha > 0$), $D_{1-}^\alpha I_{1-}^\alpha f = f$ ($\alpha > 0$) и полагая $\tau_-(x) = \tau_+(x) = \tau(x)$, будем иметь

$$v_-(x) = \frac{1}{\kappa_1^*} \left[\left(D_{0+}^{1-2\beta} \tau(t) \right)(x) - \left(D_{0+}^{1-2\beta} g_1(t) \right)(x) \right], \quad (12)$$

$$v_+(x) = \frac{1}{\kappa_2^*} \left[\left(D_{1-}^{1-2\beta_1} \tau(t) \right)(x) - \left(D_{1-}^{1-2\beta_1} g_2(t) \right)(x) \right]. \quad (13)$$

В силу принципа экстремума для гиперболических уравнений [8] положительный максимум (отрицательный минимум) функции $U(x, y)$ достигается в областях D^- и D^+ в точке $(x_0, 0) \in J$. Пользуясь тем, что дробные производные в точке положительного максимума строго положительны [3, с. 123] (в точке отрицательного минимума строго отрицательны), при $g_1(x) = g_2(x) \equiv 0$ из (12) и (13) получаем неравенства $v_-(x_0) > 0$ ($v_-(x_0) < 0$), $v_+(x_0) < 0$ ($v_+(x_0) > 0$). Эти неравенства противоречат условию сопряжения (5).

Полученное противоречие доказывает единственность решения задачи для уравнения (1).

3. Доказательство существования решения задачи. Исключая из (9) и (10) функции $\tau_-(x)$ и $\tau_+(x)$, учитывая условие сопряжения (5), получим

$$\kappa_1^* \left(I_{0+}^{1-2\beta} v(t) \right)(x) - \kappa_2^* \left(I_{1-}^{1-2\beta_1} v(t) \right)(x) = g_2(x) - g_1(x), \quad (14)$$

где $v_-(x) = v_+(x) \equiv v(x)$.

Будем считать, что $m > n$ ($\beta > \beta_1$).

Применив к обеим частям равенства (14) оператор $D_{0+}^{1-2\beta}$, имеем

$$\kappa_1^* v(x) - \kappa_2^* D_{0+}^{1-2\beta} \left(I_{1-}^{1-2\beta_1} v(t) \right)(x) = f(x), \quad (15)$$

где

$$f(x) = D_{0+}^{1-2\beta} [g_2(x) - g_1(x)]. \quad (16)$$

Исследуем вопрос разрешимости интегрального уравнения (15). Преобразуем левую часть (15):

$$\begin{aligned} J_1(x) &= D_{0+}^{1-2\beta} \left(I_{1-}^{1-2\beta_1} v(t) \right)(x) = \frac{d}{dx} I_{0+}^{2\beta} \left(I_{1-}^{1-2\beta_1} v(t) \right)(x) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \frac{1}{\Gamma(1-2\beta_1)} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x (x-t)^{2\beta-1} dt \int_t^1 (\xi-t)^{-2\beta_1} v(\xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \frac{1}{\Gamma(1-2\beta_1)} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x v(\xi) d\xi \int_0^\xi (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt + \int_x^1 v(\xi) d\xi \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt \right]. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$J_{11_\delta}(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_0^{x-\delta} v(\xi) d\xi \int_0^\xi (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt + \int_{x+\delta}^1 v(\xi) d\xi \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt \right],$$

откуда

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{1}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta_1)} \lim_{\delta \rightarrow 0} J_{11_\delta}(x) = \frac{1}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta_1)} \times \\ &\quad \times \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ -[v(x) - v(x-\delta)] \int_0^{x-\delta} (x-t)^{2\beta-1} (x-\delta-t)^{-2\beta_1} dt - \right. \\ &\quad \left. -[v(x+\delta) - v(x)] \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (x+\delta-t)^{-2\beta_1} dt + \right. \\ &\quad \left. + v(x) \left[\int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (x+\delta-t)^{-2\beta_1} dt - \int_0^{x-\delta} (x-t)^{2\beta-1} (x-\delta-t)^{-2\beta_1} dt \right] + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{x-\delta} v(\xi) d\xi \frac{d}{dx} \int_0^\xi (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt + \int_{x+\delta}^1 v(\xi) d\xi \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

По стандартной схеме вычислений нетрудно показать, что

$$J_{12}(x) = \int_0^{x-\delta} (x-t)^{2\beta-1} (x-\delta-t)^{-2\beta_1} dt = \frac{1}{1-2\beta_1} x^{2\beta-1} (x-\delta)^{1-2\beta_1} F\left(1, 1-2\beta; 2-2\beta_1; \frac{x-\delta}{x}\right),$$

$$J_{13}(x) = \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (x+\delta-t)^{-2\beta_1} dt = \frac{1}{2\beta} x^{2\beta} (x+\delta)^{-2\beta_1} F\left(1, 2\beta_1; 1+2\beta; \frac{x}{x+\delta}\right).$$

А поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} [-v(x) - v(x-\delta)] J_{12}(x) &= 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} [v(x+\delta) - v(x)] J_{13}(x) = 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} v(x) [J_{13}(x) - J_{12}(x)] &= 0. \end{aligned}$$

Далее установим свойства ядра $K_1(x, \xi)$ в (17):

$$K_1(x, \xi) = \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt = \frac{\xi^{2\beta-2\beta_1}}{2\beta} \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{x}{\xi} \right)^{2\beta} F\left(1, 2\beta; 1+2\beta; \frac{x}{\xi}\right) \right].$$

Воспользуемся последовательно формулами [9]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^{c-1} F(a, b; c; z) &= (c-1) z^{c-2} F(a, b; c-1; z); \\ F(a, b; c; z) &= (1-z)^{c-a} F(c-a, c-b; c; z). \end{aligned} \quad (18)$$

Получим окончательный вид для $K_1(x, \xi)$:

$$K_1(x, \xi) = \left(\frac{\xi}{x} \right)^{1-2\beta} (\xi-x)^{2\beta-2\beta_1-1} F\left(2\beta-1, 2\beta-2\beta_1; 2\beta; \frac{x}{\xi}\right).$$

Аналогично исследуем поведение ядра $K_2(x, \xi)$ в (17):

$$K_2(x, \xi) = \frac{d}{dx} \int_0^\xi (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt = \frac{\xi^{2\beta-2\beta_1}}{1-2\beta_1} \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{\xi}{x} \right)^{1-2\beta} F\left(1-2\beta, 1; 2-2\beta_1; \frac{\xi}{x}\right) \right].$$

Опираясь на формулу [9]

$$\frac{d}{dz} z^a F(a, b; c; z) = a z^{a-1} F(a+1, b; c; z)$$

и вторую формулу из (18), имеем

$$K_2(x, \xi) = \frac{2\beta - 1}{1 - 2\beta_1} \left(\frac{\xi}{x} \right)^{1-2\beta_1} (x - \xi)^{2\beta - 2\beta_1 - 1} F \left(2\beta - 2\beta_1; 1 - 2\beta_1; 2 - 2\beta_1; \frac{\xi}{x} \right).$$

Из приведенных вычислений видно, что ядра $K_1(x, \xi)$ и $K_2(x, \xi)$ бесконечно дифференцируемы в квадрате $0 < x, \xi < 1$ при $\xi \neq x$ и допускают следующие оценки при $\beta > \beta_1$:

$$K_1(x, \xi) = O(1)(x - \xi)^{2\beta - 2\beta_1 - 1}, \quad K_2(x, \xi) = O(1)(\xi - x)^{2\beta - 2\beta_1 - 1},$$

где $O(1)$ означает ограниченную в $\bar{J} \times \bar{J}$ величину.

Исследуем гладкость правой части $f(x)$ уравнения (15). Для этого нам потребуется лемма 1 из работы [10].

ЛЕММА 1. Пусть $0 < -\alpha < \lambda \leq 1$ и $\beta < \min[0, 1 + \eta]$. Если $\varphi(x) \in H^\lambda[0, 1]$, то $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x)$, $(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) \in H^{\min[\lambda + \alpha, -\beta]}[0, 1]$.

Так как $\varphi_1(x) \in H^{\lambda_1}(\bar{J})$, $0 < a + \beta < \lambda_1 \leq 1$, $b > 1$, то на основании леммы 1 имеем, что $g_1(x) \in H^{\lambda_1 + a + \beta}(\bar{J})$.

Далее, так как $\varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}(\bar{J})$, $0 < a_1 + \beta_1 < \lambda_2 \leq 1$, $b_1 > 1$, то в силу леммы 1 $g_2(x) \in H^{\lambda_2 + a_1 + \beta_1}(\bar{J})$. А тогда $g(x) = [g_2(x) - g_1(x)] \in H^{\lambda_0}(\bar{J})$, где $\lambda_0 = \min(\lambda_1 + a + \beta, \lambda_2 + a_1 + \beta_1)$.

Будем считать, что известные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ таковы, что функция $g(x) = 0$ при $x = 0$. Тогда $f(x)$, определяемая формулой (16), может быть представлена следующим образом:

$$f(x) = \int_0^x (x - t)^{2\beta - 1} g'(t) dt.$$

Из установленных свойств ядер $K_1(x, \xi)$, $K_2(x, \xi)$ и правой части $f(x)$ заключаем, что при $m > n$ ($\beta > \beta_1$) уравнение (15) есть уравнение Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого в требуемом классе следует из единственности решения задачи.

Исследование случая $m < n$ не представляет трудности и проводится аналогично случаю $m > n$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Saigo M. A certain boundary value problem for the Euler–Poisson–Darboux equation // Math. Japan, 1979. — Vol. 24, No. 4. — P. 377–385.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск, 1987. — 688 с.
3. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. — Нальчик, 2000. — 299 с.
4. Нахушев А. М. К теории вырождающихся гиперболических уравнений // Сообщения АН Груз. ССР, 1975. — Т. 77, № 3. — С. 545–548.
5. Кумыкова С. К., Нахушева Ф. Б. Дифференц. уравнения, 1978. — Т. 14, № 1. — С. 50–65.
6. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
7. Ретин О. А. Нелокальная краевая задача для парабола-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения, 1992. — Т. 23, № 1. — С. 173–176.
8. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. N. A maximum principle for a class of hyperbolic equation and applications to mixed elliptic-hyperbolic type // Commun Pure and Appl. Math., 1953. — Vol. 4. — P. 455–470.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1973. — 296 с.
10. Saigo M., Kilbas A. A. Generalized fractional integrals and derivatives in Holder spaces / Transform Methods and Special Functions. Sofia-94. — Singapore, 1995. — P. 282–293.

Поступила 26.08.2006 г.