Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Э. Сеницкий, И. Е. Козьма, Нестационарная осесимметричная динамическая задача для трехслойной ортотропной цилиндрической оболочки, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 52–67

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu453>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:38:26

Механика деформируемого твердого тела

УДК 539.3:517.956

Ю. Э. Сеницкий, И. Е. Козьма

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

На основе уточненной теории приведено новое замкнутое решение осесимметричной динамической задачи для упругой трехслойной ортотропной круговой цилиндрической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью при произвольном её загрузении и упругом защемлении торцов. При этом учитываются силы вязкоупругого сопротивления. Применен метод многокомпонентных биортogonalных конечных интегральных преобразований. Показано, что в случае диагональной матрицы инерционных членов собственные значения и собственные функции, определяющие искомые спектральные разложения, являются вещественными.

Построение точных решений нестационарных задач для неоднородных, в том числе трехслойных оболочек представляет большие трудности, поэтому результаты здесь известны лишь для сферических и цилиндрических оболочек [1–3].

В настоящем исследовании рассматривается трехслойная круговая цилиндрическая оболочка длиной $z^* = H^*$, внешний, внутренний и средний слой которой имеют толщины h_1 , h_2 , h . Радиус кривизны ее нейтральной поверхности R . В цилиндрической системе координат $r = R, \theta, Z$ оболочка занимает область $\Omega: \{0 \leq z^* \leq H^*, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ и загружена произвольной осесимметричной линейной $q_R^*(z^*, t^*)$, $q_z^*(z^*, t^*)$ и моментной $m_z^*(z^*, t^*)$ нагрузками (t^* — время). Исследуется случай упругого защемления торцов оболочки, коэффициент жесткости которого относительно углов поворота χ_3^* . Модули упругости и коэффициенты Пуассона верхнего (наружного) и нижнего (внутреннего) слоев равны E_1 , E_2 и ν_1 , ν_2 , а средний ортотропный слой имеет приведенные коэффициенты жесткости C_{11} , C_{44} , причем $C_{11} = \frac{E_z}{C}$, $C_{44} = G_{r\theta}$, $C = 1 - \nu_{z\theta}\nu_{\theta z}$. Здесь E_z , $G_{r\theta}$, $\nu_{z\theta}$, $\nu_{\theta z}$ — модуль упругости, модуль сдвига и соответствующие коэффициенты Пуассона материала среднего слоя оболочки.

1. Постановка задачи. Исследование проводится в предположении, что наружные слои оболочки испытывают мембранное напряженно-деформированное состояние, в то время как для среднего слоя справедлива уточненная теория типа С. П. Тимошенко. Это значит, что дополнительно учитываются деформация поперечного сдвига и инерция поворота поперечных сечений. Таким образом, деформированное состояние всего пакета определяется на основании гипотезы ломаной линии при идеальном контакте слоев.

Дифференциальные уравнения осесимметричного движения трехслойной цилиндрической оболочки при наличии всех инерционных членов и соответствующие упругому защемлению торцов краевые условия записываются в безразмерной форме следующим образом [4]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_{15} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + a_{14} \frac{\partial W}{\partial z} + a_{17} \Psi - I_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - I_{13} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= -q_z, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - a_{34} \frac{\partial U}{\partial z} + a_{36} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - a_{33} W - I_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= -a_{11} q_R, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + a_{44} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_{48} \frac{\partial W}{\partial z} - a_{49} \Psi - I_{33} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - I_{31} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -m_z \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

при $z = 0, H$ —

$$\left. \begin{aligned} U = W = 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \pm \chi_3 \Psi, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

при $t = 0$ —

$$\left. \begin{aligned} U = U_0(z), \quad W = W_0(z), \quad \Psi = \Psi_0(z), \\ \frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{U}_0^*(z), \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{W}_0^*(z), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{\Psi}_0^*(z). \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Здесь $U(z, t)$, $W(z, t)$, $\Psi(z, t)$ — безразмерные компоненты вектора перемещений и угол поворота нормали, причем

$$U = \frac{U^*(z^*, t^*)}{R}, \quad W = \frac{W^*(z^*, t^*)}{R}. \quad (1.4)$$

Звездочкой обозначены соответствующие размерные величины. Безразмерная координата z , время t и остальные величины определяются такими соотношениями:

$$\begin{aligned} z = \frac{z^*}{R}, \quad H = \frac{H^*}{R}, \quad t = \frac{t^*}{R} \sqrt{\frac{A_{11}}{m_1}}, \quad q_z = q_z^* \frac{R}{A_{11}}, \quad q_R = q_R^* \frac{R}{A_{11}}, \quad m_z = m_z^* \frac{R^2}{A_{41}}, \\ \chi_3 = \chi_3^* \frac{R}{A_{41}^0}, \quad U_0 = \frac{U_0^*}{R}, \quad W_0 = \frac{W_0^*}{R}, \quad \mathcal{U}_0^* = \frac{\mathcal{U}_0^{*0}}{R}, \quad \mathcal{W}_0^* = \frac{\mathcal{W}_0^{*0}}{R}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Безразмерные постоянные коэффициенты уравнений a_{ik} и I_{ik} зависят от физико-механических характеристик и геометрических параметров оболочки, а именно:

$$\begin{aligned} a_{11} = \frac{A_{11}}{A_{31}}, \quad a_{14} = \frac{A_{14}}{A_{11}} R, \quad a_{15} = \frac{A_{15}}{A_{11}} R^{-1}, \quad a_{17} = \frac{A_{17}}{A_{11}} R, \quad a_{33} = \frac{A_{33}}{A_{31}} R^2, \quad a_{34} = \frac{A_{34}}{A_{31}} R, \\ a_{36} = \frac{A_{36}}{A_{31}}, \quad a_{44} = \frac{A_{44}}{A_{41}} R, \quad a_{48} = \frac{A_{48}}{A_{41}} R^2, \quad a_{49} = \frac{A_{49}}{A_{41}} R^2, \quad I_{11} = 2, \quad I_{13} = 2 \frac{m_3}{m_1} R^{-1}, \\ I_{22} = 2 \frac{A_{11}}{A_{31}}, \quad I_{33} = 2 \frac{m_2}{m_1} \frac{A_{11}}{A_{41}}, \quad I_{31} = 2 \frac{m_3}{m_1} \frac{A_{11}}{A_{41}} R, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} = c_{11} h + \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} \frac{E_n h_n}{1 - v_n^2}, \quad A_{14} = \frac{1}{R} (A_{11} + A_{31}), \quad A_{15} = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^2 \frac{E_n h_n}{1 - v_n^2}, \quad A_{17} = c_{44} \frac{h}{R}, \\ A_{31} = A_{17} R, \quad A_{33} = A_{11} R^{-2}, \quad A_{34} = A_{11} R^{-1}, \quad A_{36} = \left[c_{44} - (2R)^{-1} \sum_{n=1}^2 \frac{E_n h_n}{1 - v_n^2} \right] h, \\ A_{44} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 \frac{E_n h_n (2h + h_n)}{1 - v_n^2}, \quad A_{41} = \left[c_{11} \frac{h^2}{3} + \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} \frac{E_n h_n (2h + h_n)}{1 - v_n^2} \right] \frac{h}{4}, \\ A_{48} = -c_{44} h + R^{-1} A_{44}, \quad A_{49} = A_{17} R, \quad A_{41}^0 = \left[c_{11} \frac{h^2}{3} + \sum_{n=1}^2 (-1)^{n+1} \frac{E_n h_n h}{1 - v_n^2} \right] \frac{h}{4}, \\ m_1 = \rho_0 h + \rho_1 h_1 \left[1 + (2R)^{-1} (h + h_1) \right] - \rho_2 h_2 \left[1 - (2R)^{-1} (h + h_2) \right], \\ m_2 = \rho_0 \frac{h^3}{12} + \rho_1 \frac{h^2 h_1}{4} \left[1 + (2R)^{-1} (h + h_1) \right] - \rho_2 \frac{h^2 h_2}{4} \left[1 - (2R)^{-1} (h + h_2) \right], \\ m_3 = \rho_0 \frac{h^3}{12R} + \rho_1 \frac{h h_1}{2} \left[1 + (2R)^{-1} (h + h_1) \right] + \rho_2 \frac{h h_2}{2} \left[1 - (2R)^{-1} (h + h_2) \right], \end{aligned} \quad (1.7)$$

ρ_0 , ρ_1 , ρ_2 — соответственно плотности среднего, внешнего (наружного) и внутреннего слоев цилиндрической оболочки.

Начальные перемещения $U_0(z)$, $W_0(z)$, $\Psi_0(z)$ (начальные несовершенства) и скорости перемещений $\mathcal{U}_0^*(z)$, $\mathcal{W}_0^*(z)$, $\mathcal{\Psi}_0^*(z)$ полагаются заданными.

Граничные условия (1.2) соответствуют упругому замещению торцов и относятся к среднему слою цилиндрической оболочки.

Соотношения (1.1)–(1.3) представляют математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи в перемещениях.

Для полного описания напряженно-деформированного состояния трехслойной круговой цилиндрической оболочки необходимо её дополнить физическими уравнениями, связывающими погонные внутренние усилия, которые возникают в среднем, внешнем и внутреннем слоях с компонентами вектора перемещений:

$$\begin{aligned} N_z &= \frac{N_z^*}{c_{11}h} = \frac{\partial U}{\partial z} + W, \quad N_\theta = \frac{N_\theta^*}{c_{11}h} = \frac{c_{12}}{c_{11}} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + W \right), \quad M_z = \frac{M_z^*}{c_{11}h^2} = \frac{h}{12R} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \\ M_\theta &= \frac{M_\theta^*}{c_{11}h^2} = \frac{c_{12}}{c_{11}} \left(\frac{h}{12R} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad Q_z = \frac{Q_z^*}{c_{11}h} = \frac{c_{44}}{c_{11}} \left(\Psi + \frac{\partial W}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Соответственно

$$\begin{aligned} N_z^{(1)} &= \frac{N_z^{*(1)}}{E_1 h_1} = (1 - \nu_1^2)^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{h}{2R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + W \right), \\ N_\theta^{(1)} &= \frac{N_\theta^{*(1)}}{E_1 h_1} = \nu_1 (1 - \nu_1^2)^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{h}{2R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + W \right), \\ M_z^{(1)} &= \frac{M_z^{*(1)}}{E_1 h_1 (h + h_1)} = [2(1 - \nu_1^2)]^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{h}{2R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + W \right), \\ M_\theta^{(1)} &= \frac{M_\theta^{*(1)}}{E_1 h_1 (h + h_1)} = \nu_1 [2(1 - \nu_1^2)]^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{h}{2R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + W \right), \\ Q_z^{(1)} &= 0, \\ N_z^{(2)} &= \frac{N_z^{*(2)}}{E_2 h_2} = -(1 - \nu_2^2)^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{h}{2R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + W \right), \\ N_\theta^{(2)} &= \frac{N_\theta^{*(2)}}{E_2 h_2} = -\nu_2 (1 - \nu_2^2)^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{h}{2R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + W \right), \\ M_z^{(2)} &= \frac{M_z^{*(2)}}{E_2 h_2 (h + h_2)} = [2(1 - \nu_2^2)]^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{h}{2R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + W \right), \\ M_\theta^{(2)} &= \frac{M_\theta^{*(2)}}{E_2 h_2 (h + h_2)} = \nu_2 [2(1 - \nu_2^2)]^{-1} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{h}{2R} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + W \right), \\ Q_z^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь N_z , N_θ , Q_z — безразмерные нормальные и поперечные усилия, а M_z , M_θ — соответственно изгибающие моменты.

В математической модели (1.1)–(1.3) силы вязкоупругого сопротивления отсутствуют. В соответствии с методом квазинормальных координат [5] они вводятся в дальнейшем в процессе решения задачи.

2. Построение общего решения. Как будет показано ниже, рассматриваемая начально-краевая задача является несамосопряженной; поэтому при решении нельзя воспользоваться обычной процедурой структурного метода конечных интегральных преобразований [6]. Несамосопряженность математических моделей также установлена ранее при исследовании колебаний многослойных ортотропных тонкостенных конструкций, например [7].

Для подобного класса задач эффективным аналитическим способом решения является разработанный в [8–11] метод биортогональных многокомпонентных конечных интегральных преобразований (КИП). Его математическое обоснование приведено в [8, 9], а алгоритмическая процедура применительно к задачам динамики оболочек вращения подробно изложена в [8, 11].

Вводим на сегменте $z \in [0, H]$ такое многокомпонентное биортогональное КИП по переменной z , определяющее трансформанту $\Phi(\lambda_i, t)$:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_i, t) &= \int_0^H \left\{ [I_{11}U(z, t) + I_{13}\Psi(z, t)] K_1(\lambda_i, z) + I_{22}W(z, t) K_2(\lambda_i, z) + \right. \\ &\quad \left. + [I_{33}\Psi(z, t) + I_{31}U(z, t)] K_3(\lambda_i, z) \right\} dz \end{aligned} \quad (2.1)$$

и соответствующие (2.1) формулы обращения в виде [8–10]:

$$\begin{aligned} U(z, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) G_1(\mu_j, z) (\bar{K}_i, \bar{G}_j)_{i=j}^{-1}; \quad W(z, t) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) G_2(\mu_j, z) (\bar{K}_i, \bar{G}_j)_{i=j}^{-1}; \\ \Psi(z, t) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi(\lambda_i, t) G_3(\mu_j, z) (\bar{K}_i, \bar{G}_j)_{i=j}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Преобразование (2.1), (2.2) справедливо при выполнении следующего соотношения биортогональности [8, 9]:

$$\begin{aligned} \int_0^H \left\{ \left[I_{11} G_1(\mu_j, z) + I_{13} G_3(\mu_j, z) \right] K_1(\lambda_i, z) + I_{22} G_2(\mu_j, z) K_2(\lambda_i, z) + \right. \\ \left. + \left[I_{33} G_3(\mu_j, z) + I_{31} G_1(\mu_j, z) \right] K_3(\lambda_i, z) \right\} dz = \delta_i^j (\bar{K}_i, \bar{G}_j), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где δ_i^j — символ Кронекера.

В соотношениях (2.1)–(2.3) $\bar{K}_i = \bar{K}_i(\lambda_i, z)$, $\bar{G}_j = \bar{G}_j(\mu_j, z)$ — вектор-функции ядер биортогонального КИП с ортогональными компонентами K_{1i}, K_{2i}, K_{3i} и G_{1j}, G_{2j}, G_{3j} , определяемыми соответственно из сопряженной и инвариантной ядровых однородных краевых задач, формирующихся в процессе решения; λ_i, μ_j ($i, j \in \mathbb{C}$) — параметры, образующие счетные множества и являющиеся собственными значениями указанных краевых задач для $\bar{K}_i$ и $\bar{G}_j$; $(\bar{K}_i, \bar{G}_j)_{i=j}$ — обобщенное скалярное произведение вектор-функций $\bar{K}_i$ и $\bar{G}_j$, т.е.

$$\begin{aligned} (\bar{K}_i, \bar{G}_j)_{i=j} = \int_0^H \left\{ I_{11} G_1(\mu_i, z) K_1(\lambda_i, z) + I_{22} G_2(\mu_i, z) K_2(\lambda_i, z) + I_{33} G_3(\mu_i, z) K_3(\lambda_i, z) + \right. \\ \left. + I_{13} G_3(\mu_i, z) K_1(\lambda_i, z) + I_{31} G_1(\mu_i, z) K_3(\lambda_i, z) \right\} dz. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Применяем биортогональное КИП (2.1) к системе дифференциальных уравнений (1.1) и начальным условиям (1.3). В результате получаем:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^H \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_{15} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + a_{14} \frac{\partial W}{\partial z} + a_{17} \Psi \right) K_{1i} dz - \frac{d^2}{dt^2} \int_0^H (I_{11} U + I_{13} \Psi) K_{1i} dz &= - \int_0^H q_z K_{1i} dz, \\ \int_0^H \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - a_{34} \frac{\partial U}{\partial z} + a_{36} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - a_{33} W \right) K_{2i} dz - \frac{d^2}{dt^2} \int_0^H W K_{2i} dz &= -a_{11} \int_0^H q_R K_{2i} dz, \\ \int_0^H \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + a_{44} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_{48} \frac{\partial W}{\partial z} - a_{49} \Psi \right) K_{3i} dz - \frac{d^2}{dt^2} \int_0^H (I_{33} \Psi + I_{31} U) K_{3i} dz &= - \int_0^H m_z K_{3i} dz. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

При $t = 0$ имеем

$$\begin{aligned} 1) \int_0^H U(z, 0) K_{1i} dz &= I_{11} \int_0^H U_0(z) K_{1i} dz; \quad 2) \int_0^H W(z, 0) K_{2i} dz = I_{22} \int_0^H W_0(z) K_{2i} dz; \\ 3) \int_0^H \Psi(z, 0) K_{3i} dz &= I_{33} \int_0^H \Psi_0(z) K_{3i} dz; \quad 4) \int_0^H U(z, 0) K_{3i} dz = I_{31} \int_0^H U_0(z) K_{3i} dz; \\ 5) \int_0^H \Psi(z, 0) K_{1i} dz &= I_{13} \int_0^H \Psi_0(z) K_{1i} dz; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} 6) I_{11} \frac{d}{dt} \int_0^H U(z, 0) K_{1i} dz &= I_{11} \int_0^H \dot{U}_0(z) K_{1i} dz; \quad 7) I_{22} \frac{d}{dt} \int_0^H W(z, 0) K_{2i} dz = I_{22} \int_0^H \dot{W}_0(z) K_{2i} dz; \\ 8) I_{33} \frac{d}{dt} \int_0^H \Psi(z, 0) K_{3i} dz &= I_{33} \int_0^H \dot{\Psi}_0(z) K_{3i} dz; \quad 9) I_{31} \frac{d}{dt} \int_0^H U(z, 0) K_{3i} dz = I_{31} \int_0^H \dot{U}_0(z) K_{3i} dz; \\ 10) I_{13} \frac{d}{dt} \int_0^H \Psi(z, 0) K_{1i} dz &= I_{13} \int_0^H \dot{\Psi}_0(z) K_{1i} dz. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для членов, содержащих производные по пространственной переменной, выполняя интегрирование по частям, а затем складывая уравнения (2.5) и соответственно начальные условия (2.6) и (2.7), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \Phi(K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}, U, W, \Psi) \Big|_0^H + \int_0^H \left[U(K_{1i}'' + a_{34}K_{2i}' + a_{44}K_{3i}'') + W(K_{2i}'' - a_{14}K_{1i}' - a_{48}K_{3i}' - a_{33}K_{2i}') + \right. \\ \left. + \Psi(K_{3i}'' + a_{15}K_{1i}'' - a_{36}K_{2i}' + a_{17}K_{1i} - a_{49}K_{3i}) \right] dz - \\ - \frac{d^2}{dt^2} \int_0^H (I_{11}UK_{1i} + I_{22}WK_{2i} + I_{33}\Psi K_{3i} + I_{31}UK_{3i} + I_{13}\Psi K_{1i}) dz = \\ = - \int_0^H (q_z K_{1i} + a_{11}q_R K_{2i} + m_z K_{3i}) dz. \end{aligned} \quad (2.8)$$

При $t = 0$ имеем

$$\begin{aligned} 1) \int_0^H \left[U(z, 0)(I_{11}K_{1i} + I_{31}K_{3i}) + W(z, 0)I_{22}K_{2i} + \Psi(z, 0)(I_{33}K_{3i} + I_{13}K_{1i}) \right] dz = \\ = \int_0^H \left[U_0(z)(I_{11}K_{1i} + I_{31}K_{3i}) + W_0(z)I_{22}K_{2i} + \Psi_0(z)(I_{33}K_{3i} + I_{13}K_{1i}) \right] dz; \\ 2) \frac{d}{dt} \int_0^H \left[U(z, 0)(I_{11}K_{1i} + I_{31}K_{3i}) + W(z, 0)I_{22}K_{2i} + \Psi(z, 0)(I_{33}K_{3i} + I_{13}K_{1i}) \right] dz = \\ = \int_0^H \left[\dot{U}_0(z)(I_{11}K_{1i} + I_{31}K_{3i}) + \dot{W}_0(z)I_{22}K_{2i} + \dot{\Psi}_0(z)(I_{33}K_{3i} + I_{13}K_{1i}) \right] dz. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь $\Phi(K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}, U, W, \Psi)$ — полилинейная форма, т.е.

$$\begin{aligned} \Phi(K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}, U, W, \Psi) = \left(\frac{\partial U}{\partial z} + a_{15} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + a_{14}W \right) K_{1i} - (U + a_{15}\Psi)K_{1i}' + \\ + \left(\frac{\partial W}{\partial z} - a_{34}U + a_{36}\Psi \right) K_{2i} - WK_{2i}' + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + a_{44} \frac{\partial U}{\partial z} + a_{48}W \right) K_{3i} - (\Psi + a_{44}U)K_{3i}'. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Штрих обозначает дифференцирование по z .

Вводим два обычных условия структурного алгоритма метода КИП [6, 8, 9, 11], а именно, операционное свойство, и обращение в нуль полилинейной формы на концах сегмента $[0, H]$.

Имеем:

$$\begin{aligned} 1) \int_0^H \left[U(K_{1i}'' + a_{34}K_{2i}' + a_{44}K_{3i}'') + W(K_{2i}'' - a_{14}K_{1i}' - a_{33}K_{2i}' - a_{48}K_{3i}') + \right. \\ \left. + \Psi(a_{15}K_{1i}'' + a_{17}K_{1i} - a_{36}K_{2i}' + K_{3i}'' - a_{49}K_{3i}') \right] dz = \\ = -\lambda_i^2 \int_0^H \left[U(I_{11}K_{1i} + I_{31}K_{3i}) + WI_{22}K_{2i} + \Psi(I_{33}K_{3i} + I_{13}K_{1i}) \right] dz; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$2) \Phi(K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}, U, W, \Psi) \Big|_0^H = 0. \quad (2.12)$$

Если принять теперь во внимание соотношения (2.11), (2.12) и выражение для трансформанты (2.1), то уравнение (2.8) и (2.9) принимают следующий вид:

$$\frac{d^2 \varphi(\lambda_i, t)}{dt^2} + \lambda_i^2 \varphi(\lambda_i, t) = -P(\lambda_i, t), \quad i \in \mathfrak{C}. \quad (2.13)$$

При $t = 0$ имеем

$$\varphi(\lambda_i, 0) = \varphi_0(\lambda_i), \quad \frac{d}{dt} \varphi(\lambda_i, t) \Big|_{t=0} = \Phi_0(\lambda_i), \quad (2.14)$$

где $P(\lambda_i, t)$, $\varphi_0(\lambda_i)$, $\Phi_0(\lambda_i)$ — соответствующие трансформанты, т.е

$$\begin{aligned}
P(\lambda_i, t) &= \int_0^H [q_z(z, t) K_1(\lambda_i, z) + a_{11} q_R(z, t) K_2(\lambda_i, z) + m_z(z, t) K_3(\lambda_i, z)] dz, \\
\Phi_0(\lambda_i) &= \int_0^H \{ [I_{11} U_0(z) + I_{13} \Psi_0(z)] K_1(\lambda_i, z) + I_{22} W_0(z) K_2(\lambda_i, z) + [I_{33} \Psi_0(z) + I_{31} U_0(z)] K_3(\lambda_i, z) \} dz, \\
\Phi_0(\lambda_i) &= \int_0^H \{ [I_{11} \mathcal{U}_0(z) + I_{13} \mathcal{\Psi}_0(z)] K_1(\lambda_i, z) + I_{22} \mathcal{W}_0(z) K_2(\lambda_i, z) + [I_{33} \mathcal{\Psi}_0(z) + I_{31} \mathcal{U}_0(z)] K_3(\lambda_i, z) \} dz. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

С другой стороны, условия (2.11), (2.12) позволяют сформулировать сопряженную краевую задачу для вектор-функции ядра $K(\lambda_i, z)$ биортогонального КИП (2.1), (2.2).

Действительно, из операционного свойства (2.11) следует однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений для ее компонент $K_1(\lambda_i, z)$, $K_2(\lambda_i, z)$, $K_3(\lambda_i, z)$:

$$\begin{aligned}
K''_{1i} + a_{34} K'_{2i} + \lambda_i^2 I_{11} K_{1i} + (a_{44} + \lambda_i^2 I_{31}) K_{3i} &= 0; \\
K''_{2i} - a_{14} K'_{1i} - a_{48} K'_{3i} + (\lambda_i^2 I_{22} - a_{33}) K_{2i} &= 0; \\
K''_{3i} + a_{15} K''_{1i} - a_{36} K'_{2i} + (a_{17} + \lambda_i^2 I_{13}) K_{1i} + (\lambda_i^2 I_{33} - a_{49}) K_{3i} &= 0. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Воспользуемся теперь равенством (2.12), которое с учетом выражения (2.10) и граничных условий (1.2) принимает следующий вид:

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial z} (K_{1i} + a_{44} K_{3i}) + \frac{\partial W}{\partial z} K_{2i} + \Psi [a_{36} K_{2i} - a_{15} K'_{1i} - K'_{3i} \pm \chi_3 (K_{3i} + a_{15} K_{1i})] \right\} \Big|_0^H = 0.$$

Поскольку производные $\frac{\partial U}{\partial z}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ и углы поворота ψ не определены на концах сегмента $[0, H]$, то обращение в нуль приведенного выше выражения возможно при выполнении таких граничных условий:

при $z = [0, H]$ —

$$\left. \begin{aligned} K_{1i} + a_{44} K_{3i} &= 0; K_{2i} = 0, \\ K'_{3i} + a_{15} K'_{1i} - \chi_3 (K_{3i} + a_{15} K_{1i}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

З а м е ч а н и е 1. При соответствиях $U \sim K_{1i}$, $W \sim K_{2i}$, $\Psi \sim K_{3i}$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sim -\lambda_i^2$ дифференциальный оператор (2.16), (2.17) не инвариантен (1.1), (1.2), т.е. начально-краевая задача (1.1)–(1.3) является несамосопряженной.

Таким образом, сформулированы счетная система задач Коша (2.13), (2.14) для трансформанты $\Phi(\lambda_i, t)$ и сопряженная однородная краевая задача для компонентов K_{1i}, K_{2i}, K_{3i} вектор-функции $\bar{K}(\lambda_i, z)$ ядра биортогонального конечного интегрального преобразования (2.1), (2.2).

В соответствии с алгоритмической процедурой метода биортогональных конечных интегральных преобразований [8, 9, 11] подействуем на дифференциальные уравнения (2.16) соответственно интегральными операторами

$$\int_0^H G_1(\mu_j, z) dz, \quad \int_0^H G_2(\mu_j, z) dz, \quad \int_0^H G_3(\mu_j, z) dz,$$

то есть

$$\begin{aligned}
\int_0^H [K''_{1i} + a_{34} K'_{2i} + \lambda_i^2 I_{11} K_{1i} + (a_{44} + \lambda_i^2 I_{31}) K_{3i}] G_1(\mu_j, z) dz &= 0; \\
\int_0^H [K''_{2i} - a_{14} K'_{1i} - a_{48} K'_{3i} + (\lambda_i^2 I_{22} - a_{33}) K_{2i}] G_2(\mu_j, z) dz &= 0; \\
\int_0^H [K''_{3i} + a_{15} K''_{1i} - a_{36} K'_{2i} + (a_{17} + \lambda_i^2 I_{13}) K_{1i} + (\lambda_i^2 I_{33} - a_{49}) K_{3i}] G_3(\mu_j, z) dz &= 0. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

Повторяя, как и выше, предусмотренную структурным алгоритмом метода КИП процедуру выделения сопряженного оператора, т.е. интегрируя по частям и складывая равенства (2.18), находим:

$$\begin{aligned}
& \Omega(K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}, G_{1j}, G_{2j}, G_{3j}) \Big|_0^H + \int_0^H \left(K_{1i} G_{1j}'' - a_{34} K_{2i} G_{1j}' + a_{44} K_{3i} G_{1j}'' + K_{2i} G_{2j}'' + a_{14} K_{1i} G_{2j}' - \right. \\
& \left. - a_{33} K_{2i} G_{2j} + a_{48} K_{3i} G_{2j}' + K_{3i} G_{3j}'' + a_{15} K_{1i} G_{3j}'' + a_{17} K_{1i} G_{3j} + a_{36} K_{2i} G_{3j} - a_{49} K_{3i} G_{3j} \right) dz = \\
& = -\lambda_i^2 \int_0^H \left(I_{11} K_{1i} G_{1j} + I_{31} K_{3i} G_{1j} + I_{22} K_{2i} G_{2j} + I_{33} K_{3i} G_{3j} + I_{13} K_{1i} G_{3j} \right) dz, \quad (2.19)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Omega(K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}, G_{1j}, G_{2j}, G_{3j}) &= G_{1j} K_{1i}' - G_{1j}' K_{1i} + \\
&+ a_{34} K_{2i} G_{1j} + a_{44} \left(G_{1j} K_{3i}' - K_{3i} G_{1j}' \right) + G_{2j} K_{2i}' - G_{2j}' K_{2i} + a_{14} K_{1i} G_{2j} - a_{48} K_{3i} G_{2j} + \\
&+ \left(G_{3j} K_{3i}' - K_{3i} G_{3j}' \right) + a_{15} \left(G_{3j} K_{1i}' - K_{1i} G_{3j}' \right) - a_{36} K_{2i} G_{3j}. \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Вводя аналогичные (2.11), (2.12) два условия:

$$1) \Omega(K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}, G_{1j}, G_{2j}, G_{3j}) \Big|_0^H = 0, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}
2) \int_0^H \left(K_{1i} G_{1j}'' - a_{34} K_{2i} G_{1j}' + a_{44} K_{3i} G_{1j}'' + K_{2i} G_{2j}'' + a_{14} K_{1i} G_{2j}' - \right. \\
\left. - a_{33} K_{2i} G_{2j} + a_{48} K_{3i} G_{2j}' + K_{3i} G_{3j}'' + \right. \\
\left. + a_{15} K_{1i} G_{3j}'' + a_{17} K_{1i} G_{3j} + a_{36} K_{2i} G_{3j}' - a_{49} K_{3i} G_{3j} \right) dz = \\
= -\mu_j^2 \int_0^H \left(I_{11} K_{1i} G_{1j} + I_{31} K_{3i} G_{1j} + I_{22} K_{2i} G_{2j} + I_{33} K_{3i} G_{3j} + I_{13} K_{1i} G_{3j} \right) dz, \quad (2.22)
\end{aligned}$$

из (2.19), с учетом (2.21), (2.22), следует такое равенство:

$$(\mu_j^2 - \lambda_i^2) \int_0^H \left(I_{11} K_{1i} G_{1j} + I_{31} K_{3i} G_{1j} + I_{22} K_{2i} G_{2j} + I_{33} K_{3i} G_{3j} + I_{13} K_{1i} G_{3j} \right) dz = 0. \quad (2.23)$$

Соотношение (2.23) и представляет условие биортогональности (2.3), подтверждающее справедливость разложений (2.1), (2.2).

Операционное свойство (2.22) формулирует однородную систему дифференциальных уравнений для компонентов $K_1(\mu_j, z)$, $K_2(\mu_j, z)$, $K_3(\mu_j, z)$ второй ядровой вектор-функции

$\bar{K}_j$ биортогонального КИП (2.1), (2.2). Имеем:

$$\begin{aligned}
1) G_{1j}'' + a_{14} G_{2j}' + a_{15} G_{3j}'' + a_{17} G_{3j} + \mu_j^2 \left(I_{11} G_{1j} + I_{13} G_{3j} \right) &= 0; \\
2) G_{2j}'' - a_{33} G_{2j} - a_{34} G_{1j}' + a_{36} G_{3j}' + \mu_j^2 I_{22} G_{2j} &= 0; \\
2) G_{3j}'' - a_{44} G_{3j}' + a_{48} G_{1j}' - a_{49} G_{3j} + \mu_j^2 \left(I_{33} G_{3j} + I_{31} G_{1j} \right) &= 0.
\end{aligned} \quad (2.24)$$

Равенство (2.21) с учетом (2.20) и двух первых условий (2.17) принимает следующий вид:

$$\left[(a_{15} K_{1i}' + K_{3i}) G_{3j} - (K_{3i} + a_{15} K_{1i}) G_{3j}' + G_{1j} (K_{1i}' + a_{44} K_{3i}') + G_{2j} (K_{2i}' + a_{14} K_{1i}' - a_{48} K_{3i}') \right] \Big|_0^H = 0.$$

Очевидно, что при наличии третьего соотношения (2.17) оно обращается в тождество в случае таких граничных условий для компонентов вектор-функции $\bar{G}_j$:

при $z = 0, H$:

$$G_{1j} = 0; \quad G_{2j} = 0; \quad G_{3j}' = \pm \chi_3 G_{3j}. \quad (2.25)$$

При соответствиях $U \sim G_{1j}$, $W \sim G_{2j}$, $\Psi \sim G_{3j}$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sim -\mu_j^2$ краевая задача (1.1), (1.2) инвариантна (2.24), (2.25).

Таким образом, исходная начально-краевая задача (1.1)–(1.3) распалась на счетную систему задач Коши (2.13), (2.14) для трансформанты $\Phi(\lambda_i, t)$ и две однородные краевые задачи (2.16), (2.17) и (2.24), (2.25) для компонентов K_{1i} , K_{2i} , K_{3i} и G_{1j} , G_{2j} , G_{3j} ядер биортогонального КИП (2.1), (2.2).

Рассмотрим последовательно решение этих задач. Поскольку (из экспериментальных данных) известно [5], что силы вязкоупругого сопротивления (внутреннего трения) практически не оказывают влияние на формы колебаний конструкции, то их следует вводить в математическую модель после отделения пространственной переменной z . В соответствии с методом квазинормальных координат [5] вводим силы линейного вязкоупругого сопротивления в дифференциальное уравнение (2.13). Если обозначить через γ_i коэффициент потерь для каждой моды колебаний i , то силу внутреннего трения T_i , следуя скорректированной частотно-независимой гипотезе Фойхта, можно представить в виде [5]

$$T(\lambda_i, t) = \gamma_i \lambda_i \frac{d\varphi(\lambda_i, t)}{dt}. \quad (2.26)$$

Учитывая (2.26), дифференциальное уравнение (2.13) для трансформанты $\varphi(\lambda_i, t)$ записывается теперь следующим образом:

$$\frac{d^2 \varphi(\lambda_i, t)}{dt^2} + \gamma_i \lambda_i \frac{d\varphi(\lambda_i, t)}{dt} + \lambda_i^2 \varphi(\lambda_i, t) = -P(\lambda_i, t), \quad i \in \mathbb{C}. \quad (2.27)$$

Разыскивая его частное решение методом вариации произвольных постоянных и учитывая начальные условия (2.14), окончательно имеем:

$$\varphi(\lambda_i, t) = e^{-\beta_i t} \left[\varphi_0(\lambda_i) \left(\cos \alpha_i t + \frac{\beta_i}{\alpha_i} \sin \alpha_i t \right) + \frac{\Phi_0(\lambda_i)}{\alpha_i} \sin \alpha_i t + \frac{1}{\alpha_i} \int_0^t P(\lambda_i, \tau) e^{\beta_i \tau} \sin \alpha_i (t - \tau) d\tau \right], \quad (2.28)$$

где $\alpha_i = \left[\lambda_i^2 \left(1 - \frac{1}{4} \gamma_i^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$, $\beta_i = \frac{1}{2} \gamma_i \lambda_i$.

Принимая во внимание (1.5), размерные круговые частоты колебаний оболочки определяем по формуле

$$\omega_i = \frac{\lambda_i}{R} \sqrt{\frac{A_{11}}{m_1}}, \quad i \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим теперь подробно решения ядровых краевых задач (2.16), (2.17) и (2.24), (2.25).

Поскольку система дифференциальных уравнений (2.16) с постоянными коэффициентами, то вводя матрицу столбец $\bar{K}_i = \|K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}\|^T$ вектор-функции сопряженной задачи, представим (2.16) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d^2}{dz^2} + \lambda_i^2 I_{11} \right) & a_{34} & (a_{44} + \lambda_i^2 I_{31}) \\ -a_{14} \frac{d}{dz} & \left(\frac{d^2}{dz^2} + \lambda_i^2 I_{22} - a_{33} \right) & -a_{48} \frac{d}{dz} \\ \left(a_{15} \frac{d^2}{dz^2} + a_{17} + \lambda_i^2 I_{13} \right) & -a_{36} \frac{d}{dz} & \left(\frac{d^2}{dz^2} + \lambda_i^2 I_{33} - a_{49} \right) \end{pmatrix} \times \bar{K}_i = 0.$$

Отсюда следует такое разрешающее дифференциальное уравнение для $\bar{K}(\lambda_i, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \bar{K}(\lambda_i, z)}{dz^6} + b_{4i} \frac{d^4 \bar{K}(\lambda_i, z)}{dz^4} + b_{3i} \frac{d^3 \bar{K}(\lambda_i, z)}{dz^3} + b_{2i} \frac{d^2 \bar{K}(\lambda_i, z)}{dz^2} + \\ + b_{1i} \frac{d \bar{K}(\lambda_i, z)}{dz} + b_{0i} \bar{K}(\lambda_i, z) = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь $b_{0i} = \lambda_i^6 I_{22} (I_{11} I_{33} - I_{31} I_{13}) + \lambda_i^4 [I_{31} I_{13} a_{33} - I_{22} (I_{13} a_{44} + I_{31} a_{17}) - I_{11} (I_{22} a_{49} + I_{33} a_{33})] +$
 $+ \lambda_i^2 [a_{44} (I_{13} a_{33} - I_{22} a_{17}) + a_{33} (I_{31} a_{17} + I_{11} a_{49})] + a_{33} a_{44} a_{17};$
 $b_{1i} = a_{34} [\lambda_i^2 (I_{33} a_{14} - I_{13} a_{48}) - (a_{48} a_{17} + a_{49} a_{14})];$
 $b_{2i} = \lambda_i^4 [I_{11} I_{22} + I_{11} I_{33} + I_{22} I_{33} - I_{31} (I_{13} + a_{15} I_{22})] + \lambda_i^2 [I_{31} (a_{14} a_{36} + a_{15} a_{33} - a_{17}) -$
 $- I_{11} (a_{33} + a_{49} + a_{36} a_{48}) - I_{33} a_{33} - I_{22} (a_{49} + a_{44} a_{15}) - I_{13} a_{44}] +$
 $+ [a_{33} (a_{49} + a_{44} a_{15}) + a_{44} (a_{14} a_{36} - a_{17})];$

$$b_{3i} = a_{34} (a_{14} - a_{48} a_{15});$$

$$b_{4i} = \lambda_i^2 (I_{11} + I_{22} + I_{33} - I_{31} a_{15}) - (a_{33} + a_{49} + a_{44} a_{15} + a_{36} a_{48}). \quad (2.30)$$

Оставляя два первых уравнения системы, т.е.

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d^2}{dz^2} + \lambda_i^2 I_{11} \right) & a_{34} \frac{d}{dz} \\ -a_{14} \frac{d}{dz} & \left(\frac{d^2}{dz^2} + \lambda_i^2 I_{22} - a_{33} \right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K_{1i} \\ K_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a_{44} + \lambda_i^2 I_{31}) K_{3i} \\ a_{48} \frac{d}{dz} K_{3i} \end{pmatrix},$$

выражаем компоненты K_{1i} , K_{2i} через K_{3i} . Принимая затем (без ущерба общности):

$$K_{3i} = \begin{pmatrix} \left(\frac{d^2}{dz^2} + \lambda_i^2 I_{11} \right) & a_{34} \frac{d}{dz} \\ -a_{14} \frac{d}{dz} & \left(\frac{d^2}{dz^2} + \lambda_i^2 I_{22} - a_{33} \right) \end{pmatrix} \overline{K}(\lambda_i, z),$$

окончательно находим:

$$\begin{aligned} K_{1i} &= -(\lambda_i^2 I_{31} + a_{44} + a_{34} a_{48}) \overline{K}''(\lambda_i, z) - \\ &\quad - \left[\lambda_i^4 I_{22} I_{31} + \lambda_i^2 (a_{44} I_{22} - a_{33} I_{31}) + (a_{34} a_{48} - a_{33} a_{44}) \right] \overline{K}(\lambda_i, z); \\ K_{2i} &= a_{48} \overline{K}'''(\lambda_i, z) - \left[\lambda_i^2 (a_{14} I_{31} - a_{48} I_{11}) + a_{14} a_{44} \right] \overline{K}'(\lambda_i, z); \\ K_{3i} &= \overline{K}^{IV}(\lambda_i, z) + \left[\lambda_i^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{14} a_{34} - a_{33}) \right] \overline{K}''(\lambda_i, z) + \lambda_i^2 I_{11} (\lambda_i^2 I_{22} - a_{33}) \overline{K}(\lambda_i, z). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Решение разрешающего уравнения (2.29) записывается в экспоненциальной форме, т.е.

$$\overline{K}(\lambda_i, z) = \sum_{k=1}^6 C_{ki} e^{\rho_{ki} z}, \quad (2.32)$$

где ρ_{ki} ($k = 1, 2, \dots, 6$) — корни характеристического уравнения

$$\rho^6 + b_{4i} \rho^4 + b_{3i} \rho^3 + b_{2i} \rho^2 + b_{1i} \rho + b_{0i} = 0. \quad (2.33)$$

Имея в виду (2.32), компоненты K_{1i} , K_{2i} , K_{3i} ядра КИП (2.31) записываются в виде

$$\begin{aligned} K_{1i} &= - \sum_{k=1}^6 \left[(\lambda_i^2 I_{31} + a_{44} + a_{34} a_{48}) \rho_{ki}^2 + \lambda_i^4 I_{22} I_{31} + \lambda_i^2 (a_{44} I_{22} - a_{33} I_{31}) + (a_{34} a_{48} - a_{33} a_{44}) \right] C_{ki} e^{\rho_{ki} z}; \\ K_{2i} &= \sum_{k=1}^6 \left\{ a_{48} \rho_{ki}^3 - \left[\lambda_i^2 (a_{14} I_{31} - a_{48} I_{11}) + a_{14} a_{44} \right] \rho_{ki} \right\} C_{ki} e^{\rho_{ki} z}; \\ K_{3i} &= \sum_{k=1}^6 \left\{ \rho_{ki}^4 + \left[\lambda_i^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{14} a_{34} - a_{33}) \right] \rho_{ki}^2 + \lambda_i^2 I_{11} (\lambda_i^2 I_{22} - a_{33}) \right\} C_{ki} e^{\rho_{ki} z}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Собственные значения (параметры) λ_i ($i \in \mathfrak{C}$) однородной краевой задачи (2.16), (2.17) и произвольные постоянные C_{ki} ($k = 1, 2, \dots, 6$) определяются в результате подстановки выражений (2.34) в граничные условия (2.17). Имеем

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}^{(i)} C_{1i} + \delta_{12}^{(i)} C_{2i} + \delta_{13}^{(i)} C_{3i} + \delta_{14}^{(i)} C_{4i} + \delta_{15}^{(i)} C_{5i} + \delta_{16}^{(i)} C_{6i} &= 0, \\ \delta_{21}^{(i)} C_{1i} + \delta_{22}^{(i)} C_{2i} + \delta_{23}^{(i)} C_{3i} + \delta_{24}^{(i)} C_{4i} + \delta_{25}^{(i)} C_{5i} + \delta_{26}^{(i)} C_{6i} &= 0, \\ \delta_{31}^{(i)} C_{1i} + \delta_{32}^{(i)} C_{2i} + \delta_{33}^{(i)} C_{3i} + \delta_{34}^{(i)} C_{4i} + \delta_{35}^{(i)} C_{5i} + \delta_{36}^{(i)} C_{6i} &= 0, \\ \delta_{41}^{(i)} C_{1i} + \delta_{42}^{(i)} C_{2i} + \delta_{43}^{(i)} C_{3i} + \delta_{44}^{(i)} C_{4i} + \delta_{45}^{(i)} C_{5i} + \delta_{46}^{(i)} C_{6i} &= 0, \\ \delta_{51}^{(i)} C_{1i} + \delta_{52}^{(i)} C_{2i} + \delta_{53}^{(i)} C_{3i} + \delta_{54}^{(i)} C_{4i} + \delta_{55}^{(i)} C_{5i} + \delta_{56}^{(i)} C_{6i} &= 0, \\ \delta_{61}^{(i)} C_{1i} + \delta_{62}^{(i)} C_{2i} + \delta_{63}^{(i)} C_{3i} + \delta_{64}^{(i)} C_{4i} + \delta_{65}^{(i)} C_{5i} + \delta_{66}^{(i)} C_{6i} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta_{1k}^{(i)} &= a_{44} \rho_{ki}^4 + \left\{ a_{44} \left[\lambda_i^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{14} a_{34} - a_{33}) \right] + (\lambda_i^2 I_{31} + a_{44} + a_{34} a_{48}) \right\} \rho_{ki}^2 + \\ &\quad + \lambda_i^2 \left[a_{44} I_{11} (\lambda_i^2 I_{22} - a_{33}) + a_{44} I_{22} - a_{33} I_{31} \right] + a_{34} a_{48} - a_{33} a_{49}; \\ \delta_{2k}^{(i)} &= a_{48} \rho_{ki}^3 - \left[\lambda_i^2 (a_{14} I_{31} - a_{48} I_{11}) + a_{14} a_{44} \right] \rho_{ki}; \\ \delta_{3k}^{(i)} &= \rho_{ki}^5 - \lambda_{3i} \rho_{ki}^4 + \left[\lambda_i^2 (I_{11} + I_{22}) + a_{15} (\lambda_i^2 I_{31} + a_{44} + a_{34} a_{48}) + a_{14} a_{34} - a_{33} \right] \rho_{ki}^3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\chi_3 \left[a_{15}(\lambda_i^2 I_{31} + a_{44} + a_{34}a_{48}) - \lambda_i^2(I_{11} + I_{22}) - (a_{14}a_{34} - a_{33}) \right] \rho_{ki}^2 + \\
& + \left\{ \lambda_i^2 I_{11}(\lambda_i^2 I_{22} - a_{33}) + a_{15} \left[\lambda_i^4 I_{22} + \lambda_i^2(a_{44}I_{22} - a_{33}I_{31}) + a_{34}a_{48} - a_{33}a_{49} \right] \right\} \rho_{ki} - \\
& - \chi_3 \left\{ \lambda_i^2 I_{11}(\lambda_i^2 I_{22} - a_{33}) + a_{15} \left[\lambda_i^4 I_{22} I_{31} + \lambda_i^2(a_{44}I_{22} - a_{33}I_{31}) + a_{34}a_{48} - a_{33}a_{49} \right] \right\}; \quad (2.36)
\end{aligned}$$

$$\delta_{4k}^{(i)} = \delta_{1k}^{(i)} e^{\rho_{ki} H}; \quad \delta_{5k}^{(i)} = \delta_{2k}^{(i)} e^{\rho_{ki} H};$$

$$\begin{aligned}
\delta_{6k}^{(i)} = & \left\{ \rho_{ki}^5 + \chi_3 \rho_{ki}^4 + \left[\lambda_i^2(I_{11} + I_{22}) + a_{15}(\lambda_i^2 I_{31} + a_{44} + a_{34}a_{48}) + a_{14}a_{34} - a_{33} \right] \rho_{ki}^3 - \right. \\
& - \chi_3 \left[a_{15}(\lambda_i^2 I_{31} + a_{44} + a_{34}a_{48}) - \lambda_i^2(I_{11} + I_{22}) - (a_{14}a_{34} - a_{33}) \right] \rho_{ki}^2 + \\
& + \left\{ \lambda_i^2 I_{11}(\lambda_i^2 I_{22} - a_{33}) + a_{15} \left[\lambda_i^4 I_{22} + \lambda_i^2(a_{44}I_{22} - a_{33}I_{31}) + a_{34}a_{48} - a_{33}a_{49} \right] \right\} \rho_{ki} + \\
& \left. + \chi_3 \left\{ \lambda_i^2 I_{11}(\lambda_i^2 I_{22} - a_{33}) + a_{15} \left[\lambda_i^4 I_{22} I_{31} + \lambda_i^2(a_{44}I_{22} - a_{33}I_{31}) + a_{34}a_{48} - a_{33}a_{49} \right] \right\} \right\} e^{\rho_{ki} H}
\end{aligned}$$

Дальнейшее решение очевидно. Из условий нетривиальности решения однородной системы (2.35), приравниваем её главный детерминант нулю. В результате получаем такое трансцендентное уравнение для определения собственных значений λ_i ($i \in \mathbb{C}$):

$$D(\lambda_i) = \begin{vmatrix} \delta_{11}^{(i)} & \delta_{12}^{(i)} & \delta_{13}^{(i)} & \delta_{14}^{(i)} & \delta_{15}^{(i)} & \delta_{16}^{(i)} \\ \delta_{21}^{(i)} & \delta_{22}^{(i)} & \delta_{23}^{(i)} & \delta_{24}^{(i)} & \delta_{25}^{(i)} & \delta_{26}^{(i)} \\ \delta_{31}^{(i)} & \delta_{32}^{(i)} & \delta_{33}^{(i)} & \delta_{34}^{(i)} & \delta_{35}^{(i)} & \delta_{36}^{(i)} \\ \delta_{41}^{(i)} & \delta_{42}^{(i)} & \delta_{43}^{(i)} & \delta_{44}^{(i)} & \delta_{45}^{(i)} & \delta_{46}^{(i)} \\ \delta_{51}^{(i)} & \delta_{52}^{(i)} & \delta_{53}^{(i)} & \delta_{54}^{(i)} & \delta_{55}^{(i)} & \delta_{56}^{(i)} \\ \delta_{61}^{(i)} & \delta_{62}^{(i)} & \delta_{63}^{(i)} & \delta_{64}^{(i)} & \delta_{65}^{(i)} & \delta_{66}^{(i)} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.37)$$

Отбрасывая первое уравнение (2.35), из оставшейся системы выражаем постоянные C_{2i} , C_{3i} , C_{4i} , C_{5i} , C_{6i} через C_{1i} , т. е. $C_{2i} = C_{1i} \frac{A_{2i}}{A_{1i}}$, $C_{3i} = C_{1i} \frac{A_{3i}}{A_{1i}}$, $C_{4i} = C_{1i} \frac{A_{4i}}{A_{1i}}$, $C_{5i} = C_{1i} \frac{A_{5i}}{A_{1i}}$, $C_{6i} = C_{1i} \frac{A_{6i}}{A_{1i}}$, где

$$A_i = \begin{vmatrix} \delta_{22}^{(i)} & \delta_{23}^{(i)} & \delta_{24}^{(i)} & \delta_{25}^{(i)} & \delta_{26}^{(i)} \\ \delta_{32}^{(i)} & \delta_{33}^{(i)} & \delta_{34}^{(i)} & \delta_{35}^{(i)} & \delta_{36}^{(i)} \\ \delta_{42}^{(i)} & \delta_{43}^{(i)} & \delta_{44}^{(i)} & \delta_{45}^{(i)} & \delta_{46}^{(i)} \\ \delta_{52}^{(i)} & \delta_{53}^{(i)} & \delta_{54}^{(i)} & \delta_{55}^{(i)} & \delta_{56}^{(i)} \\ \delta_{62}^{(i)} & \delta_{63}^{(i)} & \delta_{64}^{(i)} & \delta_{65}^{(i)} & \delta_{66}^{(i)} \end{vmatrix}. \quad (2.38)$$

Определители A_{2i} , A_{3i} , A_{4i} , A_{5i} , A_{6i} следуют из A_{1i} путем замены в нем каждый раз соответственно первого, второго, третьего, четвертого и пятого столбцов на столбец $\begin{vmatrix} -\delta_{21}^{(i)} & -\delta_{31}^{(i)} & -\delta_{41}^{(i)} & -\delta_{51}^{(i)} & -\delta_{61}^{(i)} \end{vmatrix}^T$.

Не ограничивая общности рассуждений, принимаем

$$C_{1i} = A_{1i}, \quad (2.39)$$

откуда следует

$$C_{2i} = A_{2i}, \quad C_{3i} = A_{3i}, \quad C_{4i} = A_{4i}, \quad C_{5i} = A_{5i}, \quad C_{6i} = A_{6i}. \quad (2.40)$$

Соотношения (2.34), (2.36), (2.38)–(2.40) и уравнение (2.37) представляют решение сопряженной ядровой задачи (2.16), (2.17).

Поскольку решение однородной инвариантной ядровой задачи (2.24), (2.25) аналогично рассмотренной выше (2.16), (2.17), то ниже приводятся лишь окончательные результаты.

Компоненты G_{1j} , G_{2j} , G_{3j} вектор-функции $\bar{G}(\mu_j, z)$ ядра КИП (2.1), (2.2) и трансцендентное уравнение для определения соответственных значений μ_j ($j \in \mathbb{C}$) определяются из соотношений

$$\begin{aligned}
G_{1j} = & -\sum_{j=1}^6 \left\{ a_{15} r_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{13} + a_{15} I_{22}) + a_{17} - a_{15} a_{33} - a_{36} a_{14} \right] r_{kj}^2 + \right. \\
& \left. + \mu_j^4 I_{13} I_{22} + \mu_j^2 (a_{17} I_{22} - a_{33} I_{13}) - a_{17} a_{33} \right\} B_{kj} e^{r_{kj} z}; \\
G_{2j} = & -\sum_{j=1}^6 \left\{ (a_{36} + a_{34} a_{15}) r_{kj}^3 + \left[\mu_j^2 (a_{36} I_{11} + a_{34} I_{13}) + a_{17} a_{34} \right] r_{kj} \right\} B_{kj} e^{r_{kj} z}; \\
G_{3j} = & \sum_{j=1}^6 \left\{ r_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{34} a_{17} - a_{33}) \right] r_{kj} + \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{33}) \right\} B_{kj} e^{r_{kj} z};
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$D(\mu_j) = \begin{vmatrix} \Delta_{11}^{(j)} & \Delta_{12}^{(j)} & \Delta_{13}^{(j)} & \Delta_{14}^{(j)} & \Delta_{15}^{(j)} & \Delta_{16}^{(j)} \\ \Delta_{21}^{(j)} & \Delta_{22}^{(j)} & \Delta_{23}^{(j)} & \Delta_{24}^{(j)} & \Delta_{25}^{(j)} & \Delta_{26}^{(j)} \\ \Delta_{31}^{(j)} & \Delta_{32}^{(j)} & \Delta_{33}^{(j)} & \Delta_{34}^{(j)} & \Delta_{35}^{(j)} & \Delta_{36}^{(j)} \\ \Delta_{41}^{(j)} & \Delta_{42}^{(j)} & \Delta_{43}^{(j)} & \Delta_{44}^{(j)} & \Delta_{45}^{(j)} & \Delta_{46}^{(j)} \\ \Delta_{51}^{(j)} & \Delta_{52}^{(j)} & \Delta_{53}^{(j)} & \Delta_{54}^{(j)} & \Delta_{55}^{(j)} & \Delta_{56}^{(j)} \\ \Delta_{61}^{(j)} & \Delta_{62}^{(j)} & \Delta_{63}^{(j)} & \Delta_{64}^{(j)} & \Delta_{65}^{(j)} & \Delta_{66}^{(j)} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.42}$$

Здесь ρ_{kj} ($k = 1, 2, \dots, 6$) — корни характеристического уравнения

$$r^6 + e_{4j} r^4 + e_{2j} r^2 + e_{0j} = 0; \tag{2.43}$$

B_{kj} ($k = 1, 2, \dots, 6$) — детерминанты вида

$$B_{1j} = \begin{vmatrix} \Delta_{22}^{(j)} & \Delta_{23}^{(j)} & \Delta_{24}^{(j)} & \Delta_{25}^{(j)} & \Delta_{26}^{(j)} \\ \Delta_{32}^{(j)} & \Delta_{33}^{(j)} & \Delta_{34}^{(j)} & \Delta_{35}^{(j)} & \Delta_{36}^{(j)} \\ \Delta_{42}^{(j)} & \Delta_{43}^{(j)} & \Delta_{44}^{(j)} & \Delta_{45}^{(j)} & \Delta_{46}^{(j)} \\ \Delta_{52}^{(j)} & \Delta_{53}^{(j)} & \Delta_{54}^{(j)} & \Delta_{55}^{(j)} & \Delta_{56}^{(j)} \\ \Delta_{62}^{(j)} & \Delta_{63}^{(j)} & \Delta_{64}^{(j)} & \Delta_{65}^{(j)} & \Delta_{66}^{(j)} \end{vmatrix}, \tag{2.44}$$

причем $B_{2j}, B_{3j}, B_{4j}, B_{5j}, B_{6j}$ получаются из B_{1j} (2.44) путем замены каждый раз соответственно первого, второго, третьего, четвертого и пятого столбцов на столбец

$\| -\Delta_{21}^{(j)} - \Delta_{31}^{(j)} - \Delta_{41}^{(j)} - \Delta_{51}^{(j)} - \Delta_{61}^{(j)} \|^T$. Здесь

$$\begin{aligned}
\Delta_{1k}^{(j)} = & a_{15} r_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{13} + a_{15} I_{22}) + a_{17} - a_{15} a_{33} - a_{36} a_{14} \right] r_{kj}^2 + \\
& + \mu_j^4 I_{13} I_{22} + \mu_j^2 (a_{17} I_{22} - a_{33} I_{13}) - a_{17} a_{33}; \\
\Delta_{2k}^{(j)} = & (a_{36} + a_{34} a_{15}) r_{kj}^3 + \left[\mu_j^2 (a_{36} I_{11} + a_{34} I_{13}) + a_{17} a_{34} \right] r_{kj}; \\
\Delta_{3k}^{(j)} = & r_{kj}^5 - \chi_3 r_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{34} a_{17} - a_{33}) \right] r_{kj}^3 - \chi_3 \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + a_{34} a_{14} - a_{33} \right] r_{kj}^2 + \\
& + \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{33}) r_{kj} - \chi_3 \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{33}); \\
\Delta_{4k}^{(j)} = & \Delta_{1k}^{(j)} e^{r_{kj} H}, \Delta_{5k}^{(j)} = \Delta_{2k}^{(j)} e^{r_{kj} H}; \\
\Delta_{6k}^{(j)} = & \left\{ r_{kj}^5 + \chi_3 r_{kj}^4 + \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{34} a_{14} - a_{33}) \right] r_{kj}^3 + \chi_3 \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + a_{34} a_{14} - a_{33} \right] r_{kj}^2 + \right. \\
& \left. + \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{33}) r_{kj} + \chi_3 \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{33}) \right\} e^{r_{kj} H}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
e_{0j} = & (1 - a_{44} a_{15})^{-1} \left\{ \mu_j^6 [I_{22} (I_{11} I_{33} - I_{13} I_{31})] + \mu_j^4 [I_{11} (a_{33} I_{33} - a_{49} I_{22}) + (a_{33} I_{31} - a_{17} I_{22})] + \right. \\
& \left. + \mu_j^2 a_{33} (a_{49} I_{11} + a_{17} I_{31}) \right\}; \\
e_{2j} = & (1 - a_{44} a_{15})^{-1} \left\{ \mu_j^4 [I_{11} (I_{22} + I_{33}) + I_{22} (I_{33} - a_{15} I_{31}) - I_{13} (I_{31} - a_{44} I_{22})] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu_j^2 [I_{11}(a_{33} + a_{49} - a_{48}a_{36})] + I_{22}(a_{49} + a_{44}a_{17}) + I_{33}(a_{33} - a_{34}a_{14}) + \\
& + I_{13}(a_{34}a_{45} - a_{33}a_{44}) + I_{31}(a_{17} - a_{14}a_{36} - a_{33}a_{15})] + \\
& + a_{49}(a_{33} - a_{34}a_{14}) + I_{17}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{48}); \\
e_{4j} = & (1 - a_{44}a_{15})^{-1} \{ \mu_j^2 [I_{11} + I_{33} + (1 - a_{44}a_{15})I_{22} - a_{15}I_{31} - a_{44}I_{13}] + a_{14}(a_{34} + a_{36}a_{44}) + \\
& + a_{15}(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{48}) - a_{33} - a_{49} - a_{44}a_{17} - a_{48}a_{36} \}; \quad (2.46)
\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. Порядок вычисления параметров $\lambda_i(\mu_j)$. Выделение $\lambda_i(\mu_j)$ производится итерационным путем. Задаваясь $\lambda_i(\mu_j)$, по формулам (2.30) (соответственно (2.46)), вычисляются значения $b_{0i}, b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}, b_{4i}$ и c_{0j}, c_{2j}, c_{4j} . Решая затем алгебраические уравнения (2.33) (соответственно (2.43)), определяются корни ρ_{ki}, r_{kj} ($k=1, 2, \dots, 6$), а по формулам (2.36), (2.45) — коэффициенты $\delta_{1k}^{(i)}, \delta_{2k}^{(i)}, \dots, \delta_{6k}^{(i)}$ и $\Delta_{1k}^{(j)}, \Delta_{2k}^{(j)}, \dots, \Delta_{6k}^{(j)}$. Подставляя найденные значения $\delta_{1k}^{(i)}, \dots, \delta_{6k}^{(i)}$ и соответственно $\Delta_{1k}^{(j)}, \dots, \Delta_{6k}^{(j)}$ в (2.37) и (2.45) проверяем, удовлетворяются ли эти уравнения. В случае их неудовлетворения принимаем $\lambda_i^0 = \lambda_i + \Delta\lambda_i$, $\mu_i^0 = \mu_i + \Delta\mu_i$ и повторяем описанную выше процедуру.

Применяя к выражению (2.28) формулы обращения биортогонального КИП (2.2), окончательно получаем следующие спектральные разложения для разрешающих функций перемещений трехслойной цилиндрической оболочки:

$$\begin{aligned}
U(z, t) = & \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ e^{-\beta_i t} \left[\Phi_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \frac{\Phi_0(\lambda_i) + \beta_i \Phi_0(\lambda_i)}{\alpha_i} \sin \lambda_i t \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\alpha_i} e^{-\beta_i t} \int_0^t P(\lambda_i, \tau) e^{\beta_i \tau} \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau \right\} G_1(\mu_i, z) (\bar{K}_i, \bar{G}_j)_{i=j}^{-1}; \\
W(z, t) = & \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ e^{-\beta_i t} \left[\Phi_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \frac{\Phi_0(\lambda_i) + \beta_i \Phi_0(\lambda_i)}{\alpha_i} \sin \lambda_i t \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\alpha_i} e^{-\beta_i t} \int_0^t P(\lambda_i, \tau) e^{\beta_i \tau} \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau \right\} G_2(\mu_i, z) (\bar{K}_i, \bar{G}_j)_{i=j}^{-1}; \\
\Psi(z, t) = & \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ e^{-\beta_i t} \left[\Phi_0(\lambda_i) \cos \lambda_i t + \frac{\Phi_0(\lambda_i) + \beta_i \Phi_0(\lambda_i)}{\alpha_i} \sin \lambda_i t \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\alpha_i} e^{-\beta_i t} \int_0^t P(\lambda_i, \tau) e^{\beta_i \tau} \sin \lambda_i(t - \tau) d\tau \right\} G_3(\mu_i, z) (\bar{K}_i, \bar{G}_j)_{i=j}^{-1}. \quad (2.47)
\end{aligned}$$

Здесь квадратуры $\Phi_0(\lambda_i)$, $\Phi_0(\lambda_i)$, $P(\lambda_i, t)$ определяются соотношениями (2.15), компоненты двух ядровых функций биортогонального КИП K_{1i}, K_{2i}, K_{3i} , G_{1j}, G_{2j}, G_{3j} — по формулам (2.31), (2.41). Параметры λ_i , μ_i являются корнями трансцендентных уравнений (2.37), (2.42).

Скалярное произведение в разложениях (2.47) вычисляется на основании (2.4) и равенств (2.31), (2.41). Имеем

$$\begin{aligned}
(\bar{K}_i, \bar{G}_j)_{i=j} = & \sum_{k=1}^6 \left\{ I_{11} \left\{ (\lambda_i^2 I_{31} + a_{44} + a_{34}a_{48}) \rho_{ki}^2 + \lambda_i^4 I_{22} I_{33} + \lambda_i^2 (a_{44} I_{22} - a_{33} I_{31}) + a_{34}a_{48} - a_{33}a_{49} \right\} \times \right. \\
& \times \left[\mu_i^2 (I_{13} + a_{15} I_{22}) + a_{17} - a_{15}a_{33} - a_{36}a_{14} \right] r_{ki}^2 + a_{15}r_{ki} + \mu_i^4 I_{13} I_{22} + \mu_i^2 (a_{17} I_{22} - a_{33} I_{13}) - a_{17}a_{33} \Big\} - \\
& - I_{22} \left\{ a_{48} \rho_{ki}^3 - \lambda_i^2 (a_{14} I_{31} - a_{48} I_{11}) + a_{14}a_{44} \right\} (a_{36} + a_{34}a_{15}) r_{ki}^3 + \left[\mu_i^2 (a_{36} I_{11} + a_{34} I_{13}) + a_{17}a_{34} \right] r_{ki}^2 + \\
& - I_{33} \left\{ \rho_{ki}^4 + [\lambda_i^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{14}a_{34} - a_{33})] \rho_{ki}^2 + \lambda_i^2 I_{11} (\lambda_i^2 I_{22} - a_{33}) \right\} r_{ki}^4 + \left[\mu_i^2 (I_{11} + I_{22}) + a_{34}a_{14} - a_{33} \right] r_{ki}^2 + \\
& + \mu_i^2 I_{11} (\mu_i^2 I_{11} + a_{33}) \Big\} - I_{13} \left\{ (\lambda_i^2 I_{31} + a_{44} + a_{34}a_{48}) \rho_{ki}^2 + \lambda_i^4 I_{22} I_{33} + \lambda_i^2 (a_{44} I_{22} - a_{33} I_{31}) + a_{34}a_{48} - a_{33}a_{49} \right\} \times \\
& \times \left[r_{ki}^4 + \left[\mu_i^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{14}a_{34} - a_{33}) \right] r_{ki}^2 + \mu_i^2 I_{11} (\mu_i^2 I_{22} + a_{33}) \right] \Big\} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -I_{31} \left\{ \rho_{ki}^4 + \left[\lambda_i^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{14}a_{34} - a_{33}) \right] \rho_{ki}^2 + \lambda_i^2 I_{11} (\lambda_i^2 I_{22} - a_{33}) \right\} \times \\
& \times \left\{ a_{15} r_{ki}^4 + \left[\mu_i^2 (I_{13} + a_{15} I_{22}) + a_{17} - a_{15} a_{33} - a_{36} a_{14} \right] r_{ki}^2 + \mu_i^4 I_{13} I_{22} + \mu_i^2 (a_{17} I_{22} - a_{33} I_{13}) - a_{17} a_{33} \right\} \times \\
& \times A_{ki} B_{ki} (\rho_{ki} + r_{ki})^{-1} \left[e^{(\rho_{ki} + r_{ki})H} - 1 \right]. \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Выражения (2.47), (2.48) представляют общее решение нестационарной задачи для упруго защемленной круговой трехслойной цилиндрической оболочки, нагруженной произвольной осесимметричной динамической нагрузкой с учетом сил вязкоупругого сопротивления. Действительно, путем дифференцирования равенств (2.47), в соответствии с формулами (1.8)–(1.10), могут быть получены аналогичные разложения для внутренних усилий, возникающих в среднем, внешнем и внутреннем слоях оболочки.

Построенное решение существует, так как (2.47), (2.48) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.1) и краевым условиям (1.2), (1.3).

3. О собственных значениях ядровых краевых задач. В настоящем пункте сформулируем условия, при которых собственные значения λ_i , μ_i и собственные функции сопряженной (2.16), (2.17) и инвариантной (2.24), (2.25) краевых задач для ядра биортогонального КИП (2.1), (2.2) будут вещественными.

ТЕОРЕМА. Если $I_{13} = I_{31} = 0$, то собственные значения λ_i , μ_i и собственные функции K_{1i} , K_{2i} , K_{3i} , G_{1i} , G_{2i} , G_{3i} однородных краевых задач (2.16), (2.17) и (2.24), (2.25) являются вещественными.

Указанные выше условия теоремы соответствуют случаю, когда инерцией поворота в первом уравнении системы (1.1) и инерцией продольных сил в третьем можно пренебречь.

Доказательство. Доказательство проводим от противного. Предположим, что μ_i , λ_i — комплексные числа и G_{1i} , G_{2i} , G_{3i} , K_{1i} , K_{2i} , K_{3i} — комплексные функции. Это значит, что для инвариантной (2.24), (2.25) и сопряженной (2.16), (2.17) краевых задач их можно представить в виде:

$$\mu_i = b_i + c_i \sqrt{-1}, \quad \lambda_i = b_i - c_i \sqrt{-1}; \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
G_{1i} &= U_{1i} + V_{1i} \sqrt{-1}, \quad G_{2i} = U_{2i} + V_{2i} \sqrt{-1}, \quad G_{3i} = U_{3i} + V_{3i} \sqrt{-1}; \\
K_{1i} &= U_{1i} - V_{1i} \sqrt{-1}, \quad K_{2i} = U_{2i} - V_{2i} \sqrt{-1}, \quad K_{3i} = U_{3i} - V_{3i} \sqrt{-1},
\end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\text{Im} U_{1i} = \text{Im} U_{2i} = \text{Im} U_{3i} = \text{Im} V_{1i} = \text{Im} V_{2i} = \text{Im} V_{3i} = 0$.

Воспользуемся условием биортогональности (2.23). После подстановки выражений (3.2) в соотношение (2.23) получаем

$$\begin{aligned}
& \int_0^H \left\{ I_{11} (U_1 + V_1 \sqrt{-1})(U_1 - V_1 \sqrt{-1}) + I_{22} (U_2 + V_2 \sqrt{-1})(U_2 - V_2 \sqrt{-1}) + I_{33} (U_3 + V_3 \sqrt{-1})(U_3 - V_3 \sqrt{-1}) + \right. \\
& \quad \left. + I_{31} (U_1 + V_1 \sqrt{-1})(U_3 - V_3 \sqrt{-1}) + I_{13} (U_3 + V_3 \sqrt{-1})(U_1 - V_1 \sqrt{-1}) \right\} dz = \\
& = \int_0^H \left\{ I_{11} (U_1^2 + V_1^2) + I_{22} (U_2^2 + V_2^2) + I_{33} (U_3^2 + V_3^2) + (I_{13} + I_{31})(U_1 U_3 + V_1 V_3) + \right. \\
& \quad \left. + [(I_{31} - I_{13})U_3 V_1 + (I_{13} - I_{31})U_1 V_3] \sqrt{-1} \right\} dz = 0. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $I_{13} = I_{31} = 0$, из (3.3) следует

$$\int_0^H \left[I_{11} (U_1^2 + V_1^2) + I_{22} (U_2^2 + V_2^2) + I_{33} (U_3^2 + V_3^2) \right] dz = 0. \quad (3.4)$$

Поскольку $I_{11} > 0$, $I_{22} > 0$, $I_{33} > 0$ и $(U_1^2 + V_1^2) > 0$, $(U_2^2 + V_2^2) > 0$, $(U_3^2 + V_3^2) > 0$, то выполнение условия биортогональности (3.4) возможно лишь в случае, когда

$$U_1 = U_2 = U_3 = V_1 = V_2 = V_3 = 0. \quad (3.5)$$

Из равенств (3.2) теперь следует, что

$$G_{1i} = G_{2i} = G_{3i} = K_{1i} = K_{2i} = K_{3i} = 0. \quad (3.6)$$

Таким образом, принятые комплексные величины (3.1), (3.2) соответствуют тривиальным (нулевым) решениям однородных краевых задач (2.24), (2.25) и (2.16), (2.17), т. е. G_{1i} , G_{2i} ,

$G_{3i}, K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}$ не являются собственными функциями. Полученное противоречие и указывает на ошибочность представлений (3.1), (3.2), т. е. доказывает утверждение, сформулированное в теореме.

4. Частные случаи построенного решения. Рассмотрим сначала частные случаи закрепления торцов оболочки.

I. Шарнирное опирание по торцам $z = 0, H$. В этом случае необходимо принять коэффициент жесткости

$$\chi_3 = 0. \quad (4.1)$$

С учетом (4.1) равенства (2.36), (2.45) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta_{3k}^{(i)} &= \rho_{ki}^5 + \left[\lambda_i^2 (I_{11} + I_{22}) + a_{15} (\lambda_i^2 I_{31} + a_{44} + a_{34} a_{48}) + a_{14} a_{34} - a_{33} \right] \rho_{ki}^3 + \\ &+ \left[\lambda_i^2 I_{11} (\lambda_i^2 I_{22} - a_{33}) + a_{15} \left[\lambda_i^4 I_{22} + \lambda_i^2 (a_{44} I_{22} - a_{33} I_{31}) + a_{34} a_{48} - a_{33} a_{49} \right] \right] \rho_{ki}; \\ \delta_{6k}^{(i)} &= \delta_{3k}^{(i)} e^{\rho_{ki} H}; \\ \Delta_{3k}^{(j)} &= r_{kj}^5 + \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + (a_{34} a_{17} - a_{33}) \right] r_{kj}^3 + \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{33}) r_{kj}; \\ \Delta_{6k}^{(j)} &= \Delta_{3k}^{(j)} e^{r_{kj} H}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\delta_{1k}^{(i)}, \delta_{2k}^{(i)}, \delta_{4k}^{(i)}, \delta_{5k}^{(i)}$ и $\Delta_{1k}^{(j)}, \Delta_{2k}^{(j)}, \Delta_{4k}^{(j)}, \Delta_{5k}^{(j)}$ вычисляются (как и в общем случае) по формулам (2.36) и (2.45)

II. Жесткое защемление торцов оболочки $z = 0, H$. При жестком защемлении коэффициент жесткости

$$\chi_3 \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Поделив правые части соответствующих равенств (2.36), (2.45) на χ_3 и осуществив предельный переход по (4.3), в результате получим

$$\begin{aligned} \delta_{3k}^{(i)} &= -\rho_{ki}^4 + \left[a_{15} (\lambda_i^2 I_{31} + a_{44} + a_{34} a_{48}) - \lambda_i^2 (I_{11} + I_{22}) - (a_{14} a_{34} - a_{33}) \right] \rho_{ki}^2 + \\ &- \left[\lambda_i^2 I_{11} (\lambda_i^2 I_{22} - a_{33}) + a_{15} \left[\lambda_i^4 I_{22} I_{31} + \lambda_i^2 (a_{44} I_{22} - a_{33} I_{31}) + a_{34} a_{48} - a_{33} a_{49} \right] \right]; \\ \delta_{6k}^{(i)} &= \delta_{3k}^{(i)} e^{\rho_{ki} H}; \\ \Delta_{3k}^{(j)} &= -r_{kj}^4 - \left[\mu_j^2 (I_{11} + I_{22}) + a_{34} a_{14} - a_{33} \right] r_{kj}^2 - \mu_j^2 I_{11} (\mu_j^2 I_{22} + a_{33}); \\ \Delta_{6k}^{(j)} &= \Delta_{3k}^{(j)} e^{r_{kj} H}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Как и выше $\delta_{1k}^{(i)}, \delta_{2k}^{(i)}, \delta_{4k}^{(i)}, \delta_{5k}^{(i)}$ и $\Delta_{1k}^{(j)}, \Delta_{2k}^{(j)}, \Delta_{4k}^{(j)}, \Delta_{5k}^{(j)}$ вычисляются по равенствам (2.36), (2.45).

Общее решение (2.47), (2.48) рассматриваемой задачи было построено для произвольных осесимметричных динамических воздействий $q_z(z, t)$, $q_R(z, t)$, $m_z(z, t)$. Для каждого конкретного случая нагружения оболочки эти функции должны быть заданы. Ниже приводятся некоторые частные случаи динамических воздействий.

В разложения (2.47), (2.48) функции q_z, q_R, m_z попадают через трансформанту $\Phi(\lambda_i, t)$ (2.28). При этом для каждого нагружения необходимо вычислить интеграл нагрузки (2.28), (2.15), т. е. интеграл Дюамеля:

$$\begin{aligned} \int_0^t P(\lambda_i, \tau) e^{\beta_i \tau} \sin \alpha_i (t - \tau) d\tau &= \int_0^t \int_0^H [q_z(z, t) K_1(\lambda_i, z) + a_{11} q_R(z, t) K_2(\lambda_i, z) + \\ &+ m_z(z, t) K_3(\lambda_i, z)] e^{\beta_i \tau} \sin \alpha_i (t - \tau) d\tau dz. \end{aligned} \quad (4.5)$$

1) Действие на цилиндрическую оболочку в момент времени $t^* = 0$ равномерно распределенного по ее поверхности скачка давления (внезапно приложенной нагрузки) интенсивностью $q^* = \text{const}$, $p^* = \text{const}$:

$$q_R^*(t^*) = q^* \eta(t^*); \quad q_z^*(t^*) = p^* \eta(t^*); \quad m_z^* = 0, \quad (4.6)$$

где $\eta(t^*)$ — единичная функция Хэвисайда.

$$\eta(t^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } t^* < 0; \\ 1, & \text{если } t^* \geq 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Обезразмеренные величины нагрузки (4.6) в соответствии с (1.5) имеют вид

$$q_R(t) = q\eta(t); \quad q_z(t) = p\eta(t); \quad m_z = 0. \quad (4.8)$$

Здесь

$$q = q^* RA_{11}^{-1}, p = p^* RA_{11}^{-1}. \quad (4.9)$$

В результате подстановки равенств (4.8) в (4.5), получаем

$$\int_0^t P(\lambda_i, \tau) e^{\beta_i \tau} \sin \alpha_i(t - \tau) d\tau = \int_0^t e^{\beta_i \tau} \sin \alpha_i(t - \tau) d\tau \int_0^H \left\{ \sum_{k=1}^6 (pF_{1k}^{(i)} + a_{11}qF_{2k}^{(i)}) C_{ki} e^{\rho_{ki} z} \right\} dz, \quad (4.10)$$

где

$$F_{1k}^{(i)} = -\left[(\lambda_i^2 I_{31} + a_{44} + a_{34}a_{48}) \rho_{ki}^2 + \lambda_i^4 I_{22} I_{31} + \lambda_i^2 (a_{44} I_{22} - a_{33} I_{31}) + a_{34}a_{48} - a_{33}a_{49} \right], \\ F_{2k}^{(i)} = a_{48} \rho_{ki}^3 - \left[(\lambda_i^2 (a_{14} I_{31} - a_{48} I_{11}) + a_{14}a_{44}) \right] \rho_{ki}. \quad (4.11)$$

Вычисляя (4.10), с использованием интегрирования по частям, окончательно имеем:

$$\int_0^t P(\lambda_i, \tau) e^{\beta_i \tau} \sin \alpha_i(t - \tau) d\tau = \sum_{k=1}^6 C_{ki} \left[\rho_{ki} (\alpha_i^2 + \beta_i^2) \right]^{-1} \left(pF_{1k}^{(i)} + a_{11}qF_{2k}^{(i)} \right) (e^{\rho_{ki} H} - 1) \times \\ \times \left[\alpha_i (e^{\beta_i t} - \cos \alpha_i t) - \beta_i \sin \alpha_i t \right]. \quad (4.12)$$

Таким образом, в случае скачка давления (4.8) представления (2.47), (2.48) остаются справедливыми, когда выражение трансформанты (2.28) при нулевых начальных условиях $\Phi_0(\lambda_i) = \Phi_0(\lambda_i) = 0$ (см. (2.15)) определяются соотношением (4.12);

2) Действие на оболочку в момент времени $t^* = 0$ равномерно распределенного на части ее поверхности $z^* = [h^*, H^*]$ скачка давления интенсивностью $q^* = \text{const}$, $p^* = \text{const}$.

Принимая во внимание свойство единичной функции, заданное воздействие можно представить в виде

$$q_z^*(t^*, z^*) = p^* \eta(t^*) \eta(z^* - h^*); \\ q_R^*(t^*, z^*) = q^* \eta(t^*) \eta(z^* - h^*); \quad m_z^* = 0. \quad (4.13)$$

В безразмерной форме воздействие (4.13) можно представить так:

$$q_z(t, z) = p\eta(t)\eta(z - \xi); \quad q_R(t, z) = q\eta(t)\eta(z - \xi); \quad m_z = 0, \quad (4.14)$$

причем $z = \frac{z^*}{R}$, $\xi = \frac{h}{R}$, p и q определяются равенствами (4.9), а t — по (1.5).

Подставляя выражения (4.14) в (4.5), окончательно получаем

$$\int_0^t P(\lambda_i, \tau) e^{\beta_i \tau} \sin \alpha_i(t - \tau) d\tau = \sum_{k=1}^6 C_{ki} \left[\rho_{ki} (\alpha_i^2 + \beta_i^2) \right]^{-1} \left(pF_{1k}^{(i)} + a_{11}qF_{2k}^{(i)} \right) (e^{\rho_{ki} H} - e^{\rho_{ki} \xi}) \times \\ \times \left[\alpha_i (e^{\beta_i t} - \cos \alpha_i t) - \beta_i \sin \alpha_i t \right]. \quad (4.15)$$

Трансформанта $\Phi(\lambda_i, t)$ (2.28) в разложениях (2.47), (2.48) для приведенного воздействия при нулевых начальных условиях определяется равенством (4.15).

3) Действие в момент времени $t^* = 0$ по поверхности оболочки импульса единичной интенсивности:

$$q_z^*(t^*) = A_{11} R^{-1} \delta(t^*); \quad q_R^*(t^*) = A_{11} R^{-1} \delta(t^*), \quad m_z^* = 0, \quad (4.16)$$

где $\delta(t^*)$ — дельта-функция Дирака.

Имея в виду (1.5), импульсное воздействие (4.16) в безразмерной форме можно представить так:

$$q_z(t) = 1 \cdot \delta(t); \quad q_R(t) = 1 \cdot \delta(t), \quad m_z = 0. \quad (4.17)$$

Вычисляя (4.5) с учетом представлений (4.17) и фильтрующего свойства дельта-функции, находим

$$\int_0^t P(\lambda_i, \tau) e^{\beta_i \tau} \sin \alpha_i(t - \tau) d\tau = \sum_{k=1}^6 (F_{1k}^{(i)} + a_{11}F_{2k}^{(i)}) C_{ki} \rho_{ki}^{-1} (e^{\rho_{ki} H} - 1) \sin \alpha_i t. \quad (4.18)$$

Таким образом, при нулевых начальных условиях трансформанта $\Phi(\lambda_i, t)$ в разложениях (2.47), (2.48) определяется выражением (4.1+8). Следует отметить, что часть формулы (4.18) зависящая от « t » представляет функцию Грина для различных осесимметричных динамических нагрузок, задаваемых как функции времени.

4) Действие стационарной равномерно распределенной по поверхности оболочки вибрационной нагрузки с частотой изменения полных циклов θ :

$$q_z^*(z^*, t^*) = p^* \cos \theta t; \quad q_R^*(z^*, t^*) = q^* \cos \theta t; \quad m_z^* = 0. \quad (4.19)$$

Здесь $q^* = \text{const}$, $p^* = \text{const}$.

Воздействие (4.19) в безразмерной форме описывается соответственно:

$$q_z(z, t) = p \cos \theta t; \quad q_R(z, t) = q \cos \theta t; \quad m_z = 0, \quad (4.20)$$

где p и q определяются равенствами (4.9).

В результате подстановки выражений (4.20) в (4.5), после выполнения интегрирования, окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^t P(\lambda_i, \tau) e^{\beta_i \tau} \sin \alpha_i(t - \tau) d\tau = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 C_{ki} \rho_{ki}^{-1} \left(p F_{1k}^{(i)} + a_{11} q F_{2k}^{(i)} \right) (e^{\rho_{ki} H} - 1) \times \\ & \times \left\{ \beta_i \left[\beta_i^2 + (\theta - \alpha_i)^2 \right]^{-1} \times \left[e^{\beta_i t} \left(\sin \theta t - \frac{\theta - \alpha_i}{\beta_i} \cos \theta t \right) + \frac{\theta - \alpha_i}{\beta_i} \cos \alpha_i t - \sin \alpha_i t \right] + \right. \\ & \left. + \beta_i \left[\beta_i^2 - (\theta + \alpha_i)^2 \right]^{-1} \times \left[e^{\beta_i t} \left(\frac{\theta + \alpha_i}{\beta_i} \cos \theta t - \sin \theta t \right) + \frac{\theta + \alpha_i}{\beta_i} \cos \alpha_i t - \sin \alpha_i t \right] \right\}. \quad (4.21) \end{aligned}$$

Следовательно, трансформанта $\phi(\lambda_i, t)$ в разложениях (2.47), (2.48) при действии стационарной вибрационной нагрузки определяется равенством (4.21).

В заключение необходимо отметить, что в работе оригинальным методом приведено новое аналитическое решение осесимметричной задачи динамики для трехслойной круговой цилиндрической оболочки конечной сдвиговой жесткости при наличии сил вязкоупругого сопротивления. Существенным представляется то, что результаты получены для произвольной динамической нагрузки и весьма общих (упругих относительно углов поворота) условий закрепления торцов. Рассмотрены частные случаи, соответствующие идеальным условиям опирания оболочки и различным стационарным и нестационарным воздействиям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сеницкий Ю. Э. Нестационарная задача динамики для трехслойной непологой сферической оболочки. // Строительная механика и расчет сооружений, 1990. — № 6. — С. 207–216.
2. Сеницкий Ю. Э. Лычев С. А. Динамика трехслойных сферических оболочек несимметричной структуры. // Тр. XVIII междунар. конф. по теории оболочек и пластин. — Саратов, 1997. — С. 47–53.
3. Gederbaum G. T. Heller. R. A. Dynamic deformation of orthotropic cylinders // Trans. ASME. J. Pressure vessel Technol, 1989. — Vol 111, No. 2. — P. 97–101.
4. Сеницкий Ю. Э. Козьма И. Е. Дифференциальные уравнения колебаний трехслойных ортотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. // Тр. XXI междунар. конф. по теории оболочек и пластин. — Саратов, 2005. — С. 207–216.
5. Цейтлин А. И. Кусашов А. А. Методы учета внутреннего трения в динамических расчетах конструкций. — Алма-Ата: Наука, 1987. — 238 с.
6. Сеницкий Ю. Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. — Саратов: Изд-во СГУ, 1985. — 176 с.
7. Колесников С. В. Уточненная теория колебаний многослойной ортотропной пластины // ПИМ, 1993. — Т. 57, № 5. С. 160–165.
8. Сеницкий Ю. Э. Обобщенные биортогональные конечные интегральные преобразования и их приложение к нестационарным задачам механики // Докл. РАН, 1995. — Т. 341, № 4. — С. 474–477.
9. Сеницкий Ю. Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // Изв. вузов. Математика, 1996. — № 8. — С. 71–78.
10. Сеницкий Ю. Э. Метод конечных интегральных преобразований. Его перспективы в исследовании краевых задач механики (обзор) // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер: Математическая, 2003. — № 22. — С. 10–39.
11. Сеницкий Ю. Э. Сеницкий А. Ю. К проблеме разложения по собственным вектор-функциям в нестационарных начально-краевых задачах динамики оболочек вращения. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер: «Физ.-мат. науки», 2004. — № 30. — С. 83–91.

Поступила 4.07.2006 г.