Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Б. Миронова, О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 31–37

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu450>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:41:21

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУКРАТНЫМИ СТАРШИМИ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Для системы с двукратными старшими частными производными с двумя независимыми переменными вводится матричный аналог функции Римана. В терминах этой матрицы строится решение задачи с граничными условиями на сторонах характеристического угла. Методом редукции к указанной характеристической задаче исследуется разрешимость задач с граничными условиями на трех и четырех сторонах характеристического прямоугольника.

В работах [1–3] изучены задачи Коши и Гурса для системы уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^2 a_{ik}(x_1, x_2)u_k + f_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

в частности, в [1] выведены формулы интегрального представления решений (1), позволяющие установить их структурные свойства.

Здесь разрабатывается вариант метода Римана для более сложной системы

$$\begin{cases} u_{xx} = a_1(x, y)v_x + b_1(x, y)u + c_1(x, y)v + f_1(x, y), \\ v_{yy} = a_2(x, y)u_y + b_2(x, y)u + c_2(x, y)v + f_2(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

являющийся развитием идей из [4, 5]. В отличие от [4], компоненты матрицы Римана определяются как решения некоторых интегральных уравнений. Подобным образом для одного уравнения функции Римана ранее вводились в [6–15].

Считаем, что в замыкании рассматриваемой области D плоскости (x, y) выполняются включения $a_1, a_2 \in C^2$, $b_1, b_2, c_1, c_2, f_1, f_2 \in C^1$. Решение (2) класса $u, v \in C^1(D)$, $u_{xx}, v_{yy} \in C(D)$ назовем регулярным в D .

К системе (2) подстановками

$$u^* = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{x_0}^x a_1^*(\alpha, y) d\alpha\right) u, \quad v^* = \left(\frac{1}{2} \int_{y_0}^y b_2^*(x, \beta) d\beta\right) v$$

сводится более общая система

$$\begin{cases} u_{xx}^* = a_1^*(x, y)u_x^* + b_1^*(x, y)v_x^* + c_1^*(x, y)u^* + d_1^*(x, y)v^* + f_1^*(x, y), \\ v_{yy}^* = a_2^*(x, y)u_y^* + b_2^*(x, y)v_y^* + c_2^*(x, y)u^* + d_2^*(x, y)v^* + f_2^*(x, y). \end{cases}$$

Основная характеристическая задача. В области $G = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$ найти регулярное решение (2), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_0, y) &= \Phi_1(y), & (u_x - a_1 v)(x_0, y) &= \Phi_2(y); \\ v(x, y_0) &= \Psi_1(x), & (v_y - a_2 u)(x, y_0) &= \Psi_2(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Phi_1(y), \Phi_2(y) \in C^1([y_0, y_1])$, $\Psi_1(x), \Psi_2(x) \in C^1([x_0, x_1])$.

Назовем данную задачу основной, поскольку к ней могут быть редуцированы другие предлагаемые в настоящей статье задачи.

Существование и единственность решения сформулированной задачи следует из возможности преобразовать (2) к виду

$$\begin{cases} u_x = u_1 + a_1 v, \\ u_{1x} = b_1 u + c_{10} v + f_1, \\ v_y = a_2 u + v_1, \\ v_{1y} = b_{20} u + c_2 v + f_2, \end{cases} \quad (4)$$

где $c_{10} = c_1 - a_{1x}$, $b_{20} = b_2 - a_{2y}$, откуда в силу (3) следует система интегральных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = \varphi_1(y) + \int_{x_0}^x (u_1 + a_1 v)(\alpha, y) d\alpha, \\ u_1(x, y) = \varphi_2(y) + \int_{x_0}^x (b_1 u + c_{10} v + f_1)(\alpha, y) d\alpha, \\ v(x, y) = \psi_1(x) + \int_{y_0}^y (a_2 u + v_1)(x, \beta) d\beta, \\ v_1(x, y) = \psi_2(x) + \int_{y_0}^y (b_{20} u + c_2 v + f_2)(x, \beta) d\beta. \end{array} \right. \quad (5)$$

Решение (5) существует, единственно и принадлежит классу $u, v \in C^1(G)$, $u_{xx}, v_{yy} \in C(G)$, что может быть доказано методом последовательных приближений ([16, с. 59], [17, с. 245–249], [18, с. 77–79]). Очевидно, эта система эквивалентна основной характеристической задаче.

1. Перепишем (4) в векторно–матричной форме

$$L(U) = F, \quad L(U) \equiv AU_x + BU_y - CU, \quad U = \text{colon}(u, u_1, v, v_1), \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & 0 \\ b_1 & 0 & c_{10} & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 \\ b_{20} & 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \text{colon}(0, f_1, 0, f_2).$$

Введем матрицу Римана $R = \text{colon}(R_1, R_2, R_3, R_4)$, где векторы $R_i(x, y, \xi, \eta) = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4})$ ($i = 1, 2, 3, 4$) являются решениями систем

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{i1}(x, y) = \delta_{i1} - \int_{\xi}^x (b_1 r_{i2} + a_2 r_{i3} + b_{20} r_{i4})(\alpha, y) d\alpha, \quad r_{i2}(x, y) = \delta_{i2} - \int_{\xi}^x r_{i1}(\alpha, y) d\alpha, \\ r_{i3}(x, y) = \delta_{i3} - \int_{\eta}^y (a_1 r_{i1} + c_{10} r_{i2} + c_2 r_{i4})(x, \beta) d\beta, \quad r_{i4}(x, y) = \delta_{i4} - \int_{\eta}^y r_{i3}(x, \beta) d\beta, \end{array} \right. \quad (7)$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Решения для (7) существуют и единственны в классе непрерывных функций. Очевидно, что R по первой паре аргументов удовлетворяет сопряженной к (6) системе

$$L^*(V) = 0, \quad L^*(V) \equiv -V_x A - V_y B - VC.$$

Имеет место легко проверяемое тождество

$$RL(U) = (RAU)_x + (RBU)_y. \quad (8)$$

Построим теперь в терминах элементов матрицы R решение основной характеристической задачи. Для этого в области G возьмем произвольную точку $M(\xi, \eta)$. Вычислим значение $U(\xi, \eta)$. Первая строка (8) дает

$$r_{12} f_1 + r_{14} f_2 = (r_{11} u + r_{12} u_1)_x + (r_{13} v + r_{14} v_1)_y, \quad (9)$$

где $r_{1j} = r_{1j}(x, y, \xi, \eta)$, остальные функции зависят от (x, y) . Интегрируем (9) по прямоугольнику $G_1 = \{x_0 \leq x \leq \xi, y_0 \leq y \leq \eta\}$:

$$\iint_{G_1} (r_{12} f_1 + r_{14} f_2)(x, y, \xi, \eta) dx dy = \int_{\Gamma} (r_{11} u + r_{12} u_1)(x, y, \xi, \eta) dy - (r_{13} v + r_{14} v_1)(x, y, \xi, \eta) dx,$$

Γ — граница G_1 . Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{\eta} (r_{11} u + r_{12} u_1)(\xi, y, \xi, \eta) dy + \int_{x_0}^{\xi} (r_{13} v + r_{14} v_1)(x, \eta, \xi, \eta) dx &= \int_{x_0}^{\xi} (r_{13} v + r_{14} v_1)(x, y_0, \xi, \eta) dx + \\ &+ \int_{y_0}^{\eta} (r_{11} u + r_{12} u_1)(x_0, y, \xi, \eta) dy + \iint_{G_1} (r_{12} f_1 + r_{14} f_2)(x, y, \xi, \eta) dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу (7)

$$r_{11}(\xi, y, \xi, \eta) \equiv 1, \quad r_{12}(\xi, y, \xi, \eta) = r_{13}(x, \eta, \xi, \eta) = r_{14}(x, \eta, \xi, \eta) \equiv 0. \quad (11)$$

В правой части (10) стоит известная функция $g_1(\xi, \eta)$ (если, конечно, известны r_{1j} , $j = 1, 2, 3, 4$). Окончательно получаем

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) = & g_{1\eta}(\xi, \eta) = r_{11}(x_0, \eta, \xi, \eta)u(x_0, \eta) + r_{12}(x_0, \eta, \xi, \eta)u_1(x_0, \eta) + \\ & + \int_{x_0}^{\xi} (r_{13\eta}(\alpha, y_0, \xi, \eta)v(\alpha, y_0) + r_{14\eta}(\alpha, y_0, \xi, \eta)v_1(\alpha, y_0))d\alpha + \\ & + \int_{y_0}^{\eta} (r_{11\eta}(x_0, \beta, \xi, \eta)u(x_0, \beta) + r_{12\eta}(x_0, \beta, \xi, \eta)u_1(x_0, \beta))d\beta + \int_{x_0}^{\xi} r_{12}(\alpha, \eta, \xi, \eta)f_1(\alpha, \eta)d\alpha + \\ & + \int_{x_0}^{\xi} \int_{y_0}^{\eta} (r_{12\eta}(\alpha, \beta, \xi, \eta)f_1(\alpha, \beta) + r_{14\eta}(\alpha, \beta, \xi, \eta)f_2(\alpha, \beta))d\beta d\alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь (и далее) дифференцирование компонент матрицы Римана по ξ и η означает дифференцирование по последней паре аргументов. При записи (12) учтено, что $r_{14}(\alpha, y, x, y) \equiv 0$. Аналогично

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\xi} r_{33}v(x, \eta, \xi, \eta)dx = & \int_{x_0}^{\xi} (r_{33}v + r_{34}v_1)(x, y_0, \xi, \eta)dx + \int_{y_0}^{\eta} (r_{31}u + r_{32}u_1)(x_0, y, \xi, \eta)dy + \\ & + \iint_{G_1} (r_{32}f_1 + r_{34}f_2)(x, y, \xi, \eta)dx dy, \end{aligned}$$

откуда, обозначая правую часть равенства через $g_2(\xi, \eta)$, получаем

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) = & g_{2\xi}(\xi, \eta) = r_{33}(\xi, y_0, \xi, \eta)v(\xi, y_0) + r_{34}(\xi, y_0, \xi, \eta)v_1(\xi, y_0) + \\ & + \int_{x_0}^{\xi} (r_{33\xi}(\alpha, y_0, \xi, \eta)v(\alpha, y_0) + r_{34\xi}(\alpha, y_0, \xi, \eta)v_1(\alpha, y_0))d\alpha + \\ & + \int_{y_0}^{\eta} (r_{31\xi}(x_0, \beta, \xi, \eta)u(x_0, \beta) + r_{32\xi}(x_0, \beta, \xi, \eta)u_1(x_0, \beta))d\beta + \int_{y_0}^{\eta} r_{34}(\xi, \beta, \xi, \eta)f_2(\xi, \beta)d\beta + \\ & + \int_{x_0}^{\xi} \int_{y_0}^{\eta} (r_{32\xi}(\alpha, \beta, \xi, \eta)f_1(\alpha, \beta) + r_{34\xi}(\alpha, \beta, \xi, \eta)f_2(\alpha, \beta))d\beta d\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь учтено, что $r_{32}(x, \beta, x, y) \equiv 0$.

Формулы (12), (13) дают искомое решение основной характеристической задачи.

Приведем еще формулы для u_1 , v_1 , которые понадобятся в дальнейшем:

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \eta) = & r_{21}(x_0, \eta, \xi, \eta)u(x_0, \eta) + r_{22}(x_0, \eta, \xi, \eta)u_1(x_0, \eta) + \\ & + \int_{x_0}^{\xi} (r_{23\eta}(\alpha, y_0, \xi, \eta)v(\alpha, y_0) + r_{24\eta}(\alpha, y_0, \xi, \eta)v_1(\alpha, y_0))d\alpha + \\ & + \int_{y_0}^{\eta} (r_{21\eta}(x_0, \beta, \xi, \eta)u(x_0, \beta) + r_{22\eta}(x_0, \beta, \xi, \eta)u_1(x_0, \beta))d\beta + \int_{x_0}^{\xi} r_{22}(\alpha, \eta, \xi, \eta)f_1(\alpha, \eta)d\alpha + \\ & + \int_{x_0}^{\xi} \int_{y_0}^{\eta} (r_{22\eta}(\alpha, \beta, \xi, \eta)f_1(\alpha, \beta) + r_{24\eta}(\alpha, \beta, \xi, \eta)f_2(\alpha, \beta))d\beta d\alpha; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} v_1(\xi, \eta) = & r_{43}(\xi, y_0, \xi, \eta)v(\xi, y_0) + r_{44}(\xi, y_0, \xi, \eta)v_1(\xi, y_0) + \\ & + \int_{x_0}^{\xi} (r_{43\xi}(\alpha, y_0, \xi, \eta)v(\alpha, y_0) + r_{44\xi}(\alpha, y_0, \xi, \eta)v_1(\alpha, y_0))d\alpha + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{y_0}^{\eta} (r_{41\xi}(x_0, \beta, \xi, \eta)u(x_0, \beta) + r_{42\xi}(x_0, \beta, \xi, \eta)u_1(x_0, \beta))d\beta + \int_{y_0}^{\eta} r_{44}(\xi, \beta, \xi, \eta)f_2(\xi, \beta)d\beta + \\
& + \int_{x_0}^{\xi} \int_{y_0}^{\eta} (r_{42\xi}(\alpha, \beta, \xi, \eta)f_1(\alpha, \beta) + r_{44\xi}(\alpha, \beta, \xi, \eta)f_2(\alpha, \beta))d\beta d\alpha. \quad (15)
\end{aligned}$$

2. Рассмотрим далее задачи для характеристического прямоугольника $G = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$, в которых граничные условия заданы на трех сторонах.

ЗАДАЧА 1. Найти в G регулярное решение (2), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}
u(x_0, y) &= \Phi_1(y), & (u_x - a_1 v)(x_0, y) &= \Phi_2(y); \\
(v_y - a_2 u)(x, y_0) &= \Psi_1(x), & v(x, y_1) &= \chi(x),
\end{aligned} \quad (16)$$

где $\Phi_1(y), \Phi_2(y) \in C^1([y_0, y_1])$, $\Psi_1(x), \chi(x) \in C^1([x_0, x_1])$.

Исследуем разрешимость задачи 1 путем сведения ее к основной характеристической задаче. Для этого, очевидно, требуется по данным (16) получить $v(x, y_0) = \psi(x)$.

Если положить в (13) $\xi = x, y = y_1$, то получится интегральное уравнение для определения $\psi(x)$ с известной $F_1(x) \in C^1([x_0, x_1])$:

$$r_{33}(x, y_0, x, y_1)\psi(x) + \int_{x_0}^x r_{33\xi}(\alpha, y_0, x, y_1)\psi(\alpha)d\alpha = F_1(x) + \chi(x). \quad (17)$$

Если $r_{33}(x, y_0, x, y_1) \neq 0$, то (17) — интегральное уравнение Вольтерра второго рода, его решение существует, единственно и, очевидно, принадлежит классу $C^1([x_0, x_1])$. Следовательно, в этом случае задача 1 сводится к основной характеристической задаче. Достаточным для этого условием будет $c_2(x, y) \geq 0$ в $\bar{G}$. Действительно, согласно (7)

$$\begin{cases} r_{33}(x, y, x, \eta) = 1 - \int_{\eta}^y c_2(x, \beta)r_{34}(x, \beta, x, \eta)d\beta, \\ r_{34}(x, y, x, \eta) = - \int_{\eta}^y r_{33}(x, \beta, x, \eta)d\beta. \end{cases} \quad (18)$$

Отсюда $r_{34yy}(x, y, x, \eta) = c_2(x, y)r_{34}(x, y, x, \eta)$, $r_{34}(x, \eta, x, \eta) = 0$, $r_{34y}(x, \eta, x, \eta) = -1$. Получаем для $r_{34}(x, y, x, \eta)$ обыкновенное дифференциальное уравнение вида $z''(y) - q(y)z(y) = 0$, $q(y) \geq 0$. Известно [19, с. 164], что произведение zz' не убывает. В силу начальных условий $z(\eta) = 0$, $z'(\eta) = -1$, слева от точки $y = \eta$ выполняется условие $z(y) \geq 0$. Следовательно, $r_{34}(x, \beta, x, y) \geq 0$ при $\beta < y$. Из (18) получаем

$$r_{33}(x, y_0, x, y_1) = 1 + \int_{y_0}^{y_1} c_2(x, \beta)r_{34}(x, \beta, x, y_1)d\beta > 0,$$

что и требовалось. Нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Если $a_1, a_2 \in C^2(\bar{G})$, $b_1, b_2, c_{10}, c_2, f_1, f_2 \in C_1(\bar{G})$, $c_2(x, y) \geq 0$ в $\bar{G}$, то существует единственное решение задачи 1.

ЗАДАЧА 2. Найти в G регулярное решение (2), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}
u(x_0, y) &= \Phi_1(y), & (u_x - a_1 v)(x_0, y) &= \Phi_2(y); \\
v(x, y_0) &= \Psi_1(x), & v_y(x, y_1) &= \chi(x),
\end{aligned}$$

где $\Phi_1(y), \Phi_2(y) \in C^1([y_0, y_1])$, $\Psi_1(x), \chi(x) \in C^1([x_0, x_1])$.

Разрешимость задачи 2 снова установим путем сведения её к основной задаче. Сопоставляя (15) и (12), получаем для определения $v_1(x, y_0)$ уравнение

$$r_{44}(x, y_0, x, y_1)v_1(x, y_0) + \int_{x_0}^x (r_{44\xi}(\alpha, y_0, x, y_1) + a_2(x, y_1)r_{14\eta}(\alpha, y_0, x, y_1))v_1(\alpha, y_0)d\alpha = F_2(x) + \chi(x), \quad (19)$$

где $F_2(x) \in C^1([x_0, x_1])$.

ТЕОРЕМА 2. Если $a_1, a_2 \in C^2(\bar{G})$, $b_1, b_{20}, c_{10}, c_2, f_1, f_2 \in C^1(\bar{G})$, $c_2(x, y) \geq 0$ в $\bar{G}$, то существует единственное решение задачи 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $c_2(x, y) \geq 0$ в $\bar{D}$, то решение (19) существует, единственно и принадлежит классу $C^1([x_0, x_1])$. Достаточно показать, что в этом случае $r_{44}(x, y_0, x, y_1) \neq 0$. Действительно, согласно (7)

$$\begin{cases} r_{43}(x, y, x, \eta) = \int_{\eta}^y c_2(x, \beta) r_{44}(x, \beta, x, \eta) d\beta, \\ r_{44}(x, y, x, \eta) = 1 - \int_{\eta}^y r_{43}(x, \beta, x, \eta) d\beta, \end{cases}$$

следовательно, $r_{44_{yy}}(x, y, x, \eta) = c_2(x, y)r_{44}(x, y, x, \eta)$, $r_{44}(x, \eta, x, \eta) = 1$, $r_{44_y}(x, \eta, x, \eta) = 0$. В силу условия $c_2(x, y) \geq 0$ получаем, что $r_{44}(x, y, x, \eta)$ не возрастает при $y < \eta$ [19, с. 164], то есть $r_{44}(x, y, x, \eta) \geq 1$ при $y < \eta$. Поэтому $r_{44}(x, y_0, x, y_1) \geq 1$. Теорема доказана.

Задачи, получающиеся из рассмотренных выше путем перемены ролями независимых переменных, рассматривать не будем.

3. Перейдем теперь к рассмотрению задач, в которых граничные условия заданы на всех сторонах G .

ЗАДАЧА 3. Найти в G регулярное решение (2), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_0, y) &= \varphi_1(y), & (u_x - a_1 v)(x_1, y) &= \varphi_2(y); \\ v(x, y_0) &= \psi_1(x), & (v_y - a_2 u)(x, y_1) &= \psi_2(x), \end{aligned}$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^1([y_0, y_1])$, $\psi_1(x), \psi_2(x) \in C^1([x_0, x_1])$.

Для редукции этой задачи к основной нужно определить недостающие данные $u_1(x_0, y) = (u_x - a_1 v)(x_0, y)$, $v_1(x, y_0) = (v_y - a_2 u)(x, y_0)$. Положим в (14) $\xi = x_1$, $\eta = y$, а в (15) — $\eta = y_1$, $\xi = x$. Получаем систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} r_{22}(x_0, y, x_1, y)u_1(x_0, y) + \int_{y_0}^y r_{22\eta}(x_0, \beta, x_1, y)u_1(x_0, \beta)d\beta + \\ + \int_{x_0}^{x_1} r_{24\eta}(\alpha, y_0, x_1, y)v_1(\alpha, y_0)d\alpha = F_{11}(y) + \varphi_2(y), \\ r_{44}(x, y_0, x, y_1)v_1(x, y_0) + \int_{x_0}^x r_{44\xi}(\alpha, y_0, x, y_1)v_1(\alpha, y_0)d\alpha + \\ + \int_{y_0}^{y_1} r_{42\xi}(x_0, \beta, x, y_1)u_1(x_0, \beta)d\beta = F_{12}(x) + \psi_2(x), \end{aligned} \quad (20)$$

где функции $F_{11} \in C^1([y_0, y_1])$, $F_{12} \in C^1([x_0, x_1])$ известны.

Пусть $a_1(x, y) = c_{10}(x, y) = c_2(x, y) \equiv 0$, $b_1(x, y) \geq 0$. Тогда $r_{24\eta}(x, y, \xi, \eta) \equiv 0$, $r_{22}(x_0, y, x_1, y) \neq 0$. Из первого уравнения (20) однозначно определяется $u_1(x_0, y)$. Подставляя найденное значение $u_1(x_0, y)$ во второе уравнение (20), получаем для определения $v_1(x, y_0)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода (при $c_2(x, y) \equiv 0$ будет выполняться условие $r_{44}(x, y_0, x, y_1) \neq 0$). Это уравнение однозначно разрешимо. Таким образом, задача 3 редуцирована к основной характеристической задаче.

Аналогично разрешается система (20) при условиях $b_1(x, y) = a_2(x, y) = b_{20}(x, y) \equiv 0$, $c_2(x, y) \geq 0$ (сначала из второго уравнения определяется $v_1(x, y_0)$, а затем из первого — $u_1(x_0, y)$). Поэтому верна

ТЕОРЕМА 3. Если $a_1, a_2 \in C^2(\bar{G})$, $b_1, b_{20}, c_{10}, c_2, f_1, f_2 \in C^1(\bar{G})$ и в $\bar{G}$ выполняется одно из условий

$$a_1(x, y) = c_{10}(x, y) = c_2(x, y) \equiv 0, \quad b_1(x, y) \geq 0, \quad (21)$$

$$b_1(x, y) = a_2(x, y) = b_{20}(x, y) \equiv 0, \quad c_2(x, y) \geq 0, \quad (22)$$

то решение задачи 3 существует и единственно.

Сформулируем еще две задачи.

ЗАДАЧА 4. Найти в G регулярное решение (2), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_0, y) &= \Phi_1(y), & u_x(x_1, y) &= \Phi_2(y); \\ v(x, y_0) &= \Psi_1(x), & (v_y - a_2 u)(x, y_1) &= \Psi_2(x), \end{aligned}$$

где $\Phi_1(y), \Phi_2(y) \in C^1([y_0, y_1])$, $\Psi_1(x), \Psi_2(x) \in C^1([x_0, x_1])$.

Значение $v(x, y)$ из уравнения (13) подставим в (14) и положим $\xi = x_1$, $\eta = y$, а в (15) возьмем $\eta = y_1$, $\xi = x$. Получим систему

$$\begin{aligned} r_{22}(x_0, y, x_1, y)u_1(x_0, y) + \int_{y_0}^y (r_{22\eta}(x_0, \beta, x_1, y) + a_1(x_1, y)r_{32\xi}(x_0, \beta, x_1, y))u_1(x_0, \beta)d\beta + \\ + \int_{x_0}^{x_1} (r_{24\eta}(\alpha, y_0, x_1, y) + a_1(x_1, y)r_{34\xi}(\alpha, y_0, x_1, y))v_1(\alpha, y_0)d\alpha + \\ + a_1(x_1, y)r_{34}(x_1, y_0, x_1, y)v_1(x_1, y_0) = F_{21}(y) + \Phi_2(y), \quad (23) \\ r_{44}(x, y_0, x, y_1)v_1(x, y_0) + \int_{x_0}^x r_{44\xi}(\alpha, y_0, x, y_1)v_1(\alpha, y_0)d\alpha + \\ + \int_{y_0}^{y_1} r_{42\xi}(x_0, \beta, x, y_1)u_1(x_0, \beta)d\beta = F_{22}(x) + \Psi_2(x). \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5. Найти в G регулярное решение (2), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_0, y) &= \Phi_1(y), & u_x(x_1, y) &= \Phi_2(y); \\ v(x, y_0) &= \Psi_1(x), & v_y(x, y_1) &= \Psi_2(x), \end{aligned}$$

где $\Phi_1(y), \Phi_2(y) \in C^1([y_0, y_1])$, $\Psi_1(x), \Psi_2(x) \in C^1([x_0, x_1])$.

Используя формулы (12)–(15) приходим к системе

$$\begin{aligned} r_{22}(x_0, y, x_1, y)u_1(x_0, y) + \int_{y_0}^y (r_{22\eta}(x_0, \beta, x_1, y) + a_1(x_1, y)r_{32\xi}(x_0, \beta, x_1, y))u_1(x_0, \beta)d\beta + \\ + \int_{x_0}^{x_1} (r_{24\eta}(\alpha, y_0, x_1, y) + a_1(x_1, y)r_{34\xi}(\alpha, y_0, x_1, y))v_1(\alpha, y_0)d\alpha + \\ + a_1(x_1, y)r_{34}(x_1, y_0, x_1, y)v_1(x_1, y_0) = F_{31}(y) + \Phi_2(y), \quad (24) \\ r_{44}(x, y_0, x, y_1)v_1(x, y_0) + \int_{x_0}^x (r_{44\xi}(\alpha, y_0, x, y_1) + a_2(x, y_1)r_{14\eta}(\alpha, y_0, x, y_1))v_1(\alpha, y_0)d\alpha + \\ + \int_{y_0}^{y_1} (r_{42\xi}(x_0, \beta, x, y_1) + a_2(x, y_1)r_{12\eta}(x_0, \beta, x, y_1))u_1(x_0, \beta)d\beta + \\ + a_2(x, y_1)r_{12}(x_0, y_1, x, y_1)u_1(x_0, y_1) = F_{32}(x) + \Psi_2(x). \end{aligned}$$

Рассуждая относительно (23) и (24) так же, как и в случае системы (20), приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 4. Если $a_1, a_2 \in C^2(\overline{G})$, b_1, b_2, c_{10}, c_2 , $f_1, f_2 \in C^1(\overline{G})$ и в $\overline{G}$ выполняется одно из условий (21), (22), то решения задач 4 и 5 существуют и единственны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бицадзе А. В. О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений в частных производных // Матем. моделирование, 1994. — Т. 6, №6. — С. 22–31.
2. Чекомарев Т. В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения, 1982. — Т. 18, № 9. — С. 1614–1622.
3. Чекомарев Т. В. Системы уравнений смешанного типа. — Н.-Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т, 1995. — 199 с.
4. Holmgren E. Sur les systemes lineaires aux derivees partielles du premier ordre // Arkiv for matematik, astronomy och fysik, 1910. — Band 6, N. 2. — P. 1–10.
5. Бурмистров Б. Н. Решение задачи Коши методом Римана для системы уравнений первого порядка с вырождением на границе / Тр. семинара по краевым задачам. — Казань: Казан. ун-т, 1971. — Вып. 8. — С. 41–54.
6. Жегалов В. И. Трехмерный аналог задачи Гурса / Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. — Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1990. — С. 94–98.
7. Жегалов В. И., Севастьянов В. А. Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Дифференц. уравнения, 1996. — Т. 32, № 10. — С. 1429–1430.
8. Севастьянов В. А. Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка // Изв. вузов. Математика, 1997. — № 5. — С. 69–73.
9. Севастьянов В. А. Об одном случае задачи Коши // Дифференц. уравнения, 1998. — Т. 34, № 12. — С. 1706–1707.
10. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика, 1999. №10. С. 73–76.
11. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Задача Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей частной производной // Изв. вузов. Математика, 2001. — № 11. — С. 77–81.
12. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. — Казань: Казан. мат. об-во, 2001. — 226 с.
13. Жегалов В. И., Миронов А. Н. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика, 2002. — № 5. — С. 23–30.
14. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка с тремя независимыми переменными // Дифференц. уравнения, 2002. — Т. 38, № 1. — С. 93–97.
15. Миронов А. Н. О методе Римана для одного уравнения четвертого порядка со старшей частной производной // Вестник СамГТУ: Сер. матем. — Вып. 22. — Дифференциальные уравнения и их приложения, № 2. 2003. — С. 190–194.
16. Забрейко П. П., Кошелев А. И. и др. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968. — 448 с.
17. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука. 1971. — 512 с.
18. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970. — 712 с.
19. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. — М.: ИЛ, 1953. — 346 с.

Поступила 10.04.2006 г.

УДК 517.962.2

А. В. Минайло

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Исследуются условия сохранения устойчивости решений при переходе от систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) к разностным в случае, когда правые части ОДУ являются обобщенно-однородными функциями. Произведена оценка скорости стремления решений к началу координат. Исследовано воздействие на систему нестационарных возмущений. Доказан консерватизм, в смысле сохранения условий устойчивости, при переходе от возмущенных дифференциальных уравнений к разностным.

Введение. Уравнения в конечных разностях широко применяются для описания динамических систем, состояния которых измеряются в дискретные моменты времени. К таким системам относятся, например, системы управления с дискретными регуляторами [1]. Разностные уравнения являются основным математическим аппаратом при изучении нелинейных импульсных систем [2]. Численное решение уравнений различных типов также приводит к замене непрерывных систем дискретными [3]. Но переход от непрерывных уравнений к разностным может повлечь существенное изменение свойств решений системы. При таком переходе нередко нару-