Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Андреев, Е. Н. Огородников, К постановке и обоснованию корректности начальной краевой задачи для одного класса нелокальных вырождающихся уравнений гиперболического типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 44–51

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu452>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:15:19

Выбрав обобщенно-однородную функцию Ляпунова в виде $V = \frac{y^2}{2} + \frac{x^{m+1}}{m+1}$, несложно показать [8] асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (13). Тогда по теореме 1 нулевое решение разностной системы

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k, \\ y_{k+1} = y_k - x_k^m - x_k^p y_k, \end{cases}$$

соответствующей (13), будет асимптотически устойчивым.

Рассмотрим возмущенное уравнение Лъенара:

$$\ddot{x} + (x^p + x^\sigma f(t))\dot{x} + x^m = 0,$$

где σ — положительное рациональное число с нечетным знаменателем, а функция $f(t)$ определена и непрерывна при $t \geq 0$.

При переходе к соответствующей разностной системе согласно замечанию 4 можно взять $h = 1$. Получим

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k, \\ y_{k+1} = y_k - x_k^m - x_k^p y_k - x_k^\sigma y_k f(k). \end{cases} \quad (14)$$

Если функция $f(t)$ ограничена при $t \geq 0$, то по теореме 3 для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (14) достаточно выполнения неравенства $\sigma > p$.

Предположим далее, что $f(t) = \sin t$. Тогда к уравнениям (14) можно применить теорему 4. Получим следующее условие асимптотической устойчивости: $\sigma > \frac{p}{2}$.

Пусть теперь $f(t) = \sin \sqrt{t}$. В работе [7] доказано, что в данном случае соответствующая последовательность (8) удовлетворяет предельному соотношению (10) для любого $\beta \in (1/2, 1]$. Тогда по теореме 5 нулевое решение системы (14) будет асимптотически устойчивым при $\sigma > \frac{3p}{4}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зубов В. И. Проблема устойчивости процессов управления. — СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2001.
2. Бромберг П. В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. — М.: Наука, 1967.
3. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1988.
4. Wisdom J., Holman M. Symplectic Maps for the N-Body Problem // Astron. J., 1991. — P. 1520–1538.
5. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об устойчивости решений нелинейных разностных систем // Изв. вузов. Математика, 2005. — С. 1–10.
6. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. — Л.: Судпромгиз, 1959.
7. Александров А. Ю., Жабко А. П. Устойчивость разностных систем. — СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2003.
8. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970.

Поступила 7.07.2006 г.

УДК 517.956

А. А. Андреев, Е. Н. Огородников

К ПОСТАНОВКЕ И ОБОСНОВАНИЮ КОРРЕКТНОСТИ НАЧАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛОКАЛЬНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрено модельное гиперболическое в полуплоскости $y > 0$ переменных x и y дифференциальное уравнение, объединяющее широкий класс уравнений, тип или порядок которых вырождается на линии $y = 0$ и содержащее младшие производные с инволютивно преобразованными аргументами. Показано влияние вырождения порядка и присутствия в уравнении определенных младших производных с инволюциями на корректность задачи Коши. Обоснована корректность одного аналога задачи Коши в специальном случае.

Понятие нелокального оператора и связанное с ним понятие нелокального дифференциального уравнения появилось в математике сравнительно недавно. В соответствии с определением, приведенным А. М. Нахушевым в его монографии [1], к числу нелокальных дифферен-

циальных уравнений относятся: нагруженные уравнения, уравнения, содержащие дробные производные искомых функций, уравнения с отклоняющимися, в частности с запаздывающими аргументами: иными словами, такие уравнения, в которые неизвестная функция и ее производные входят, вообще говоря, при разных значениях аргументов. В целом такие уравнения можно отнести к классу функционально-дифференциальных уравнений.

Обыкновенные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, в том числе такие, в которых наряду с искомой функцией $u(t)$ присутствует $u(\alpha(t))$, где $\alpha^2(t) \equiv \alpha(\alpha(t)) = t$ — так называемый сдвиг Карлемана [2] или инволютивное отклонение, по-видимому, являются наиболее изученными. Теория дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих инволютивно преобразованные аргументы, имеет недавнюю историю. Более подробную историю вопроса, а также библиографию можно найти в работах [3–7].

Под инволютивным преобразованием (отклонением, сдвигом) точек плоскости действительных переменных x, y понимается гомеоморфизм области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ на себя, ставящий в соответствие любой точке $P(x, y) \in \Omega$ точку $Q(\alpha(x, y); \beta(x, y)) \in \Omega$, причем $\alpha(\alpha(x, y); \beta(x, y)) = x$, $\beta(\alpha(x, y); \beta(x, y)) = y$. Отметим, что класс инволютивных преобразований, отображающих ограниченную область Ω на себя, весьма узок. В качестве конкретного примера далее используем преобразование $\alpha = 1 - x$, $\beta = y$.

Рассмотрим уравнение

$$L(u(x, y)) + M(u(1 - x, y)) = 0 \quad (1)$$

с операторами $L \equiv y^{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y)$ при $m > 0$ и $M \equiv a_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c_1(x, y)$ в характеристической области

$$\Omega = \left\{ (x, y) : 0 < \frac{y^{m+1}}{m+1} < x < 1 - \frac{y^{m+1}}{m+1}, y > 0 \right\}. \quad (2)$$

Так как $\frac{\partial}{\partial x} u(1 - x, y) = -\frac{\partial u}{\partial x}(1 - x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} u(1 - x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(1 - x, y)$, где под $\frac{\partial u}{\partial x}(1 - x, y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}(1 - x, y)$ понимаются соответствующие частные производные $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$, вычисленные в точке $Q(1 - x, y)$, то оператор $M(u(1 - x, y)) = \left[a_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c_1(x, y) \right] u(1 - x, y) = -a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(1 - x, y) + b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(1 - x, y) + c_1(x, y) u(1 - x, y)$, а уравнение (1) можно записать в виде

$$y^{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u - a_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(1 - x, y) + b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(1 - x, y) + c_1(x, y) u(1 - x, y) = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим уравнение (3) в точке $Q(1 - x, y)$. Замечая, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1 - x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(1 - x, y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(1 - x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(1 - x, y)$, получим

$$\left[y^{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - a(1 - x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(1 - x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(1 - x, y) \right] u(1 - x, y) - a_1(1 - x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_1(1 - x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c_1(1 - x, y) u = 0. \quad (4)$$

Обозначая $v(x, y) = u(1 - x, y)$ в (3) и (4), для вектор-функции $U(x, y) = (u; v)^T$ получим систему дифференциальных уравнений

$$y^{2m} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + A(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} + C(x, y) U = 0 \quad (5)$$

с матричными коэффициентами

$$A = \begin{pmatrix} a(x, y) & a_1(x, y) \\ -a_1(1-x, y) & -a(1-x, y) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b(x, y) & b_1(x, y) \\ b_1(1-x, y) & b(1-x, y) \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c(x, y) & c_1(x, y) \\ c_1(1-x, y) & c(1-x, y) \end{pmatrix}.$$

Известно [8], что если компоненты матриц $A(x, y)$, $B(x, y)$ и $C(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы Проттера [9], то для системы уравнений (5) существует единственное регулярное решение $U(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ задачи Коши с данными на линии параболического вырождения

$$\lim_{y \rightarrow +0} U(x, y) = \bar{\tau}(x), \quad x \in [0, 1]; \quad (6)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{\partial U}{\partial y} = \bar{v}(x), \quad x \in (0, 1). \quad (7)$$

При дополнительном требовании симметричности этих матричных коэффициентов решение задачи Коши может быть найдено методом Римана [10]. Далее, выделяя первую компоненту вектор-функции $U(x, y)$ и учитывая, что $\bar{\tau}(x) = (\tau(x); \tau(1-x))^T$, $\bar{v}(x) = (v(x); v(1-x))^T$, можно найти решение задачи Коши для исходного уравнения (1) в ее классической постановке:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [0, 1]; \quad (8)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = v(x), \quad x \in (0, 1). \quad (9)$$

Также хорошо известно [10], что входящее в теорему Проттера условие Геллерстедта [11] $\lim_{y \rightarrow +0} y^{1-m} A(x, y) = 0$ не является необходимым для корректности задачи Коши. В качестве примеров обычно приводятся уравнения $L(u) = 0$ с оператором Бицадзе–Лыкова [1] $L_1 \equiv y^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a \frac{\partial}{\partial x}$ или с оператором типа Бицадзе–Лыкова [8]:

$$L_m \equiv y^{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + ay^{m-1} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (10)$$

Покажем, что для уравнения с оператором (10), возмущенного значениями одноименной младшей производной, вычисленной в точке $Q(1-x; y)$, задача Коши (8), (9) остается корректной.

В области Ω , определенной в (2), рассмотрим уравнение

$$L_m(u) + \varepsilon y^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} u(1-x, y) = 0, \quad a, \varepsilon \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Так как $\frac{\partial}{\partial x} u(1-x, y) = -\frac{\partial u}{\partial x}(1-x, y)$, то уравнение (11) можно записать следующим образом:

$$y^{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + ay^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon y^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x}(1-x, y) = 0. \quad (12)$$

Рассматривая дополнительно уравнение (12) в точке $Q(1-x; y)$ и обозначая $v(x, y) = u(1-x, y)$, для вектор-функции $U(x, y) = (u; v)^T$ получим систему дифференциальных уравнений

$$y^{2m} U_{xx} - U_{yy} + y^{m-1} A U_x = 0 \quad (13)$$

с постоянной матрицей $A = \begin{pmatrix} a & \varepsilon \\ -\varepsilon & -a \end{pmatrix}$.

В характеристических координатах $\xi = x - \frac{y^{m+1}}{m+1}$, $\eta = x + \frac{y^{m+1}}{m+1}$ система уравнений (13) приводится к системе уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД) специального вида

$$(\eta - \xi) U_{\xi\xi} + P U_{\xi} - G U_{\eta} = 0, \quad (14)$$

с матрицами $P = \frac{1}{4}(E + A)$, $G = \frac{1}{4}(E - A)$, где E — единичная матрица второго порядка.

Матрица Римана для системы уравнений (14) имеет следующий вид [12]:

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sqrt{\frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0}} \left(\frac{\eta - \xi_0}{\eta_0 - \xi} \right)^G F(G, P; E; z),$$

где $F(G, P; E; z)$ — гипергеометрическая функция с матричными параметрами [13] и аргументом $z = \frac{(\xi - \xi_0)(\eta_0 - \eta)}{(\eta - \xi_0)(\eta_0 - \xi)}$ и z^G — степенная функция с матричным параметром, определяются на спектре матриц G и P известным образом [13, 14].

Обозначая спектры матриц A , G и P символами $\Lambda(A) = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\Lambda(G) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\Lambda(P) = \{\mu_1, \mu_2\}$ и учитывая равенство $G + P = \frac{1}{2}E$ для собственных значений α_k , λ_k и μ_k , получим следующие соотношения: $\lambda_k = \frac{1}{4}(1 - \alpha_k)$, $\mu_k = \frac{1}{4}(1 + \alpha_k)$, причем $\lambda_k + \mu_k = \frac{1}{2}$, $k = 1, 2$.

Используя определение функции на спектре матрицы, в работе [15] выписан явный вид матрицы Римана, а, именно, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sqrt{\frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0}} \left[\frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\eta - \xi_0}{\eta_0 - \xi} \right)^{\lambda_1} F(\lambda_1, \mu_1; 1; z) + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{\eta - \xi_0}{\eta_0 - \xi} \right)^{\lambda_2} F(\lambda_2, \mu_2; 1; z) \right];$$

если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sqrt{\frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0}} \left(\frac{\eta - \xi_0}{\eta_0 - \xi} \right)^\lambda \left\{ EF(\lambda, \mu; 1; z) + (G - \lambda E) \left[\ln \frac{\eta - \xi_0}{\eta_0 - \xi} F(\lambda, \mu; 1; z) + F_*(\lambda, \mu; 1; z) - F_*(\lambda, \mu; 1; z) \right] \right\},$$

где $F_*(\alpha, \beta; \gamma; z)$ и $F_*(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — неоднородные (ассоциированные, по другой терминологии) гипергеометрические функции Гаусса [16].

Учитывая вид матрицы A и полагая для определенности $a > 0$, получим следующие реализации ее спектра:

- 1) $\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - \varepsilon^2} \in R$, если $a > |\varepsilon|$ ($a^2 - \varepsilon^2 \neq 1$);
- 2) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, если $a = \varepsilon$ (матрица A — нильпотентна);
- 3) $\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - a^2} i \in C$, если $a > |\varepsilon|$.

Случаи $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ (тогда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1/2$) и $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ следует выделить особо. В этих случаях вид матрицы Римана существенно упрощается:

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = 2G \sqrt{\frac{\eta - \xi}{\eta_0 - \xi}} + (E - 2G) \sqrt{\frac{\eta - \xi}{\eta - \xi_0}}.$$

Применяя метод Римана, в работе [15] для системы уравнений ЭПД (14) найдены решения Задачи Коши (6), (7) при некоторых ограничениях на спектр матрицы A . Используя результаты работы [15], нетрудно выписать решения задачи с условиями (6) и (7) и для системы уравнений (13). Так, например, если $\Lambda(A) \subset (-1, 1)$, решение системы уравнений (11) в матричной форме имеет вид

$$U(x, y) = B^{-1}(G, P) \int_0^1 (1-t)^{G-E} t^{P-E} \bar{\tau}(s) dt + H^{-1}(P, S) y \int_0^1 (1-t)^{-P} t^{-G} \bar{v}(s) dt,$$

где $s = x - \frac{y^{m+1}}{m+1}(1-2t)$, матрицы $B(G, P) = \Gamma(G)\Gamma(P)\Gamma^{-1}(G+P)$, $H(P, G) = B(E-P, E-G)$ [13], а $B(p, q)$ и $\Gamma(z)$ — бета- и гамма-функции соответственно [17].

В частности, при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ в развернутой записи имеем

$$U(x, y) = \frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[k_1 \int_0^1 (1-t)^{\lambda_1-1} t^{\mu_1-1} \bar{\tau}(s) dt + h_1 y \int_0^1 (1-t)^{-\mu_1} t^{-\lambda_1} \bar{v}(s) dt \right] +$$

$$+ \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} \left[k_2 \int_0^1 (1-t)^{\lambda_2-1} t^{\mu_2-1} \bar{\tau}(s) dt + h_2 y \int_0^1 (1-t)^{-\mu_2} t^{-\lambda_2} \bar{v}(s) dt \right],$$

где $k_i = B^{-1}(\lambda_i, \mu_i)$, $h_i = H^{-1}(\mu_i, \lambda_i) = B^{-1}(1 - \mu_i, 1 - \lambda_i)$, $i = 1, 2$.

Используя явный вид идемпотентов $\frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1}$ и $\frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2}$, легко записать первую компоненту вектора $U(x, y)$ и найти тем самым решение задачи Коши (8), (9) для уравнения (11).

В случае $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ решение системы уравнений (13) имеет вид

$$U(x, y) = \frac{E + A}{2} \left[\bar{\tau} \left(x + \frac{y^{m+1}}{m+1} \right) + \frac{y}{m+1} \int_0^1 \frac{\bar{v}(s) dt}{(1-t)^\alpha} \right] + \frac{E - A}{2} \left[\bar{\tau} \left(x - \frac{y^{m+1}}{m+1} \right) + \frac{y}{m+1} \int_0^1 \frac{\bar{v}(s) dt}{t^\alpha} \right],$$

где $s = x - \frac{y^{m+1}}{m+1}(1 - 2t)$, $\alpha = \frac{m}{m+1}$.

Выделяя первую компоненту вектора $U(x, y)$, находим

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ (1+a) \tau \left(x + \frac{y^{m+1}}{m+1} \right) + (1-a) \tau \left(x - \frac{y^{m+1}}{m+1} \right) + \varepsilon \left[\tau \left(1 - x - \frac{y^{m+1}}{m+1} \right) - \tau \left(1 - x + \frac{y^{m+1}}{m+1} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{y}{2} \int_0^1 [(1+\alpha)v(s) + \varepsilon v(1-s)] \frac{dt}{(1-t)^\alpha} + \frac{y}{2} \int_0^1 [(1-a)v(s) - \varepsilon v(1-s)] \frac{dt}{t^\alpha} \right\}.$$

Достаточные условия корректности задачи Коши для уравнения (11) приведены в теореме.

ТЕОРЕМА 1. Если заданные функции $\tau(x), v(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $a^2 - \varepsilon^2 \leq 1$, то задача (8), (9) для уравнения (11) в классе функций $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup (0, 1)) \cap C^2(\Omega)$ корректна по Адамару [10].

Рассмотренный выше пример нелокального вырождающегося гиперболического уравнения является частным случаем модельного уравнения (1) с дифференциальными операторами $L = yL_m - b \frac{\partial}{\partial y}$, где L_m определен в формуле (10), и $M = \varepsilon y^m \frac{\partial}{\partial x} - \sigma \frac{\partial}{\partial y}$ при $b = \sigma = 0$. В общем случае класс таких уравнений описывается равенством

$$\left(yL_m - b \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x, y) + \left(\varepsilon y^m \frac{\partial}{\partial x} - \sigma \frac{\partial}{\partial y} \right) u(1-x, y) = 0, \quad b, \varepsilon, \sigma \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Хорошо известно, что вырождение порядка вносит новый аспект в теорию уравнений и систем уравнений смешанного типа, в частности, в вопрос корректной постановки задачи Коши [18]. Именно, задача с начальным условием (9) на линии вырождения может оказаться не разрешимой, в то время как задача с условием $\lim_{y \rightarrow +0} k(y) u_y(x, y) = v(x)$ при специальном вы-

боре зависимости $k = k(y)$ становится корректной.

В работе авторов этой статьи [19] уравнение (15) было рассмотрено в случае $\sigma = 0$. Относительно вектор-функции $U(x, y) = (u; v)^T$, где, как и раньше, $v(x, y) = u(1-x, y)$, уравнение

$$y^{2m+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a y^m \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} u(1-x, y) = 0 \quad (16)$$

редуцировалось к системе дифференциальных уравнений

$$y^{2m+1} U_{xx} - y U_{yy} + y^m A U_x - B U_y = 0 \quad (17)$$

с той же матрицей A , что и в уравнении (13), и матрицей $B = bE$, E — единичная матрица.

Система уравнений (17) в общем случае объединяет довольно широкий класс модельных гиперболических при $y > 0$ систем уравнений с кратными характеристиками, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа $y = 0$ и которая в характеристических координатах редуцируется к системе уравнений ЭПД. Указанная система уравнений (17) была предметом исследований авторов этой статьи в целом ряде публикаций в основном в связи с проблемой корректности задачи Коши–Гурса и нелокальными краевыми задачами. Библиографию этих работ можно найти в статье [20].

В отмеченной выше статье [19] для уравнения (16) обоснована корректность задачи Коши с начальным условием

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^b u_y(x, y) = v(x), \quad x \in (0, 1) \quad (18)$$

вместо (9).

Следующий пример показывает, каким образом вырождение порядка и наличие младшей производной, вычисленной в инволютивной точке, отражается на постановке задачи Коши.

Рассмотрим уравнение (15) при $a = \varepsilon = 0$. Получим уравнение

$$y^{2m+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - b \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma \frac{\partial u}{\partial y} (1-x, y) = 0. \quad (19)$$

Так как $\frac{\partial}{\partial y} u(1-x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(1-x, y)$, его можно записать следующим образом:

$$y^{2m+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - b \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma \frac{\partial u}{\partial y} (1-x, y) = 0. \quad (20)$$

Рассматривая дополнительно уравнение (20) в точке $Q(1-x; y)$ и обозначая, как обычно, $v(x, y) = u(1-x, y)$, для вектор-функции $U(x, y) = (u; v)^T$ получим систему дифференциальных уравнений

$$y^{2m-1} U_{xx} - y U_{yy} - B U_y = 0 \quad (21)$$

с матрицей $B = \begin{pmatrix} b & -\sigma \\ -\sigma & b \end{pmatrix}$.

Уравнение (19) и систему уравнений (21) будем изучать в характеристической области Ω (2). В характеристических координатах $\xi = x - \frac{1}{m+1} y^{m+1}$, $\eta = x + \frac{1}{m+1} y^{m+1}$ система уравнений (21) приводится к ЭПД-системе частного вида:

$$(\eta - \xi) U_{\xi\eta} - G(U_\eta - U_\xi) = 0$$

с матрицей $G = \frac{1}{2(m+1)}(B + mE)$, спектр которой $\Lambda(G) = \{\lambda_i : \lambda_i = \frac{\beta_i + m}{2(m+1)}, \beta_i \in \Lambda(B)\}$.

В работе [21] для системы дифференциальных уравнений (21) найдены решения задачи Коши в области Ω с условием (6) и условием

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^B U_y(x, y) = \bar{v}(x) \equiv (v_1(x); v_2(x))^T, \quad x \in (0, 1) \quad (22)$$

вместо условия (7) при различных предположениях относительно спектра $\Lambda(B)$ матрицы B .

В случае, когда $\Lambda(G) \subset \left(0, \frac{1}{2}\right)$, а, следовательно, $\Lambda(B) \subset (-m, 1)$, это решение может быть записано в виде

$$U(x, y) = k(G) \int_0^1 (t - t^2)^{G-E} \bar{\tau}(s) dt + y^{E-B} k(E-G)(E-B)^{-1} \int_0^1 (t - t^2)^{-G} \bar{v}(s) dt,$$

где $k(G) = B^{-1}(G, G) \equiv \Gamma(2G)\Gamma^{-2}(G)$ [13], $s = x + \frac{1}{m+1} y^{m+1} (2t - 1)$.

При любых действительных значениях коэффициентов b и σ ($\sigma \neq 0$) матрица B является матрицей простой структуры. Её собственные значения $\beta_1 = b + \sigma$ и $\beta_2 = b - \sigma$ действительны и различны. Для этого случая в работе [21] решение задачи Коши (6), (22) получено в явном виде:

$$U(x, y) = \frac{B - \beta_2 E}{\beta_1 - \beta_2} \left[k_1 \int_0^1 (t - t^2)^{\lambda_1 - 1} \bar{\tau}(s) dt + h_1 \frac{y^{1-\beta_1}}{1-\beta_1} \int_0^1 (t - t^2)^{-\lambda_1} \bar{v}(s) dt \right] + \\ + \frac{B - \beta_1 E}{\beta_2 - \beta_1} \left[k_2 \int_0^1 (t - t^2)^{\lambda_2 - 1} \bar{\tau}(s) dt + h_2 \frac{y^{1-\beta_2}}{1-\beta_2} \int_0^1 (t - t^2)^{-\lambda_2} \bar{v}(s) dt \right], \quad (23)$$

где $k_i = k(\lambda_i) = B^{-1}(\lambda_i, \lambda_i)$, $h_i = h(\lambda_i) = k(1 - \lambda_i)$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим подробнее условие (22). Используя определение функциональной матрицы $y^B = \frac{B-\beta_2 E}{\beta_1-\beta_2} y^{\beta_1} + \frac{B-\beta_1 E}{\beta_2-\beta_1} y^{\beta_2}$ в случае $\beta_1 \neq \beta_2$ [14] и явный вид идемпотентов $\frac{B-\beta_2 E}{\beta_1-\beta_2}$ и $\frac{B-\beta_1 E}{\beta_2-\beta_1}$, легко показать, что условие (22) равносильно двум инволютивно взаимосвязанным условиям, а, именно, если $v_1(x) = v(x)$ — заданная функция, то $v_2(x) = v(1-x)$. Таким образом, в силу условия (22) одновременно существуют пределы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow +0} \left\{ y^{b+\sigma} \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y) - u(1-x, y)] + y^{b-\sigma} \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y) + u(1-x, y)] \right\} &= v(x), \\ \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow +0} \left\{ y^{b+\sigma} \frac{\partial}{\partial y} [-u(x, y) + u(1-x, y)] + y^{b-\sigma} \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y) + u(1-x, y)] \right\} &= v(1-x), \end{aligned}$$

а значит, будут существовать их сумма и разность. Обозначая $v(x) - v(1-x) = \mu_1(x)$, $v(x) + v(1-x) = \mu_2(x)$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +0} y^{b+\sigma} \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y) - u(1-x, y)] &= \mu_1(x), \\ \lim_{y \rightarrow +0} y^{b-\sigma} \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y) + u(1-x, y)] &= \mu_2(x). \end{aligned} \quad (24)$$

Вновь учитывая, что $\frac{\partial}{\partial y} u(1-x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(1-x, y) = u_y(1-x, y)$, условия (24) можно переписать и так:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +0} y^{b+\sigma} [u_y(x, y) - u_y(1-x, y)] &= \mu_1(x), \\ \lim_{y \rightarrow +0} y^{b-\sigma} [u_y(x, y) + u_y(1-x, y)] &= \mu_2(x), \end{aligned} \quad (25)$$

$x \in (0, 1)$. Заметим, что условия (25) в таком виде являются нелокальными, ибо они содержат значения производных по y от искомой функции, вычисленные в разных, инволютивно связанных, точках сингулярной части границы характеристической области Ω .

Выписывая первую компоненту вектора $U(x, y)$ в формуле (23), находим решение начальной задачи с условиями (8) и (25) для дифференциального уравнения (19) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) = \frac{1}{2} \left[k(\lambda_1) \int_0^1 \frac{\tau(s) - \tau(1-s)}{(t-t^2)^{1-\lambda_1}} dt + k(1-\lambda_1) \frac{y^{1-\beta_1}}{1-\beta_1} \int_0^1 \frac{\mu_1(s)}{(t-t^2)^{\lambda_1}} dt \right] + \\ + \frac{1}{2} \left[k(\lambda_2) \int_0^1 \frac{\tau(s) + \tau(1-s)}{(t-t^2)^{1-\lambda_2}} dt + k(1-\lambda_2) \frac{y^{1-\beta_2}}{1-\beta_2} \int_0^1 \frac{\mu_2(s)}{(t-t^2)^{\lambda_2}} dt \right], \end{aligned} \quad (26)$$

где $\lambda_i = \frac{\beta_i+m}{2(m+1)}$, $\beta_i \in (-m, 1)$, $k(\lambda_i) = \frac{1}{B(\lambda_i, \lambda_i)}$, $i = 1, 2$; $s = x + \frac{1}{m+1} y^{m+1} (2t-1)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\tau(x)$, $\mu_i(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $i = 1, 2$. Тогда регулярное в области Ω решение уравнения (13) в классе функций $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup (0, 1)) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее начальным условиям (8) и (25) при $b-\sigma$, $b+\sigma \in (-m, 1)$, имеет вид (26). Задача корректна по Адамару.

Анализируя приведенные примеры, можно сделать следующий вывод.

Корректность по Адамару начальных задач для вырождающихся гиперболических операторов, возмущенных младшими производными искомой функции с инволютивно преобразованными аргументами, находится в зависимости и является прямым следствием корректности задачи Коши для соответствующих систем дифференциальных уравнений, к которым редуцируются данные нелокальные дифференциальные уравнения.

Отметим, что при $\sigma \rightarrow 0$ решение (25) задачи с условиями (8) и (25) переходит в известное решение задачи Коши для вырождающегося уравнения (19) при $\sigma = 0$ [10] с условиями (8) и (18).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.
2. *Carleman T.* Sur la theorie des equations integrales et ses applications // *Verhandl. des internat. Mathem. Kongr.* — Vol. I. — Zurich, 1932. — P. 138–151.
3. *Андреев А. А.* О корректности начальных задач для некоторых уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом / В сб.: Уравнения неклассического типа. — Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1986. — С. 10–14.
4. *Андреев А. А.* О корректности краевых задач для некоторых уравнений в частных производных с карлемановским сдвигом / Дифференциальные уравнения и их приложения: Тр. II международ. семинара. — Самара: Сам. ун-т, 1998. — С. 5–18.
5. *Андреев А. А., Огородников Е. Н.* О корректности начальных краевых задач для одного гиперболического уравнения с вырождением порядка и инволютивным отклонением // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ.-мат. науки»*, 2000. — Вып. 9. — С. 32–36.
6. *Андреев А. А.* Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом // *Дифференц. уравнения*, 2004. — Т. 40, № 5. — С. 1126–1128.
7. *Андреев А. А., Саушкин И. Н.* Об аналоге задачи Трикоми для одного модельного уравнения с инволютивным отклонением в бесконечной области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ.-мат. науки»*, 2005. — Вып. 34. — С. 10–16.
8. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. — М.: Высш. шк., 1985. — 304 с.
9. *Protter M. N.* The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation // *Can. J. Math.*, 1954. — Vol. 6. — P. 542–553.
10. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
11. *Gellerstedt S.* Sur une equation lineaire aux derivees partielles de type mixte // *Arkiv. Mat., Asrt. och Fysik*, 1937. — No. 29. B. 25A. — P. 1–23.
12. *Андреев А. А.* О некоторых приложениях ассоциированных гипергеометрических функций // *Дифференц. уравнения (математическая физика): Материалы Куйб. обл. межвуз. науч. Совещания–семинара.* — № 12. — Куйбышев, 1984. — С. 8–9.
13. *Андреев А. А., Огородников Е. Н.* Матричные интегродифференциальные операторы и их применение // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ.-мат. науки»*, 1999. — Вып. 7. — С. 27–37.
14. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 576 с.
15. *Андреев А. А., Сеницкий А. Ю.* О задаче Коши для системы вырождающихся уравнений типа Лыкова // В сб.: Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных. — Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. — С. 105–107.
16. *Андреев А. А., Килбас А. А.* О некоторых ассоциированных гипергеометрических функциях // *Изв. вузов. Математика*, 1984. — № 12. — С. 3–12.
17. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3 т. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1973. — 296 с.
18. *Бицадзе А. В.* К теории одного класса уравнений смешанного типа // В сб.: Некоторые проблемы математики и механики. — Л.: Наука, Л. отд., 1970. — С. 112–119.
19. *Андреев А. А., Огородников Е. Н.* О корректности задач Коши–Гурса для гиперболического уравнения с вырождением порядка и инволютивным отклонением в одном специальном случае // *Математическое моделирование, статистика и информатика в современном управлении экономикой: Тр. международ. конф.* — Самара: СамГЭА, 2001. — С. 199–202.
20. *Огородников Е. Н.* Корректность задачи Коши–Гурса для системы вырождающихся нагруженных гиперболических уравнений в некоторых специальных случаях и ее равносильность задачам с нелокальными краевыми условиями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ.-мат. науки»*, 2004. — Вып. 26. — С. 26–38.
21. *Андреев А. А.* Задача Коши для некоторых вырождающихся гиперболических систем второго и четвертого порядков // В сб.: Дифференц. и интеграл. уравнения. — Куйбышев: КГПИ, 1987. — С. 46–57.

Поступила 9.09.2006 г.