Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Минайло, Об устойчивости решений некоторых классов нелинейных разностных систем, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 37–44

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu451>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:21:23

ТЕОРЕМА 4. Если $a_1, a_2 \in C^2(\overline{G})$, $b_1, b_2, c_{10}, c_2, f_1, f_2 \in C^1(\overline{G})$ и в $\overline{G}$ выполняется одно из условий (21), (22), то решения задач 4 и 5 существуют и единственны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бицадзе А. В. О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений в частных производных // Матем. моделирование, 1994. — Т. 6, №6. — С. 22–31.
2. Чекмарев Т. В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения, 1982. — Т. 18, № 9. — С. 1614–1622.
3. Чекмарев Т. В. Системы уравнений смешанного типа. — Н.-Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т, 1995. — 199 с.
4. Holmgren E. Sur les systems lineaires aux derivees partielles du premier ordre // Arkiv for matematik, astronomy och fysik, 1910. — Band 6, N. 2. — P. 1–10.
5. Бурмистров Б. Н. Решение задачи Коши методом Римана для системы уравнений первого порядка с вырождением на границе / Тр. семинара по краевым задачам. — Казань: Казан. ун-т, 1971. — Вып. 8. — С. 41–54.
6. Жегалов В. И. Трехмерный аналог задачи Гурса / Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. — Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1990. — С. 94–98.
7. Жегалов В. И., Севастьянов В. А. Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Дифференц. уравнения, 1996. — Т. 32, № 10. — С. 1429–1430.
8. Севастьянов В. А. Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка // Изв. вузов. Математика, 1997. — № 5. — С. 69–73.
9. Севастьянов В. А. Об одном случае задачи Коши // Дифференц. уравнения, 1998. — Т. 34, № 12. — С. 1706–1707.
10. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика, 1999. №10. С. 73–76.
11. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Задача Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей частной производной // Изв. вузов. Математика, 2001. — № 11. — С. 77–81.
12. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. — Казань: Казан. мат. об-во, 2001. — 226 с.
13. Жегалов В. И., Миронов А. Н. О задачах Коши для двух уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика, 2002. — № 5. — С. 23–30.
14. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка с тремя независимыми переменными // Дифференц. уравнения, 2002. — Т. 38, № 1. — С. 93–97.
15. Миронов А. Н. О методе Римана для одного уравнения четвертого порядка со старшей частной производной // Вестник СамГТУ: Сер. матем. — Вып. 22. — Дифференциальные уравнения и их приложения, № 2. 2003. — С. 190–194.
16. Забрейко П. П., Кошелев А. И. и др. Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968. — 448 с.
17. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука. 1971. — 512 с.
18. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970. — 712 с.
19. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. — М.: ИЛ, 1953. — 346 с.

Поступила 10.04.2006 г.

УДК 517.962.2

А. В. Минайло

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

Исследуются условия сохранения устойчивости решений при переходе от систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) к разностным в случае, когда правые части ОДУ являются обобщенно-однородными функциями. Произведена оценка скорости стремления решений к началу координат. Исследовано воздействие на систему нестационарных возмущений. Доказан консерватизм, в смысле сохранения условий устойчивости, при переходе от возмущенных дифференциальных уравнений к разностным.

Введение. Уравнения в конечных разностях широко применяются для описания динамических систем, состояния которых измеряются в дискретные моменты времени. К таким системам относятся, например, системы управления с дискретными регуляторами [1]. Разностные уравнения являются основным математическим аппаратом при изучении нелинейных импульсных систем [2]. Численное решение уравнений различных типов также приводит к замене непрерывных систем дискретными [3]. Но переход от непрерывных уравнений к разностным может повлечь существенное изменение свойств решений системы. При таком переходе нередко нару-

шается устойчивость. Существуют численные методы интегрирования дифференциальных уравнений, позволяющие сохранить устойчивость решений [1,4]. С помощью этих методов производится коррекция разностных систем, которая обеспечивает согласованность между дифференциальными и разностными уравнениями в смысле сохранения устойчивости нулевого решения. Однако такая коррекция может привести к существенному усложнению вида исследуемых уравнений. Поэтому важной задачей является задача определения классов систем, для которых переход к разностной форме не приводит к нарушению устойчивости.

1. Постановка задачи. В настоящей работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений с обобщенно-однородными правыми частями и соответствующие им разностные системы (однородный случай исследован в работе [5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [6]. Вещественная функция $f(X)$, определенная и непрерывная в E^n , называется обобщенно-однородной класса $(m_1, \dots, m_n)$ порядка m , если для любого $c \in (-\infty, +\infty)$ справедливо соотношение $f(c^{m_1}x_1, \dots, c^{m_n}x_n) = c^m f(x_1, \dots, x_n)$, где m_i, m ($i = 1, 2, \dots, n$) — положительные рациональные числа с нечетным знаменателем.

Известно [6], что для обобщенно-однородной функции $f(X)$ при всех $X \in E^n$ справедливы неравенства

$$c_1 r^m(X) \leq f(X) \leq c_2 r^m(X),$$

где $r(X) = \sum_{i=1}^n |X_i|^{\frac{1}{m_i}}$, $c_1 = \inf_{r(X)=1} f(X)$, $c_2 = \sup_{r(X)=1} f(X)$.

ПРИМЕР 1. Для функции $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^5$ имеем $m_1 = 5$, $m_2 = 3$, $m = 15$. То есть функция $f(x_1, x_2)$ является обобщенно-однородной класса $(5, 3)$ порядка 15.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = F(X). \quad (1)$$

Здесь X — n -мерный вектор, компоненты вектора $F(X)$ — функции $F_i(X)$, $i = 1, 2, \dots, n$, определены и непрерывно дифференцируемы при всех $X \in E^n$ и являются обобщенно-однородными функциями класса $(m_1, \dots, m_n)$ порядка $\sigma + m_i$, где σ — такое рациональное число, что $\sigma + m_i > 0$ и $\sigma = \bar{p}/\bar{q}$, $\bar{q}$ — нечетное, а $\bar{p}$ — любое целое число. Из обобщенной однородности компонент вектора $F(X)$ следует, что уравнения (1) имеют нулевое решение.

В настоящей работе доказано, что переход от системы (1) к соответствующей системе разностных уравнений не приводит к нарушению асимптотической устойчивости нулевого решения. Произведена оценка скорости стремления решений к началу координат. Установлено, что порядок найденной оценки совпадает с порядком оценки, полученной В.И. Зубовым в работе [6] для дифференциальных уравнений. Исследовано воздействие на систему ограниченных возмущений. Доказана теорема об асимптотической устойчивости по нелинейному приближению. Определен класс нестационарных возмущений, для которых устойчивость может сохраняться и в случае, когда порядок их компонент ниже порядка соответствующих компонент векторных функций, входящих в правые части невозмущенной системы.

2. Сохранение устойчивости при переходе к разностной системе. Предположим, что нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. Тогда, как было доказано в работе [6], существуют функции Ляпунова V и W обобщенно-однородные класса $(m_1, \dots, m_n)$ порядка $m - \sigma$ и m соответственно, для которых верно равенство $dV/dt|_{(1)} = W$. Причем V — положительно определенная функция, а W — отрицательно определенная. Для функций V и W имеют место следующие неравенства

$$a_1 r^{m-\sigma}(X) \leq V(X) \leq a_2 r^{m-\sigma}(X), \quad \xi_1 r^m(X) \leq W(X) \leq \xi_2 r^m(X), \quad (2)$$

где $a_1, a_2 > 0$, а $\xi_1, \xi_2 < 0$.

Рассмотрим для (1) соответствующую разностную систему

$$X_{k+1} = X_k + F(X_k). \quad (3)$$

Исследуем устойчивость нулевого решения системы (3).

ТЕОРЕМА 1. Из асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (3).

Доказательство. Вычислим приращение функции V на решениях системы (3). Имеем

$$\Delta V = V(X_k + F(X_k)) - V(X_k) = (F(X_k))^* V'(X_k + \theta_1 F(X_k)) = (F(X_k))^* V'(X_k) + \\ + (F(X_k))^* (V'(X_k + \theta_1 F(X_k)) - V'(X_k)),$$

где $\theta_1 \in (0, 1)$.

Рассмотрим отдельно вектор-функцию $V'(X + \theta_1 F(X)) - V'(X)$. Считая, что $X \neq 0$, получим

$$V'(X_k + \theta_1 F(X_k)) - V'(X_k) = V' \left(\frac{x_1 + \theta_1 F_1(X_k)}{r^{m_1}(X_k)}, \dots, \frac{x_n + \theta_1 F_n(X_k)}{r^{m_n}(X_k)} \right) - \\ - V' \left(\frac{x_1}{r^{m_1}(X_k)}, \dots, \frac{x_n}{r^{m_n}(X_k)} \right) = \\ = \rho(X_k) \left[V' \left(y_1 + \frac{\theta_1 F_1(X_k)}{r^{m_1}(X_k)}, \dots, y_n + \frac{\theta_1 F_n(X_k)}{r^{m_n}(X_k)} \right) - V'(y_1, \dots, y_n) \right];$$

Здесь $\rho(X) = \text{diag} \left(r_1^{m-\sigma-m_1}(X), \dots, r_n^{m-\sigma-m_n}(X) \right)$, $y_i = \frac{x_i}{r^{m_i}(X)}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $\hat{\Delta}_i = \frac{\theta_1 F_i(X)}{r^{m_i}(X)}$, тогда $|\hat{\Delta}_i| \leq c_{2i} \frac{r^{m_i+\sigma}(X)}{r^{m_i}(X)} = c_{2i} r^\sigma(X) \rightarrow 0$ при $r(X) \rightarrow 0$, где c_{2i} — положительные постоянные ($i = 1, 2, \dots, n$).

Значит, существует такое $\delta > 0$, что при $r(X) < \delta$ будут иметь место соотношения

$$\Delta V = W(X_k) + (F(X_k))^* \rho(X_k) (V'(y_1 + \hat{\Delta}_1, \dots, y_n + \hat{\Delta}_n) - V'(y_1, \dots, y_n)) \leq \\ \leq \xi_2 r^m(X_k) + c r^m(X_k) \|V'(y_1 + \hat{\Delta}_1, \dots, y_n + \hat{\Delta}_n) - V'(y_1, \dots, y_n)\| \leq \frac{\xi_2}{2} r^m(X_k),$$

где $c > 0$.

Таким образом, нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Аналогичным образом можно получить условия неустойчивости нулевого решения системы (3).

При доказательстве теоремы 1 было установлено существование числа $\mathfrak{B} > 0$ такого, что для любого решения X_k системы (3) с начальными данными $X_{k_0} = X_0$, удовлетворяющими условиям $k_0 \geq 0$, $r(X_0) < \mathfrak{B}$, при всех $k \geq k_0$ выполняется соотношение $V(X_{k+1}) \leq V(X_k) - \underline{b} r^m(X_k)$, где $\underline{b} > 0$. Аналогичным образом можно показать, что если $\mathfrak{B}$ достаточно мало, то найдется $\bar{b} > 0$ такое, что при всех $k > k_0$: $V(X_{k+1}) \geq V(X_k) - \bar{b} r^m(X_k)$.

Таким образом, принимая во внимание неравенства (2), получаем, что для решений системы (3), начинающихся при $k = k_0$ в $\mathfrak{B}$ -окрестности точки $X = 0$, при $k = k_0, k_0 + 1, \dots$ справедливы соотношения

$$V(X_k) - \bar{b} \left(\frac{V(X_k)}{a_1} \right)^{\frac{m}{m-\sigma}} \leq V(X_{k+1}) \leq V(X_k) - \underline{b} \left(\frac{V(X_k)}{a_1} \right)^{\frac{m}{m-\sigma}}.$$

Используя леммы 8.1 и 8.2 из работы [7], имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Существует число $\delta_1 > 0$ такое, что для любого решения X_k системы (3) с начальными данными $X_{k_0} = X_0$, удовлетворяющими условиям $k_0 \geq 0$, $r(X_0) < \delta_1$, при всех $k \geq k_0$ выполняется неравенство

$$c_1 r(X_0) \left(1 + c_2 r^\sigma(X_0) (k - k_0) \right)^{-\frac{1}{\sigma}} \leq r(X_k) \leq c_3 r(X_0) \left(1 + c_4 r^\sigma(X_0) (k - k_0) \right)^{-\frac{1}{\sigma}}. \quad (4)$$

Здесь $c_1 = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{m-\sigma}}$, $c_2 = \frac{2\bar{b}\sigma}{a_1(m-\sigma)}$, $c_3 = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{1}{m-\sigma}}$, $c_4 = \frac{2\underline{b}\sigma}{a_2(m-\sigma)}$.

З а м е ч а н и е 2. Порядок найденной оценки (4) совпадает с порядком оценки, полученной В. И. Зубовым в работе [6] для систем дифференциальных уравнений с обобщенно-однородными правыми частями.

3. Условия асимптотической устойчивости по нелинейному приближению. Наряду с системой (3) рассмотрим возмущенную систему

$$X_{k+1} = X_k + F(X_k) + R_k(X_k). \quad (5)$$

Здесь векторные функции $R_k(X)$ ($k = 0, 1, \dots$) определены и непрерывны на множестве $r(X) < H$ и удовлетворяют неравенствам

$$|R_{ki}(X)| \leq c_i r^{m_i + \gamma}(X), \quad (6)$$

где $c_i > 0$, $\gamma > 0$, $m_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Определим условия, при выполнении которых будет иметь место асимптотическая устойчивость (или неустойчивость) нулевого решения системы (5).

ТЕОРЕМА 3. Если $\gamma > \sigma$, то нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве функций Ляпунова для возмущенных уравнений выбираем обобщенно-однородные класса $(m_1, \dots, m_n)$ порядка $m - \sigma$ и m функции V и W , соответствующие дифференциальным уравнениям (1).

Рассмотрим первую разность функции Ляпунова V в силу системы (5). При достаточно малых значениях $r(X)$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(X_k + F(X_k) + R_k(X_k)) - V(X_k) = V(X_k + F(X_k) + R_k(X_k)) - V(X_k + F(X_k)) + \\ &+ V(X_k + F(X_k)) - V(X_k) = V(X_k + F(X_k)) - V(X_k) + (R_k(X_k))^* V'(X_k + F(X_k) + \bar{\theta} R_k(X_k)) = \\ &= V(X_k + F(X_k)) - V(X_k) + (R_k(X_k))^* V'(X_k) + (R_k(X_k))^* (V'(X_k + F(X_k) + \bar{\theta} R_k(X_k)) - V'(X_k)). \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\theta} \in (0, 1)$.

Тогда, принимая во внимание неравенство (6) и оценку ΔV в силу системы (1) (см. доказательство теоремы 1), получим

$$\Delta V \leq \xi_2 r^m(X_k) + \theta r^{\gamma + m - \sigma}(X_k),$$

где θ — положительная постоянная.

Таким образом, если $\gamma > \sigma$, то для достаточно малых значений $r(X_k)$ и при всех $k = 0, 1, \dots$ имеем $\Delta V \leq \frac{\xi_2}{2} r^m(X_k)$. Следовательно, нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Аналогичным образом можно получить условия неустойчивости нулевого решения системы (5).

4. Уточнение условий устойчивости для неавтономных возмущений. Покажем, что для некоторых классов неавтономных возмущений асимптотическая устойчивость сохраняется и в случае, когда порядок их компонент ниже порядка соответствующих компонент векторных функций, входящих в правые части невозмущенной системы.

Пусть компоненты вектора возмущений $R_k(X)$ в системе (5) имеют вид

$$R_{ks}(X) = \sum_{j=1}^{l_s} b_{ksj} q_{sj}(X),$$

где b_{ksj} — постоянные коэффициенты; $q_{sj}(X)$ — непрерывно-дифференцируемые обобщенно-однородные класса $(m_1, \dots, m_n)$ порядка $\gamma + m_s$ функции; $s = 1, 2, \dots, n$; l_s — натуральные числа. Тогда систему (5) можно записать в следующей форме:

$$X_{k+1} = X_k + F(X_k) + B_k Q(X_k). \quad (7)$$

Здесь B_k — постоянная матрица размерности $n \times l$, $l = \sum_{i=1}^n l_i$, элементы которой $\theta_{ksj} = b_{ksj}$ при $j \in [l_{s-1}, l_s]$ и $\theta_{ksj} = 0$ при $j \notin [l_{s-1}, l_s]$, $l_0 = 0$, то есть

$$B_k = \begin{pmatrix} b_{k11}b_{k12}...b_{k1l_1}0 & 0.....0 & 0.....0 & 0 & 0.....0 \\ 0 & 0.....0 & b_{k21}b_{k22}...b_{k2l_2}0.....0 & 0 & 0.....0 \\ \\ 0 & 0.....0 & 0 & 0.....0 & 0.....0 & b_{kn1}b_{kn2}...b_{knl_n} \end{pmatrix},$$

а $Q(X)$ — вектор размерности l , имеющий вид

$$Q(X) = (q_{11}(X), ..., q_{1l_1}(X), q_{21}(X), ..., q_{2l_2}(X), ..., q_{n1}(X), ..., q_{nl_n}(X))^*.$$

Предположим, что последовательность $\{B_k\}$ является ограниченной. Кроме того, в дополнение к условиям, наложенным на функции V и W , будем считать, что V — дважды непрерывно-дифференцируемая функция (для этого достаточно, чтобы правые части уравнений (1) были дважды непрерывно-дифференцируемыми [6]).

Рассмотрим последовательность $(n \times l)$ матриц

$$C_0 = 0, \quad C_k = \sum_{j=0}^{k-1} B_j, \quad k \in N. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 4. Если последовательность (8) ограничена, то при выполнении неравенства $\gamma > \frac{\sigma}{2}$ нулевое решение системы (7) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Функцию Ляпунова выбираем в виде

$$V_{1k}(X) = V(X) - \left(\frac{\partial V(X)}{\partial X} \right)^* C_k Q(X). \quad (9)$$

Тогда

$$\Delta V_{1k} = V(X_k + F(X_k) + B_k Q(X_k)) - (V'(X_k + F(X_k) + B_k Q(X_k)))^* \times \\ \times C_{k+1} Q(X_k + F(X_k) + B_k Q(X_k)) - V(X_k) + (V'(X_k))^* C_k Q(X_k).$$

Пусть $X_{k+1} - X_k = F(X_k) + B_k Q(X_k) = G_k(X_k)$ и $\varphi_{k+1}(X_k) = (V'(X_k))^* C_{k+1} Q(X_k)$.

Принимая во внимание, что

$$V(X_k + G_k(X_k)) - V(X_k) = (V'(X_k))^* G_k(X_k) + \frac{1}{2} (G_k(X_k))^* V''(X_k + \hat{\theta} G_k(X_k)) G_k(X_k),$$

где $\hat{\theta} \in (0, 1)$, получим

$$\Delta V_{1k} = V(X_k + G_k(X_k)) - V(X_k) - \varphi_{k+1}(X_{k+1}) + \varphi_k(X_k) = (V'(X_k))^* G_k(X_k) + \\ + \frac{1}{2} (G_k(X_k))^* V''(X_k + \hat{\theta} G_k(X_k)) G_k(X_k) - \varphi_{k+1}(X_k) - [\varphi'_{k+1}(X_k + \theta G_k(X_k))]^* G_k(X_k) + \\ + \varphi_k(X_k) = (V'(X_k))^* F(X_k) + (V'(X_k))^* B_k Q(X_k) + \frac{1}{2} (G_k(X_k))^* V''(X_k + \hat{\theta} G_k(X_k)) G_k(X_k) - \\ - (V'(X_k))^* C_{k+1} Q(X_k) - [\varphi'_{k+1}(X_k + \theta G_k(X_k))]^* G_k(X_k) + (V'(X_k))^* C_k Q(X_k).$$

Здесь $\theta \in (0, 1)$.

Отметим, что матрицы C_k выбраны так, чтобы выполнялось равенство $B_k + C_k - C_{k+1} = 0$.

Тогда

$$\Delta V_{1k} = (V'(X_k))^* F(X_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n G_{ik}(X_k) G_{jk}(X_k) V''_{ij}(X_k + \hat{\theta} G_k(X_k)) - \\ - \sum_{i=1}^n G_{ik}(X_k) \varphi'_{i,k+1}(X_k + \theta G_k(X_k)) \leq \xi_2 r^m(X_k) + \hat{a} (r^{m+\sigma}(X_k) + r^{m+\gamma}(X_k) + r^{m-\sigma+2\gamma}(X_k)),$$

где $\hat{a} > 0$.

Следовательно, при $\gamma > \sigma/2$ для достаточно малых $r(X_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, имеет место неравенство $\Delta V_{1k} \leq \frac{\xi_2}{2} r^m(X_k)$.

Таким образом, функция $V_{1k}(X)$ удовлетворяет условиям теоремы об асимптотической устойчивости [2]. Теорема доказана.

5. Условия сохранения устойчивости для возмущений, имеющих нулевые средние значения. Предположим теперь, что последовательность (8) неограниченна. Однако, существует число β , $0 < \beta \leq 1$, такое, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^\beta} C_k = 0. \quad (10)$$

Таким образом, рассматриваемые возмущения имеют нулевые средние значения.

ТЕОРЕМА 5. При выполнении неравенства $\gamma \geq \frac{\sigma}{2}(1+\beta)$ нулевое решение системы (7) асимптотически устойчиво.

Доказательство. В качестве функции Ляпунова так же, как и в предыдущей теореме, выбираем функцию (9).

Рассмотрим первую разность функции Ляпунова в силу системы (7). Имеем

$$\begin{aligned} \Delta V_{1k} &= (V'(X_k))^* F(X_k) + \frac{1}{2} (G_k(X_k))^* V''(X_k) G_k(X_k) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n G_{ik}(X_k) G_{jk}(X_k) \left(V''_{ij}(X_k + \hat{\theta} G_k(X_k)) - V''_{ij}(X_k) \right) - \sum_{i=1}^n G_{ik}(X_k) \varphi'_{i,k+1}(X_k + \theta G_k(X_k)) \leq \\ &\leq \xi_2 r^m(X_k) + \eta \left[\left(r^{m+\sigma}(X_k) + r^{m-\sigma+2\gamma}(X_k) + r^{m+\gamma}(X_k) \right) \times \right. \\ &\times \left(1 + \|V''(y_1 + \Delta_1, \dots, y_n + \Delta_n) - V''(y_1, \dots, y_n)\| \right) \left. \right] + \eta_2 (k+1)^\beta r^{m+\gamma}(X_k) + \eta_3 (k+1)^\beta r^{m-\sigma+2\gamma}(X_k). \end{aligned}$$

Здесь $y_i = \frac{x_i}{r^{m_i}(X)}$, $\Delta_i = \frac{\theta(F_i(X) + R_{ki}(X))}{r^{m_i}(X)}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Покажем, что существуют числа η , A и L такие, что для любого решения X_k системы (7) с начальными данными $X_{k_0} = X_0$, удовлетворяющими условиям

$$k_0 \geq L, \quad r^\sigma(X_0) < \frac{\eta}{k_0}, \quad (11)$$

при всех $k \geq k_0$ имеет место неравенство

$$r^\sigma(X_k) < \frac{A}{k}. \quad (12)$$

Пусть $a_1 = \min_{r(X)=1} V(X)$, $a_2 = \max_{r(X)=1} V(X)$. Выберем числа η и A так, чтобы выполнялись соотношения

$$0 < \eta < -\frac{10(m-\sigma)a_2}{\sigma\xi_2}, \quad A > -\frac{10(m-\sigma)a_2}{\sigma\xi_2} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{\sigma}{m-\sigma}}.$$

Далее задаем $L > 0$ настолько большим, чтобы при $k \geq L$ были справедливы неравенства

$$\frac{A}{k} < \delta^\sigma, \quad k \geq -\frac{m\xi_2\eta}{10(m-\sigma)a_2}, \quad -\xi_2 > 10\eta_1, \quad -\xi_2 > 10\eta_2(k+1)^\beta \left(\frac{A}{k} \right)^\beta, \quad -\xi_2 > 10\eta_3(k+1)^\beta \left(\frac{A}{k} \right)^\beta.$$

Рассмотрим выражения $\Delta_i = \frac{\theta F_i(X)}{r^{m_i}(X)} + \frac{\theta R_{ki}(X)}{r^{m_i}(X)}$. Принимая во внимание оценки функций

$F_i(X)$ и $R_{ki}(X)$, получим

$$|\Delta_i| \leq \left| \frac{F_i(X)}{r^{m_i}(X)} \right| + \left| \frac{R_{ki}(X)}{r^{m_i}(X)} \right| \leq \frac{c_{2i} r^{\sigma+m_i}(X) + c_i r^{m_i+\gamma}(X)}{r^{m_i}(X)} = c_{2i} r^\sigma(X) + c_i r^\gamma(X) \rightarrow 0 \quad \text{при } r(X) \rightarrow 0,$$

где c_{2i} , c_i — положительные постоянные, $i = 1, 2, \dots, n$.

Значит, существует такое $\eta^0 > 0$, что при $r(X) < \eta^0$ будет выполняться неравенство $\|V''(Y_1) - V''(Y_2)\| < 1$. Отсюда, учитывая (12), получаем дополнительное условие на величину L :

$$L > \frac{A}{\eta^0 \delta^\sigma}.$$

Рассмотрим решение X_k системы (7) с начальными данными, удовлетворяющими условиям (11). Допустим, что неравенство (12) не выполнено. Тогда, в силу непрерывной зависимости

решений рассматриваемого уравнения от начального положения X_0 , существует решение X_k и момент времени $k_1 > k_0$ такой, что $r^\sigma(X_{k_1}) = \frac{A}{k_1}$, а при $k = k_0, \dots, k_1 - 1$ имеет место оценка (12). Следовательно, для всех $k = k_0, \dots, k_1 - 1$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta V_{1k} &\leq \xi_2 r^m(X_k) + 2\beta_1 \left(r^{m+\sigma}(X_k) + r^{m-\sigma+2\gamma}(X_k) + r^{m+\gamma}(X_k) \right) + \\ &\quad + \beta_2(k+1)^\beta \left(\frac{A}{k} \right)^\beta r^{m+\gamma-\sigma\beta}(X_k) + \beta_3(k+1)^\beta \left(\frac{A}{k} \right)^\beta r^{m-\sigma+2\gamma-\sigma\beta}(X_k) \leq \\ &\leq \xi_2 r^m(X_k) - \frac{\xi_2}{5} \left(r^{m+\sigma}(X_k) - r^{m-\sigma+2\gamma}(X_k) + r^{m+\gamma}(X_k) \right) - \frac{\xi_2}{10} r^{m+\gamma-\sigma\beta}(X_k) - \frac{\xi_2}{10} r^{m-\sigma+2\gamma-\sigma\beta}(X_k). \end{aligned}$$

Тогда при $\gamma \geq \frac{\sigma}{2}(1+\beta)$ справедлива оценка

$$\Delta V_{1k} \leq \frac{\xi_2}{10} r^m(X_k).$$

Используя неравенство (2), имеем

$$\Delta V_{1k} \leq \frac{\xi_2}{10} \left(\frac{V(X_k)}{a_2} \right)^{\frac{m}{m-\sigma}}.$$

Применяя леммы 8.1 и 8.2 из работы [7], получаем

$$\begin{aligned} V(X_{k_1}) &\leq V(X_0) \left(1 + \frac{b_1}{10} \frac{\sigma}{m-\sigma} a_2^{-\frac{m}{m-\sigma}} V^{\frac{\sigma}{m-\sigma}}(X_0)(k_1 - k_0) \right)^{-\frac{m-\sigma}{\sigma}}; \\ a_1 \left(r^{m-\sigma}(X_{k_1}) - (k_1+1)^\beta r^{m-\sigma+\gamma}(X_{k_1}) \right) &\leq a_2 \left(\frac{\eta}{k_0} \right)^{\frac{m-\sigma}{\sigma}} \left(1 + \frac{b_1}{10} \frac{\sigma}{(m-\sigma)a_2} \frac{\eta}{k_0} (k_1 - k_0) \right)^{-\frac{m-\sigma}{\sigma}}. \end{aligned}$$

В силу выбора функции Ляпунова имеем условие $\gamma > \sigma\beta$. Тогда при $r^\sigma(X_{k_1}) = A/k_1$ выполняется

$$a_1 \left(1 - (k_1+1)^\beta r^\gamma(X_{k_1}) \right) \geq a_1 \left(1 - (k_1+1)^\beta r^{\sigma\beta}(X_{k_1}) \right) = a_1 \left(1 - \frac{(k_1+1)^\beta A^\beta}{k_1^\beta} \right).$$

Таким образом,

$$a_1 r^{m-\sigma}(X_{k_1}) \left(1 - \frac{(k_1+1)^\beta A^\beta}{k_1^\beta} \right) < a_1 r^{m-\sigma}(X_{k_1}) < a_2 \left(\frac{\eta}{k_0} \right)^{\frac{m-\sigma}{\sigma}} \left(1 + \frac{b_1}{10} \frac{\sigma}{(m-\sigma)a_2} \frac{\eta}{k_0} (k_1 - k_0) \right)^{-\frac{m-\sigma}{\sigma}}.$$

Из условий выбора чисел η и A следует, что левая часть последнего неравенства положительна, а правая отрицательна. Приходим к противоречию. Значит, для решений X_k при всех $k \geq k_0$ имеет место оценка (12).

Используя доказанное свойство решений системы (7), а также их непрерывную зависимость от начальных данных, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 4. Везде выше вместо уравнений $X_{k+1} = X_k + F(X_k)$ можно использовать уравнения $X_{k+1} = X_k + hF(X_k)$, где $h > 0$ — шаг дискретизации. При этом величина шага на результаты работы не влияет.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уравнение Лъенара [8]:

$$\ddot{x} + x^p \dot{x} + x^m = 0.$$

Здесь p — рациональное число с четным числителем и нечетным знаменателем, а m — рациональное число с нечетным числителем и знаменателем, $p > 1$, $m \geq 1$.

Сделав замену переменных $\dot{x} = y$, перейдем к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^m - x^p y. \end{cases} \quad (13)$$

Пусть $m = 2p + 1$. Тогда правые части системы (13) являются обобщенно-однородными функциями класса $(1, p+1)$ порядка $p+1$, $2p+1$ соответственно.

Выбрав обобщенно-однородную функцию Ляпунова в виде $V = \frac{y^2}{2} + \frac{x^{m+1}}{m+1}$, несложно показать [8] асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (13). Тогда по теореме 1 нулевое решение разностной системы

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k, \\ y_{k+1} = y_k - x_k^m - x_k^p y_k, \end{cases}$$

соответствующей (13), будет асимптотически устойчивым.

Рассмотрим возмущенное уравнение Лъенара:

$$\ddot{x} + (x^p + x^\sigma f(t))\dot{x} + x^m = 0,$$

где σ — положительное рациональное число с нечетным знаменателем, а функция $f(t)$ определена и непрерывна при $t \geq 0$.

При переходе к соответствующей разностной системе согласно замечанию 4 можно взять $h = 1$. Получим

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k, \\ y_{k+1} = y_k - x_k^m - x_k^p y_k - x_k^\sigma y_k f(k). \end{cases} \quad (14)$$

Если функция $f(t)$ ограничена при $t \geq 0$, то по теореме 3 для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (14) достаточно выполнения неравенства $\sigma > p$.

Предположим далее, что $f(t) = \sin t$. Тогда к уравнениям (14) можно применить теорему 4. Получим следующее условие асимптотической устойчивости: $\sigma > \frac{p}{2}$.

Пусть теперь $f(t) = \sin \sqrt{t}$. В работе [7] доказано, что в данном случае соответствующая последовательность (8) удовлетворяет предельному соотношению (10) для любого $\beta \in (1/2, 1]$. Тогда по теореме 5 нулевое решение системы (14) будет асимптотически устойчивым при $\sigma > \frac{3p}{4}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зубов В. И. Проблема устойчивости процессов управления. — СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2001.
2. Бромберг П. В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. — М.: Наука, 1967.
3. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1988.
4. Wisdom J., Holman M. Symplectic Maps for the N-Body Problem // Astron. J., 1991. — P. 1520–1538.
5. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об устойчивости решений нелинейных разностных систем // Изв. вузов. Математика, 2005. — С. 1–10.
6. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. — Л.: Судпромгиз, 1959.
7. Александров А. Ю., Жабко А. П. Устойчивость разностных систем. — СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2003.
8. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970.

Поступила 7.07.2006 г.

УДК 517.956

А. А. Андреев, Е. Н. Огородников

К ПОСТАНОВКЕ И ОБОСНОВАНИЮ КОРРЕКТНОСТИ НАЧАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛОКАЛЬНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрено модельное гиперболическое в полуплоскости $y > 0$ переменных x и y дифференциальное уравнение, объединяющее широкий класс уравнений, тип или порядок которых вырождается на линии $y = 0$ и содержащее младшие производные с инволютивно преобразованными аргументами. Показано влияние вырождения порядка и присутствия в уравнении определенных младших производных с инволюциями на корректность задачи Коши. Обоснована корректность одного аналога задачи Коши в специальном случае.

Понятие нелокального оператора и связанное с ним понятие нелокального дифференциального уравнения появилось в математике сравнительно недавно. В соответствии с определением, приведенным А. М. Нахушевым в его монографии [1], к числу нелокальных дифферен-