Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Кузнецова, Краевая задача для уравнения Геллерстедта с операторами
М. Сайго на характеристиках, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат.
науки*, 2006, выпуск 43, 19–24

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu448>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:29:42

С учетом формул (5) и (12) имеем $h_1^*(s) = \Gamma(2\beta-1)\Gamma\left[\begin{smallmatrix}-\beta+1-s, & 2-\alpha-\beta-s \\ -\alpha+1-s, & 1-s\end{smallmatrix}\right]f^*(s+\beta)$.

Теперь рассмотрим выражения $h_2(x) = \frac{d}{dx}h_1(x)$ и $g_{16}(x) = x^{1-\alpha}h_2(x)$.

Согласно (4) и (3) $g_{16}^*(s) = (\alpha-s)\Gamma(2\beta-1)\Gamma\left[\begin{smallmatrix}\alpha-\beta+1-s, & 2-\beta-s \\ 1-s, & \alpha+1-s\end{smallmatrix}\right]f^*(s-\alpha+\beta)$.

С учетом формулы (2) имеем $g_{16}^*(s) = \Gamma(2\beta-1)\Gamma\left[\begin{smallmatrix}\alpha-\beta+1-s, & 2-\beta-s \\ 1-s, & \alpha-s\end{smallmatrix}\right]f^*(s-\alpha+\beta)$,
 $\operatorname{Re}(2\beta-1) > 0$, $\operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re}(2\beta-1)$, $1 - \operatorname{Re}(\alpha+2\beta-2)$.

17°. Пусть $g_{17}(x) = x^\theta \frac{d}{dx} x^{-n} \int_0^x (x-t)^{l-1} t^w h(t) F\left(m, n; l; 1 - \frac{t}{x}\right) dt$;

$$g_{17}^*(s) = \Gamma(l)\Gamma\left[\begin{smallmatrix}2-l+n-\theta-s, & 2-m-\theta-s \\ 2-m+n-\theta-s, & 1-\theta-s\end{smallmatrix}\right]h^*(s+\theta-1-n+l+w),$$

$$\operatorname{Re} l > 0, \quad \operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re} l, \quad 1 - \operatorname{Re}(m+n).$$

18°. Пусть $g_{18}(x) = x^{1+\beta-\gamma-\delta} \int_0^x (x-t)^{\theta+\gamma-\alpha-\beta-1} t^{\alpha+\varepsilon-1} f(t) F\left(\delta-\beta, \gamma-\beta, \delta+\gamma-\alpha-\beta; 1 - \frac{t}{x}\right) dt$.

Согласно (5) и (12) имеем $g_{18}^*(s) = \Gamma(\delta+\gamma-\alpha-\beta)\Gamma\left[\begin{smallmatrix}\alpha-s, & \beta-s \\ \gamma-s, & \delta-s\end{smallmatrix}\right]f^*(s+\varepsilon)$, $\operatorname{Re}(\delta+\gamma-\alpha-\beta) > 0$,
 $\operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re}(\alpha-\gamma)$, $1 + \operatorname{Re}(\alpha-\delta)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Маричев О. И. Метод вычисления интегралов от специальных функций. — Минск: Наука и техника, 1978. — 310 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. — М.: Наука, 1969. — 343 с.

Поступила 11.09.2006 г.

УДК 517.9

И. А. Кузнецова

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДА С ОПЕРАТОРАМИ М. САЙГО НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Для одного гиперболического уравнения изучена нелокальная задача, краевые условия которой содержат обобщенные операторы в смысле М. Сайго. С помощью этих операторов устанавливается связь между аффиксами точек, расположенных на характеристиках, и нормальной производной. Доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$|y|^l U_{xx} - U_{yy} = 0, \quad (1)$$

где $l = m$ при $y < 0$ и $l = n$ при $y > 0$, m, n — положительные константы в конечной области D , ограниченной характеристиками уравнения (1):

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1;$$

$$AC_1: x - \frac{2}{n+2}y^{\frac{n+2}{2}} = 0, \quad BC_1: x + \frac{2}{n+2}y^{\frac{n+2}{2}} = 1.$$

Пусть $D^+ = D \cap (y > 0)$, $D^- = D \cap (y < 0)$, J — интервал прямой $y = 0$. $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ — аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in J$, с характеристиками AC и BC_1 соответственно. Примем следующие обозначения

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}\right) \varphi(t) dt, & \alpha > 0, 0 < x < 1, \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} \varphi)(x), & \alpha \leq 0, 0 < x < 1, n = [-\alpha] + 1; \end{cases} \quad (2)$$

$$(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; \frac{t-x}{1-x}\right) \varphi(t) dt, & \alpha > 0, 0 < x < 1, \\ \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{1-}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} \varphi)(x), & \alpha \leq 0, 0 < x < 1, n = [-\alpha] + 1 \end{cases} \quad (3)$$

— обобщённые дробные операторы с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; z)$, введенные М. Сайго [1], которые при $\beta = -\alpha$ обращаются в операторы Римана–Лиувилля [2]

$$(I_{0+}^{\alpha, -\alpha, \eta} \varphi)(x) = (I_{0+}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad \alpha > 0, 0 < x < 1;$$

$$(I_{0+}^{-\alpha, \alpha, \eta} \varphi)(x) = (D_{0+}^{\alpha} \varphi)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{n-\alpha} \varphi)(x), \quad \alpha > 0, 0 < x < 1, n = [\alpha] + 1;$$

$$(I_{1-}^{\alpha, -\alpha, \eta} \varphi)(x) = (I_{1-}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad \alpha > 0, 0 < x < 1;$$

$$(I_{1-}^{-\alpha, \alpha, \eta} \varphi)(x) = (D_{1-}^{\alpha} \varphi)(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{1-}^{n-\alpha} \varphi)(x), \quad \alpha > 0, 0 < x < 1, n = [\alpha] + 1.$$

Здесь $F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}$ ($|z| < 1$) — гипергеометрическая функция Гаусса [3].

Для уравнения (1) рассмотрим следующую краевую задачу.

ЗАДАЧА. Найти решение $U(x, y)$ уравнения (1) из класса $U(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D^+ \cup J) \cap C^1(D^- \cup J) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$\begin{aligned} A_1 (I_{0+}^{a, b, \beta-1-a} U[\Theta_0(t)])(x) + A_2 (I_{0+}^{a-\beta+1, b+2\beta-1, \beta-a-1} U_y(t, -0))(x) &= \varphi_1(x), \\ B_1 (I_{1-}^{a_1, b_1, \beta_1-1-a_1} U[\Theta_1(t)])(x) + B_2 (I_{1-}^{a_1-\beta_1+1, b_1+2\beta_1-1, \beta_1-a_1-1} U_y(t, +0))(x) &= \varphi_2(x) \end{aligned} \quad (4)$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} U_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} U_y(x, y), \quad (5)$$

где $\beta = \frac{m}{2m+4}$, $\beta_1 = \frac{n}{2n+4}$, $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, $B_{1,2}$ — ненулевые действительные константы одного знака;

$$-\beta < a < 1-\beta, \quad b > 1, \quad -\beta_1 < a_1 < 1-\beta_1, \quad b_1 > 1; \quad (6)$$

$\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — такие заданные функции, что

$$\varphi_1(x) \in H^{\lambda_1}(\overline{J}), \quad 0 < a + \beta < \lambda_1 \leq 1;$$

$$\varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}(\overline{J}), \quad 0 < a_1 + \beta_1 < \lambda_2 \leq 1.$$

2. Доказательство единственности решения задачи. Пусть $v_+(x) = \lim_{y \rightarrow +0} U_y(x, y)$, $\tau_+(x) = U(x, +0)$, $v_-(x) = \lim_{y \rightarrow -0} U_y(x, y)$, $\tau_-(x) = U(x, -0)$. Используя решения задачи Коши [4] для уравнения (1) в областях D^- и D^+ , найдем [5]

$$U[\Theta_0(x)] = \gamma_1 \Gamma(\beta) \left(I_{0+}^{\beta,0,\beta-1} \tau_-(t) \right)(x) - \gamma_2 \Gamma(1-\beta) \left(I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1} v_-(t) \right)(x),$$

$$U[\Theta_1(x)] = \gamma_3 \Gamma(\beta_1) \left(I_{1-}^{\beta_1,0,\beta_1-1} \tau_+(t) \right)(x) + \gamma_4 \Gamma(1-\beta_1) \left(I_{1-}^{1-\beta_1,2\beta_1-1,\beta_1-1} v_+(t) \right)(x),$$

$$\text{где } \gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}, \gamma_3 = \frac{\Gamma(2\beta_1)}{\Gamma^2(\beta_1)}, \gamma_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{2\beta_1} \frac{\Gamma(1-2\beta_1)}{\Gamma^2(1-\beta_1)}.$$

Подставим $U[\Theta_0(x)]$ и $U[\Theta_1(x)]$ в краевые условия (4) и применим следующие свойства дробных операторов [1]:

$$\begin{aligned} \left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} \left(I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} \varphi(t) \right) \right)(x) &= \left(I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} \varphi \right)(x) \quad (\gamma > 0), \\ \left(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta} \left(I_{1-}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} \varphi(t) \right) \right)(x) &= \left(I_{1-}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} \varphi \right)(x) \quad (\gamma > 0). \end{aligned} \quad (7)$$

После преобразований имеем

$$A_1 \gamma_1 \Gamma(\beta) \left(I_{0+}^{a+\beta,b,\beta-1-a} \tau_-(t) \right)(x) - (A_1 \gamma_2 \Gamma(1-\beta) - A_2) \left(I_{0+}^{a+1-\beta,b+2\beta-1,\beta-1-a} v_-(t) \right)(x) = \varphi_1(x), \quad (8)$$

$$B_1 \gamma_3 \Gamma(\beta_1) \left(I_{1-}^{a_1+\beta_1,b_1,\beta_1-1-a_1} \tau_+(t) \right)(x) + (B_1 \gamma_4 \Gamma(1-\beta_1) + B_2) \left(I_{1-}^{a_1+1-\beta_1,b_1+2\beta_1-1,\beta_1-1-a_1} v_+(t) \right)(x) = \varphi_2(x). \quad (9)$$

Поддействуем на обе части равенств (8) и (9) операторами $I_{0+}^{-(a+\beta),-b,2\beta-1}$ и $I_{1-}^{-(a_1+\beta_1),-b_1,2\beta_1-1}$. В результате получим

$$\tau_-(x) = K_1 \left(I_{0+}^{1-2\beta} v_-(t) \right)(x) + g_1(x), \quad (10)$$

$$\tau_+(x) = K_2 \left(I_{1-}^{1-2\beta_1} v_+(t) \right)(x) + g_2(x), \quad (11)$$

$$\text{где } K_1 = \frac{A_1 \gamma_2 \Gamma(1-\beta) - A_2}{A_1 \gamma_1 \Gamma(\beta)}, \quad K_2 = -\frac{B_1 \gamma_4 \Gamma(1-\beta) + B_2}{B_1 \gamma_3 \Gamma(\beta_1)};$$

$$g_1(x) = \frac{1}{A_1 \gamma_1 \Gamma(\beta)} \left(I_{0+}^{-(a+\beta),-b,2\beta-1} \varphi_1(t) \right)(x), \quad g_2(x) = \frac{1}{B_1 \gamma_3 \Gamma(\beta_1)} \left(I_{1-}^{-(a_1+\beta_1),-b_1,2\beta_1-1} \varphi_2(t) \right)(x). \quad (12)$$

Применим к обеим частям равенств (10) и (11) операторы $D_{0+}^{1-2\beta}$ и $D_{1-}^{1-2\beta_1}$ соответственно и воспользуемся свойствами

$$D_{0+}^\alpha I_{0+}^\alpha \varphi = \varphi \quad (\alpha > 0), \quad D_{1-}^\alpha I_{1-}^\alpha \varphi = \varphi \quad (\alpha > 0).$$

Теперь положим $\tau_-(x) = \tau_+(x) = \tau(x)$ и выпишем следующие соотношения:

$$v_-(x) = \frac{1}{K_1} \left\{ \left(D_{0+}^{1-2\beta} \tau(t) \right)(x) - \left(D_{0+}^{1-2\beta} g_1(t) \right)(x) \right\}, \quad (13)$$

$$v_+(x) = \frac{1}{K_2} \left\{ \left(D_{1-}^{1-2\beta_1} \tau(t) \right)(x) - \left(D_{1-}^{1-2\beta_1} g_2(t) \right)(x) \right\}. \quad (14)$$

Из принципа экстремума гиперболических уравнений [6] следует, что положительный максимум (отрицательный минимум) функции $U(x,y)$ достигается в областях D^- и D^+ в точке $(x_0, 0) \in J$. Заметим далее, что дробные производные в точке положительного максимума строго положительны [7] (в точке отрицательного минимума строго отрицательны). Тогда из соотношений (13) и (14) при $g_1(x) = g_2(x) \equiv 0$ следует, что $v_-(x_0) > 0$ ($v_-(x_0) < 0$), а $v_+(x_0) < 0$ ($v_+(x_0) > 0$), что противоречит условию сопряжения (5). Это в свою очередь доказывает единственность решения задачи для уравнения (1).

3. Доказательство существования решения задачи. Исключим из соотношений (10) и (11) функции $\tau_-(x)$ и $\tau_+(x)$, примем во внимание условие сопряжения (5) и положим $v(x) \equiv v_1(x) = v_2(x)$. Тогда приходим к равенству

$$K_1 \left(I_{0+}^{1-2\beta} v(t) \right)(x) - K_2 \left(I_{1-}^{1-2\beta_1} v(t) \right)(x) = g_2(x) - g_1(x). \quad (15)$$

Рассмотрим случай, когда $m > n$ ($\beta > \beta_1$). К обеим частям равенства (15) применим оператор $D_{0+}^{1-2\beta}$, после чего получим интегральное уравнение

$$K_1 v(x) - K_2 \left(D_{0+}^{1-2\beta} \left(I_{1-}^{1-2\beta_1} v(t) \right) \right)(x) = f(x), \quad (16)$$

где

$$f(x) = D_{0+}^{1-2\beta} [g_2(x) - g_1(x)]. \quad (17)$$

Преобразуем левую часть интегрального уравнения (16):

$$\begin{aligned} J_1(x) &= D_{0+}^{1-2\beta} \left(I_{1-}^{1-2\beta_1} v(t) \right)(x) = I_{0+}^{2\beta-1} \left(I_{1-}^{1-2\beta_1} v(t) \right)(x) = \frac{d}{dx} \left(I_{0+}^{2\beta} \left(I_{1-}^{1-2\beta_1} v(t) \right)(x) \right) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta_1)} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x (x-t)^{2\beta-1} dt \int_t^1 (\xi-t)^{-2\beta_1} v(\xi) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Сменим порядок интегрирования в интеграле, тогда

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{1}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta_1)} \frac{d}{dx} \left[\int_0^x v(\xi) d\xi \int_0^\xi (x-t)^{-(1-2\beta)} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_x^1 v(\xi) d\xi \int_0^x (x-t)^{-(1-2\beta)} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt \right]. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$J_{1\delta}(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_0^{x-\delta} v(\xi) d\xi \int_0^\xi (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt + \int_{x+\delta}^1 v(\xi) d\xi \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt \right].$$

Заметим, что $J_1(x) = \frac{1}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta_1)} \lim_{\delta \rightarrow 0} J_{1\delta}(x)$,

$$\begin{aligned} J_{1\delta}(x) &= v(x-\delta) \int_0^{x-\delta} (x-t)^{2\beta-1} (x-\delta-t)^{-2\beta_1} dt + \int_0^{x-\delta} v(\xi) d\xi \frac{d}{dx} \int_0^\xi (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt - \\ &\quad - v(x+\delta) \int_0^{x+\delta} (x-t)^{2\beta-1} (x+\delta-t)^{-2\beta_1} dt + \int_{x+\delta}^1 v(\xi) d\xi \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее преобразуем функцию $J_{1\delta}(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} J_{1\delta}(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ -[v(x) - v(x-\delta)] \int_0^{x-\delta} (x-t)^{2\beta-1} (x-\delta-t)^{-2\beta_1} dt + \right. \\ &\quad + v(x) \int_0^{x-\delta} (x-t)^{2\beta-1} (x-\delta-t)^{-2\beta_1} dt - [v(x+\delta) - v(x)] \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (x+\delta-t)^{-2\beta_1} dt - \\ &\quad - v(x) \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (x+\delta-t)^{-2\beta_1} dt + \int_0^{x-\delta} v(\xi) d\xi \frac{d}{dx} \int_0^\xi (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt + \\ &\quad \left. + \int_{x+\delta}^1 v(\xi) d\xi \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Вычислим интегралы в равенстве (19):

$$\begin{aligned} J_{11}(x) &= \int_0^{x-\delta} (x-t)^{2\beta-1} (x-\delta-t)^{-2\beta_1} dt = \int_0^1 x^{2\beta-1} \left(1 - \frac{x-\delta}{x} z \right)^{2\beta-1} (x-\delta)^{-2\beta_1} (1-z)^{-2\beta_1} (x-\delta) dz = \\ &= x^{2\beta-1} (x-\delta)^{1-2\beta_1} \int_0^1 (1-z)^{-2\beta_1} \left(1 - \frac{x-\delta}{x} z \right)^{2\beta-1} dz = x^{2\beta-1} (x-\delta)^{1-2\beta_1} \frac{\Gamma(1)\Gamma(1-2\beta_1)}{\Gamma(2-2\beta_1)} \times \\ &\quad \times F\left(1, 1-2\beta; 2-2\beta_1; \frac{x-\delta}{x}\right) = x^{2\beta-1} (x-\delta)^{1-2\beta_1} \frac{1}{1-2\beta_1} F\left(1, 1-2\beta; 2-2\beta_1; \frac{x-\delta}{x}\right). \end{aligned}$$

Так как $F(1, 1-2\beta; 2-2\beta_1; 1) = \frac{1-2\beta_1}{2\beta-2\beta_1}$, то $\lim_{\delta \rightarrow 0} [- (v(x) - v(x-\delta))] J_{11}(x) = 0$.

Аналогично вычислим

$$J_{12}(x) = \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (x+\delta-t)^{-2\beta_1} dt = \int_0^1 x^{2\beta-1} (1-z)^{2\beta-1} (x+\delta)^{-2\beta_1} \left(1 - \frac{x}{x+\delta} z \right)^{-2\beta_1} x dz =$$

$$\begin{aligned}
&= x^{2\beta} (x+\delta)^{-2\beta_1} \int_0^1 (1-z)^{2\beta-1} \left(1 - \frac{x}{x+\delta} z\right)^{-2\beta_1} dz = x^{2\beta} (x+\delta)^{-2\beta_1} \frac{\Gamma(1)\Gamma(2\beta)}{\Gamma(1+2\beta)} \times \\
&\quad \times F\left(1, 2\beta_1; 1+2\beta; \frac{x}{x+\delta}\right) = x^{2\beta} (x+\delta)^{-2\beta_1} \frac{1}{2\beta} F\left(1, 2\beta_1; 1+2\beta; \frac{x}{x+\delta}\right).
\end{aligned}$$

Так как $F(1, 2\beta_1; 1+2\beta; 1) = \frac{\beta}{\beta-\beta_1}$, то $\lim_{\delta \rightarrow 0} [v(x+\delta) - v(x)] J_{12}(x) = 0$.

Далее,

$$\begin{aligned}
J_{13}(x) &= \int_0^{x-\delta} (x-t)^{2\beta-1} (x-\delta-t)^{-2\beta_1} dt - \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (x+\delta-t)^{-2\beta_1} dt = \\
&= \frac{x^{2\beta-1} (x-\delta)^{1-2\beta_1}}{1-2\beta_1} F\left(1, 1-2\beta; 2-2\beta_1; \frac{x-\delta}{x}\right) - \frac{x^{2\beta} (x+\delta)^{-2\beta_1}}{2\beta} F\left(1, 2\beta_1; 1+2\beta; \frac{x}{x+\delta}\right).
\end{aligned}$$

С учетом вышеприведенных значений функции Гаусса имеем $\lim_{\delta \rightarrow 0} v(x) J_{13}(x) = 0$.

Теперь вычислим два последних слагаемых в равенстве (19). Пусть

$$\begin{aligned}
K_1(x, \xi) &= \frac{d}{dx} \int_0^{\xi} (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt = \frac{d}{dx} \int_0^1 x^{2\beta-1} \left(1 - \frac{\xi}{x} z\right)^{2\beta-1} \xi^{-2\beta_1} (1-z)^{-2\beta_1} \xi dz = \\
&= \frac{d}{dx} \left[x^{2\beta-1} \xi^{1-2\beta_1} \int_0^1 (1-z)^{-2\beta_1} \left(1 - \frac{\xi}{x} z\right)^{2\beta-1} dz \right] = \frac{d}{dx} \left[x^{2\beta-1} \xi^{1-2\beta_1} \frac{\Gamma(1)\Gamma(1-2\beta_1)}{\Gamma(2-2\beta_1)} \times \right. \\
&\quad \left. \times F\left(1-2\beta, 1; 2-2\beta_1; \frac{\xi}{x}\right) \right] = \frac{1}{1-2\beta_1} \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1-2\beta} \xi^{2\beta-2\beta_1} F\left(1-2\beta, 1; 2-2\beta_1; \frac{\xi}{x}\right) \right].
\end{aligned}$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся формулами дифференцирования и авто-трансформирования [3]:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \left[z^a F(a, b; c; z) \right] &= a z^{a-1} F(a+1, b; c; z); \\
F(a, b; c; z) &= (1-z)^{c-a} F(c-a, c-b; c; z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Получим } K_1(x, \xi) &= \frac{1}{1-2\beta_1} \xi^{2\beta-2\beta_1} (1-2\beta) \left(\frac{\xi}{x}\right)^{-2\beta} F\left(2-2\beta, 1; 2-2\beta_1; \frac{\xi}{x}\right) \left(-\frac{\xi}{x^2}\right) = \\
&= -\frac{1-2\beta}{1-2\beta_1} \xi^{1-2\beta_1} x^{2\beta-2} \left(1 - \frac{\xi}{x}\right)^{2\beta-2\beta_1-1} F\left(2\beta-2\beta_1, 1-2\beta_1; 2-2\beta_1; \frac{\xi}{x}\right) = \\
&= -\frac{1-2\beta}{1-2\beta_1} \left(\frac{\xi}{x}\right)^{1-2\beta_1} (x-\xi)^{2\beta-2\beta_1-1} F\left(2\beta-2\beta_1, 1-2\beta_1; 2-2\beta_1; \frac{\xi}{x}\right).
\end{aligned}$$

Произведем те же действия с функцией $K_2(x, \xi)$:

$$\begin{aligned}
K_2(x, \xi) &= \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} (\xi-t)^{-2\beta_1} dt = \frac{d}{dx} \int_0^1 x^{2\beta-1} (1-z)^{2\beta-1} \xi^{-2\beta_1} \left(1 - \frac{x}{\xi} z\right)^{-2\beta_1} x dz = \\
&= \frac{d}{dx} \left[x^{2\beta} \xi^{-2\beta_1} \int_0^1 (1-z)^{2\beta-1} \left(1 - \frac{x}{\xi} z\right)^{-2\beta_1} dz \right] = \frac{d}{dx} \left[x^{2\beta} \xi^{-2\beta_1} \frac{\Gamma(1)\Gamma(2\beta)}{\Gamma(1+2\beta)} F\left(1, 2\beta_1; 1+2\beta; \frac{x}{\xi}\right) \right] = \\
&= \frac{1}{2\beta} \left[\xi^{2\beta-2\beta_1} \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{x}{\xi}\right)^{2\beta} F\left(1, 2\beta_1; 1+2\beta; \frac{x}{\xi}\right) \right] \right].
\end{aligned}$$

Теперь применим формулу дифференцирования [3]:

$$\frac{d}{dz} \left[z^{c-1} F(a, b; c; z) \right] = (c-1) z^{c-2} F(a, b; c-1; z).$$

Тогда функция $K_2(x, \xi)$ примет вид

$$\begin{aligned}
K_2(x, \xi) &= \frac{1}{2\beta} \xi^{2\beta-2\beta_1} 2\beta \left(\frac{x}{\xi}\right)^{2\beta-1} F\left(1, 2\beta_1; 2\beta; \frac{x}{\xi}\right) \frac{1}{\xi} = \xi^{-2\beta_1} x^{2\beta-1} F\left(1, 2\beta_1; 2\beta; \frac{x}{\xi}\right) = \\
&= \xi^{-2\beta_1} x^{2\beta-1} \left(1 - \frac{x}{\xi}\right)^{2\beta-2\beta_1-1} F\left(2\beta-1, 2\beta-2\beta_1; 2\beta; \frac{x}{\xi}\right) = \\
&= \left(\frac{\xi}{x}\right)^{1-2\beta} (\xi-x)^{2\beta-2\beta_1-1} F\left(2\beta-1, 2\beta-2\beta_1; 2\beta; \frac{x}{\xi}\right).
\end{aligned}$$

Произведенные вычисления дают основания утверждать, что функции $K_1(x, \xi)$ и $K_2(x, \xi)$ бесконечно дифференцируемы в квадрате $0 < x, \xi < 1$ при условии $\xi \neq x$ и допускают оценки

$$K_1(x, \xi) = O(1)(x-\xi)^{2\beta-2\beta_1-1}, \quad \beta > \beta_1;$$

$$K_2(x, \xi) = O(1)(\xi-x)^{2\beta-2\beta_1-1}, \quad \beta > \beta_1,$$

где $O(1)$ является ограниченной в квадрате $0 \leq x, \xi \leq 1$ величиной. Теперь исследуем гладкость правой части уравнения (16). Приведем лемму 1 из работы [8].

ЛЕММА 1. Пусть $0 < -\alpha < \lambda \leq 1$ и $\beta < \min[0, 1 + \eta]$. Если $\varphi(x) \in H^\lambda[0, 1]$, то $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x)$, $(I_{1-}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi)(x) \in H^{\min[\lambda + \alpha, -\beta]}[0, 1]$.

По условию задачи $\varphi_1(x) \in H^{\lambda_1}(\bar{J})$, $0 < a + \beta < \lambda_1 \leq 1$, $b > 1$, следовательно, согласно лемме 1 $g_1(x) \in H^{\lambda_1 - a - \beta}(\bar{J})$. В свою очередь, если $\varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}(\bar{J})$, $0 < a_1 + \beta_1 < \lambda_2 \leq 1$, $b_1 > 1$, то из леммы 1 вытекает, что $g_2(x) \in H^{\lambda_2 - a_1 - \beta_1}(\bar{J})$. Стало быть, функция $g(x) = (g_2(x) - g_1(x)) \in H^{\lambda_0}(\bar{J})$, где $\lambda_0 = \min(\lambda_1 - a - \beta, \lambda_2 - a_1 - \beta_1)$.

Положим, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ таковы, что $g(x) = 0$ при $x = 0$. Тогда правая часть интегрального уравнения (16) может быть представлена так:

$$f(x) = \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} g'(t) dt.$$

Исследование свойств функций $K_1(x, \xi)$, $K_2(x, \xi)$ и $f(x)$ приводит к выводу о том, что при $m > n$ ($\beta > \beta_1$) уравнение (16) является уравнением Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого в заданном классе следует из единственности решения задачи.

Исследование в случае $m < n$ проводится аналогичным образом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu Univ., 1978. — Vol. 11, No 2. — P. 135–143.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1973. — 296 с.
4. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
5. Репин О. А. Нелокальная краевая задача для парабола-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения, 1992. — Т. 23, № 1. — С. 173–176.
6. Agmon S., Nirenberg L., Protter M. A maximum principle for a class of hyperbolic equation and applications to mixed elliptic-hyperbolic type // Commun Pure and Appl. Math., 1953. — Vol. 4. — P. 455–470.
7. Нахушев А. М. К теории вырождающихся гиперболических уравнений // Сообщения АН Груз. ССР, 1975. — Т. 77, № 3. — С. 545–548.
8. Saigo M., Kilbas A. A. Generalized fractional integrals and derivatives in Holder spaces / Transform Methods and Special Functions. Sofia-94. — Singapore, 1995. — P. 282–293.

Поступила 19.09.2006 г.