Общероссийский математический портал

В. В. Стружанов, Упругопластическая среда с разупрочнением. Сообщение 2. Определяющие соотношения при сложном напряженном состоянии, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 68–80

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu454>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:44:31

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ СРЕДА С РАЗУПРОЧНЕНИЕМ.
СООБЩЕНИЕ 2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ
ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ**

Определяющие соотношения для одноосного растяжения упругопластического материала, обобщены на случай сложного напряженно-деформированного состояния. Установлена ортогональность соответствующих векторов, связанных с приращением пластических деформаций, к предельным поверхностям в пространствах напряжений и деформаций на всех стадиях деформирования, включая и разупрочнение. Показана необходимость возникновения угловой точки на предельной поверхности в месте догрузки при сохранении материалом изотропности.

Целью работы является обобщение определяющих соотношений для одноосного растяжения упругопластического материала, приведенных в первом сообщении [1], на случай сложного напряженно-деформированного состояния.

1. Основные допущения. Эффективный (представительный) объем материала, задающий масштаб описания напряженно-деформированного состояния, не изменяется в процессе деформирования.

На всех стадиях деформирования справедлива гипотеза о разгрузке [2, 3], а именно, полную деформацию всегда можно представить в виде суммы упругой и неупругой (пластической) деформаций.

Упругие свойства эффективного объема не изменяются и не зависят от величины накопленной неупругой деформации. Разгрузка происходит по линейному закону, совпадающему с первоначальным законом упругости.

Справедливы постулаты Ильюшина А. А. [2, 3] и Друккера [4].

2. Инкрементальный закон пластичности. Рассмотрим произвольное сложно напряженное состояние элементарного материального объема, характеризуемое симметричными тензорами второго ранга напряжений σ и деформаций ϵ . Свойства материала на стадиях упругости и упрочнения (разупрочнения) задают симметричные тензоры четвертого ранга соответственно модулей упругости C и инкрементальных (мгновенных, касательных) модулей C^p . Известно [5], что тензор C положительно определен, т.е. $\epsilon \cdot C \cdot \epsilon > 0$, $\epsilon \neq 0$. Положительно определен и обратный ему тензор модулей податливости S ($S \cdot C = C \cdot S = I$), т.е. $\sigma \cdot S \cdot \sigma > 0$, $\sigma \neq 0$. Здесь I — единичный тензор четвертого ранга, двумя точками обозначено двойное скалярное произведение тензоров [6]. Компоненты единичного тензора равны $I_{ijmn} = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})$.

Он может быть представлен суммой шарового тензора и тензора девиатора, т.е. $I = I^0 + I^d$. Компоненты этих тензоров соответственно равны $I_{ijmn}^0 = \frac{1}{3}\delta_{im}\delta_{jn}$, $I_{ijmn}^d = I_{ijmn} - I_{ijmn}^0$. Компоненты тензоров упругости и податливости определены выражениями $C_{ijmn} = \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})$; $S_{ijmn} = -\lambda[2\mu(3\lambda + 2\mu)]^{-1}\delta_{ij}\delta_{mn} + (4\mu)^{-1}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})$. Очевидно, что $C^0 = C \cdot I^0$; $S^0 = S \cdot I^0$; $C^d = C \cdot I^d$; $S^d = S \cdot I^d$. Здесь $i, j, m, n = 1, 2, 3$; $\delta_{ij} = (0, i \neq j; 1, i = j)$ — символ Кронекера; $\lambda = \nu E[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]^{-1}$, $\mu = E[2(1 + \nu)]^{-1}$ — коэффициенты Ляме; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

При изотермическом процессе элементарная работа деформации совершается за счет изменения свободной энергии. Параметрами термодинамического состояния материала являются ϵ^e и ϵ^p — тензоры упругих и неупругих (пластических) деформаций. Из определения разгрузки вытекает, что тензор полной деформации представим суммой $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$. Так как упругие свойства материала не зависят от пластических деформаций, то функция свободной энергии $F = F(\epsilon^e)$. Отсюда она пропорциональна потенциальной энергии упругих деформаций, т.е.

$F = \epsilon^e \cdot C \cdot \epsilon^e \frac{1}{2\rho}$. Здесь ρ — плотность материала.

Запишем уравнение второго закона термодинамики с учетом необратимости и изотермичности процесса деформирования. Имеем [7]

$$dF = \frac{1}{\rho} \sigma \cdot d\epsilon - dg, \quad (2.1)$$

где $dg \geq 0$ — некомпенсированное тепло (механическая диссипация энергии). С другой стороны $dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon^e} \right) \cdot d\epsilon^e$. Здесь $\left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon^e} \right)$ — симметричный тензор второго ранга, компоненты которого равны частным производным функции F по компонентам тензора ϵ^e . Подставляя это выражение в равенство (2.1), заменяя $d\epsilon$ на сумму $d\epsilon^e + d\epsilon^p$ и группируя члены, получаем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon^e} - \frac{\sigma}{\rho} \right) \cdot d\epsilon^e + \left(dg - \frac{1}{\rho} \sigma \cdot d\epsilon^p \right) = 0.$$

Отсюда [7]

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \epsilon^e}, \quad dg = \frac{1}{\rho} \sigma \cdot d\epsilon^p. \quad (2.2)$$

Из первого равенства (2.2) с учетом вида функции F находим, что

$$\sigma = C \cdot \epsilon^e = C \cdot (\epsilon - \epsilon^p). \quad (2.3)$$

Здесь и ниже $d\epsilon$, $d\epsilon^e$, $d\epsilon^p$ — приращения симметричных тензоров второго ранга полных, упругих и пластических деформаций.

Из формулы (2.3) следует, что любой тензор напряжений, реализованный в материале, представляется в виде разности тензоров $\sigma = \sigma^m - \sigma^p$, где $\sigma^m = C \cdot \epsilon$ — тензор мгновенных напряжений, которые при заданной деформации появились бы в материале с идеально упругими свойствами, а $\sigma^p = C \cdot \epsilon^p$ — тензор релаксационных напряжений, характеризующий уровень падения напряжений от идеально упругого состояния, происходящего вследствие диссипативных процессов. Таким образом, при деформировании в материале как бы происходит два последовательных процесса. Сначала при сохранении идеально упругих свойств возникают напряжения, составляющие тензор σ^m . Затем за весьма малый промежуток времени происходит их релаксация (энергия диссипирует за счет пластической деформации) на величины, определяемые компонентами тензора σ^p .

Используя закон (2.3), запишем выражение для приращения напряжений:

$$d\sigma = C \cdot d\epsilon^e = C \cdot (d\epsilon - d\epsilon^p). \quad (2.4)$$

С другой стороны, $d\sigma/d\epsilon = C^p$ и справедливо инкрементальное соотношение [8, 9]

$$d\sigma = C^p \cdot d\epsilon. \quad (2.5)$$

В равенстве (2.5) инкрементальные модули зависят от величин деформаций элемента материала в момент начала догрузки. Таким образом, равенство (2.5) задает линейную зависимость между дифференциально малыми приращениями напряжений и деформаций. Отметим, что, вообще говоря, компоненты инкрементальных тензоров, определяющих мгновенные свойства материала, зависят от деформаций и путей деформирования сколь угодно сложным образом.

Приравнявая выражения (2.4) и (2.5), находим инкрементальное соотношение

$$d\epsilon^p = (I - S \cdot C^p) \cdot d\epsilon = W_\epsilon \cdot d\epsilon. \quad (2.6)$$

Обращая равенство (2.5) (если это возможно), получаем соотношение

$$d\epsilon = S^p \cdot d\sigma, \quad (2.7)$$

где S^p — тензор мгновенных модулей податливости ($S^p \cdot C^p = C^p \cdot S^p = I$). Подставив выражение для приращения тензора полной деформации (2.7) в равенство (2.6), получаем

$$d\epsilon^p = (S^p - S) \cdot d\sigma = W_\sigma \cdot d\sigma. \quad (2.8)$$

Формулы (2.6) и (2.8) являются двумя формами одного закона, описывающего кинетику формирования неупругих деформаций на всех стадиях деформирования. Он называется инкрементальным законом пластичности [9], так как в его выражения входят тензоры инкрементальных модулей (мгновенных свойств материала) C^p и S^p . Тензор $W_\epsilon = I - S \cdot C^p$ назовем первым инкрементальным тензором пластичности, а тензор $W_\sigma = S^p - S$ — вторым инкрементальным тензором пластичности. Первый — любому полю приращений полных деформаций ставит

в соответствие поле пластических деформаций, второй — любому полю приращений напряжений ставит в соответствие поле пластических деформаций.

Если обратить равенство (2.8), то получим определяющее соотношение

$$d\sigma = W_{\sigma}^{-1} \cdot d\varepsilon^p = D \cdot d\varepsilon^p. \quad (2.9)$$

Здесь $D = W_{\sigma}^{-1}$ — тензор инкрементальных модулей упрочнения (разупрочнения).

Далее, используя выражение для приращения тензора релаксационных напряжений и закон (2.6), получаем

$$d\sigma^p = C \cdot d\varepsilon^p = C \cdot W_{\varepsilon} \cdot d\varepsilon = (C - C^p) \cdot d\varepsilon = R \cdot d\varepsilon.$$

Здесь $R = C - C^p$ — тензор инкрементальных модулей релаксации, ставящий в соответствие любому полю приращений полных деформаций поле релаксационных напряжений.

Наконец, из равенства $C^p \cdot W_{\sigma} \cdot D = C^p$ следует связь между тензорами мгновенных (касательных) модулей и инкрементальных модулей упрочнения, а именно, $C^p = D \cdot (I + S \cdot D)^{-1}$.

3. Инкрементальные тензоры изотропной среды. При сохранении материалом изотропности на всех стадиях деформирования его инкрементальные свойства задают только два параметра, а именно, мгновенный касательный модуль E^p и мгновенный коэффициент поперечной деформации ν^p . Для одноосного растяжения они определены в [1]. Тогда тензоры C^p и S^p можно представить в виде $C^p = \alpha_c C^*$, $S^p = \alpha_s S^*$, где $\alpha_c = E^p \left[(1 + \nu^p)(1 - 2\nu^p) \right]^{-1}$, $C_{ijmn}^* = \nu^p \delta_{ij} \delta_{mn} + \frac{1}{2} (1 - 2\nu^p) (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm})$, $S_{ijmn}^* = -\nu^p \delta_{ij} \delta_{mn} + \frac{1}{2} (1 + \nu^p) (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm})$, $\alpha_s = \frac{1}{E^p}$. Вычислим детерминанты C_k^* и S_k^* ($k = 1, 2, \dots, 6$) главных миноров матриц, отвечающих тензорам C^* и S^* . Имеем

$$\begin{aligned} C_1^* &= 1 - \nu^p, \quad C_2^* = 1 - 2\nu^p, \quad C_3^* = (1 + \nu^p)(1 - 2\nu^p)^2, \quad C_4^* = \frac{1}{2}(1 + \nu^p)(1 - 2\nu^p)^3, \\ C_5^* &= \frac{1}{4}(1 + \nu^p)(1 - 2\nu^p)^4, \quad C_6^* = \frac{5}{8}(1 + \nu^p)(1 - 2\nu^p)^5; \\ S_1^* &= 1, \quad S_2^* = 1 - (\nu^p)^2, \quad S_3^* = (1 + \nu^p)^2(1 - 2\nu^p), \quad S_4^* = \frac{1}{2}(1 + \nu^p)^3(1 - 2\nu^p), \\ S_5^* &= \frac{1}{4}(1 + \nu^p)^4(1 - 2\nu^p), \quad S_6^* = \frac{5}{8}(1 + \nu^p)^5(1 - 2\nu^p). \end{aligned}$$

Если $-1 < \nu^p < \frac{1}{2}$, то все эти детерминанты положительны. Следовательно, согласно критерию Сильвестра [10, 11] матрицы тензоров C^* и S^* , а равно и сами тензоры, положительно определены. Когда $\nu^p = -1$ или $\nu^p = \frac{1}{2}$ тензоры C^* , S^* положительно полуопределены.

Знак коэффициентов α_c и α_s при условии $-1 < \nu^p < \frac{1}{2}$ совпадает со знаком модуля E^p . Отсюда для $E^p > 0$ ($\alpha_c, \alpha_s > 0$) тензоры C^p и S^p положительно определены, при $E^p < 0$ ($\alpha_c, \alpha_s < 0$) — отрицательно определены. Если $E^p = 0$, то компоненты тензора C^p обращаются в нуль, а компоненты тензора S^p — в бесконечность.

Далее второй инкрементальный тензор пластичности и тензор упрочнения представимы соответственно в виде $W_{\sigma} = \gamma_{\sigma} W^*$, $D = \gamma_d D^*$, где $\gamma_{\sigma} = \frac{1}{H}$, $\gamma_d = H \left[(1 + \eta)(1 - 2\eta) \right]^{-1}$, $W_{ijmn}^* = -\eta \delta_{ij} \delta_{mn} + \frac{1}{2} (1 + \eta) (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm})$, $D_{ijmn}^* = \eta \delta_{ij} \delta_{mn} + \frac{1}{2} (1 - 2\eta) (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm})$. Здесь $H = \frac{EE^p}{E - E^p}$ — инкрементальный модуль упрочнения (разупрочнения), $\eta = \frac{E\nu^p - E^p\nu}{E - E^p}$ — мгновенный коэффициент остаточной поперечной деформации [1], $1 + \eta = \frac{E(1 + \nu^p) - E^p(1 + \nu)}{E - E^p}$, $1 - 2\eta = \frac{E(1 - 2\nu^p) - E^p(1 - 2\nu)}{E - E^p}$. Коэффициент η изменяется в тех же пределах, что и коэффициент ν^p . Ра-

венство между ними может быть только тогда, когда при догрузении не возникают упругие деформации, например, при $E^p = 0$. Проводя рассуждения, аналогичные изложенным выше, находим, что при $\eta \neq \frac{1}{2}$, $\eta \neq 1$ тензоры W^* и D^* положительно определены. Следовательно,

тензоры W_σ и D будут положительно определены при $H > 0$ и отрицательно определены при $H < 0$.

Отметим, что тензоры C^p и S^p вырождаются, если выполняется хотя бы одно из равенств $v^p = -1$, $v^p = \frac{1}{2}$, $E^p = 0$. Аналогично тензоры W_σ и D вырождаются при $\eta = -1$, $\eta = \frac{1}{2}$, $H = 0$.

4. Постулат Друккера. Вычислим работу напряжений на произвольном замкнутом по напряжениям цикле нагружения. Обобщая рассуждения, приведенные в сообщении [1], получаем

$$A_\sigma = \sigma \cdot d\varepsilon^p + \frac{1}{2} d\sigma \cdot d\varepsilon^p = dA_p + \frac{1}{2} d\sigma \cdot d\varepsilon^p.$$

Здесь dA_p — элементарная работа напряжений на приращениях пластических деформаций. Так как $dA_p = \rho dg > 0$ (см. формулу (2.2)), то величина A_σ будет положительной (требование постулата Друккера), если

$$d\sigma \cdot d\varepsilon^p > 0. \quad (4.1)$$

Подставляя сюда сначала выражение для $d\sigma$ из формулы (2.9), а затем выражение для $d\varepsilon^p$ из равенства (2.8), находим, что

$$(D \cdot d\varepsilon^p) \cdot d\varepsilon^p = d\varepsilon^p \cdot D \cdot d\varepsilon^p > 0, \quad d\sigma \cdot W_\sigma \cdot d\sigma > 0. \quad (4.2)$$

Кроме того $d\sigma \cdot d\varepsilon^p = d\sigma \cdot (d\varepsilon - d\varepsilon^e) = d\sigma \cdot d\varepsilon - d\sigma \cdot d\varepsilon^e > 0$. Тогда, используя равенство (2.4), получаем неравенство $d\sigma \cdot d\varepsilon^e = d\varepsilon^e \cdot C \cdot d\varepsilon^e > 0$ (тензор C положительно определен). Следовательно, для удовлетворения неравенства (4.1) необходимо, чтобы для любого пути догружения выполнялось неравенство

$$d\sigma \cdot d\varepsilon > 0. \quad (4.3)$$

Используя равенства (2.5) и (2.7), из формулы (4.3) получаем неравенства

$$d\varepsilon \cdot C^p \cdot d\varepsilon > 0, \quad d\sigma \cdot S^p \cdot d\sigma > 0. \quad (4.4)$$

Выражения (4.2) и (4.4) означают, что постулат Друккера требует положительной определенности тензоров D , W_σ , C^p , S^p при любых путях догружения.

Далее дифференциал $dA_p = \frac{\partial A_p}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p = \left(\frac{\partial A_p}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \right) \cdot d\varepsilon^p$. Здесь по повторяющимся индексам производится суммирование, $A_p(\varepsilon_{ij}^p)$ — функция полной работы напряжений на пластических деформациях при имеющем место пути активного деформирования. Так как $dA_p = \sigma \cdot d\varepsilon^p$, то $\sigma_{ij} = \frac{\partial A_p}{\partial \varepsilon_{ij}^p}$ и функция $A_p(\varepsilon_{ij}^p)$ является потенциалом напряжений. Теперь $d\sigma_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}^p} d\varepsilon_{mn}^p = \frac{\partial^2 A_p}{\partial \varepsilon_{ij}^p \partial \varepsilon_{mn}^p} d\varepsilon_{mn}^p$. С другой стороны $d\sigma = D \cdot d\varepsilon^p$ или $d\sigma_{ij} = D_{ijmn} d\varepsilon_{mn}^p$, т.е. $D_{ijmn} = \frac{\partial^2 A_p}{\partial \varepsilon_{ij}^p \partial \varepsilon_{mn}^p}$. Таким образом, матрица, отвечающая тензору D , является матрицей Гессе функции A_p [11]. Известно [11], что функция A_p будет строго выпуклой (выпуклой вниз), если ее гессииан положительно определен. Если гессииан отрицательно определен, то это строго вогнутая (выпуклая вверх) функция.

Составим потенциальную функцию для процесса активного деформирования:

$$\Phi(\varepsilon_{ij}^p, q_{ij}) = A_p(\varepsilon_{ij}^p) - A_p^q,$$

где $A_p^q = \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} q_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ — работа на пластических деформациях, действующих на элементарный объем внешних усилий. Здесь компоненты тензора пластической деформации ε_{ij}^p играют роль параметров состояния элементарного объема, а q_{ij} — параметров управления. Считая функцию A_p , по крайней мере, дважды дифференцируемой, запишем два члена разложения функции Φ в ряд Тейлора. Имеем

$$\Delta\Phi \approx \Phi + \frac{1}{2} d^2\Phi.$$

В положении равновесия $d\Phi = \frac{\partial A_p}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p - q_{ij} = 0$, а $d^2\Phi = d^2A_p = d\varepsilon^p \cdot D \cdot d\varepsilon^p$. Отсюда, если $d^2A_p > 0$ (тензор D положительно определен), то функция Φ имеет локальный минимум, и данное положение равновесия элементарного объема устойчивое. Когда $d^2A_p < 0$ (тензор D отрицательно определен), то функция Φ имеет локальный максимум, и данное положение равновесия неустойчивое. Если тензор D знаконеопределенный, то характер равновесия не определен [11]. Таким образом, выполнение постулата Друккера гарантирует устойчивость процесса деформирования и определяет устойчивые состояния материала. Такие процессы называют упрочнением.

Постулат Друккера нарушается, если существуют такие пути деформационного догружения, на которых

$$d\sigma \cdot d\varepsilon^p < 0. \quad (4.5)$$

Условие (4.5) определяет реологически неустойчивое состояние материала, называемое разупрочнением. В этом случае инкрементальные тензоры D , W_σ , C^p , S^p либо отрицательно определенные, либо знаконеопределенные. В том случае, когда материал сохраняет изотропность, данные тензоры отрицательно определены (см. пункт 3).

Наконец, из приведенных рассуждений следует, что условием перехода материала на стадию разупрочнения является вырождение тензоров C^p и W_σ .

П р и м е ч а н и е 4.1. Левая часть в выражении (4.1) равняется нулю, если при деформировании не возникают пластические деформации. Это согласуется с тем, что в упругости работа напряжений на замкнутом пути нагружения равна нулю.

П р и м е ч а н и е 4.2. Существование потенциала напряжений при активном нагружении обусловлено тем, что в данном случае с формальной точки зрения можно считать материал нелинейно упругим [4]. Различие нелинейно упругого и упругопластического материала выявляется разгрузкой, а именно, при разгрузке упругопластический материал имеет уже другой потенциал напряжений. Поэтому работа напряжений на замкнутом пути нагружения отлична от нуля.

5. Постулат Ильюшина. Обобщая рассуждения, приведенные в сообщении [1], находим, что работа напряжений по любому замкнутому по деформациям пути деформирования равна

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \sigma \cdot d\varepsilon + \frac{1}{2} d\varepsilon \cdot C^p \cdot d\varepsilon - \frac{1}{2} d\varepsilon \cdot C \cdot d\varepsilon - d\varepsilon \cdot (\sigma + d\sigma - C \cdot d\varepsilon) = \\ &= \frac{1}{2} d\varepsilon \cdot (C - C^p) \cdot d\varepsilon = \frac{1}{2} d\varepsilon \cdot R \cdot d\varepsilon. \end{aligned}$$

Постулат Ильюшина требует положительности работы A_ε (в упругом теле она равна нулю). Следовательно,

$$d\varepsilon \cdot R \cdot d\varepsilon > 0, \quad (5.1)$$

и тензор релаксации $R = C - C^p$ — положительно определенный как при упрочнении, так и при разупрочнении. Используя равенства $d\sigma = C^p \cdot d\varepsilon$, $d\sigma^m = C \cdot d\varepsilon$, $d\sigma^m - d\sigma = d\sigma^p$, из неравенства (5.1) получаем

$$d\varepsilon \cdot C \cdot d\varepsilon - d\varepsilon \cdot C^p \cdot d\varepsilon = (d\sigma^m - d\sigma) \cdot d\varepsilon = d\sigma^p \cdot d\varepsilon > 0. \quad (5.2)$$

Кроме того,

$$d\sigma^p \cdot d\varepsilon = d\varepsilon^p \cdot C \cdot d\varepsilon = d\sigma^m \cdot d\varepsilon^p > 0.$$

Отметим, что требование постулата Друккера является более сильным. Он представляет собой лишь достаточное условие для выполнения постулата пластичности Ильюшина. Действительно, если постулат Друккера выполняется, то

$$d\sigma \cdot d\varepsilon^p = (d\sigma^m - d\sigma^p) \cdot d\varepsilon^p = d\sigma^m \cdot d\varepsilon^p - d\sigma^p \cdot d\varepsilon^p > 0.$$

Так как $d\sigma^p \cdot d\varepsilon^p = d\varepsilon^p \cdot C \cdot d\varepsilon^p > 0$, то необходимо $d\sigma^m \cdot d\varepsilon^p = d\sigma^p \cdot d\varepsilon > 0$.

Наконец, приведем несколько полезных сведений о свойствах некоторых тензоров. Имеем, используя равенство (2.6),

$$d\varepsilon^p \cdot C \cdot d\varepsilon^p = (d\varepsilon \cdot W_\varepsilon) \cdot C \cdot (W_\varepsilon \cdot d\varepsilon) = d\varepsilon \cdot [W_\varepsilon \cdot (C \cdot W_\varepsilon)] \cdot d\varepsilon > 0.$$

Следовательно, тензор $(I - S \cdot C^p) \cdot (C - C^p)$ обладает свойством положительной определенности. Далее, тензор $W_\varepsilon = S \cdot (C - C^p)$ является двойным скалярным произведением поло-

6. Предельные поверхности и свойство градиентальности. Рассмотрим в шестимерном евклидовом пространстве деформаций в общем случае кусочно-гладкую предельную поверхность, заданную функциями $\varphi_k(\varepsilon_{ij}) = 0$, где k — число гладких поверхностей, ε_{ij} — компоненты тензора полной деформации, являющиеся координатами некоторой точки в простран-

Очевидно, что расположение центра, а также инкрементальные свойства материала в точках предельной поверхности и ее вид зависят от пути деформирования, по которому полная деформация, отвечающая точке N , была достигнута. При любом догружении, определяемом вектором $d\varepsilon$, исходящим из некоторой точки N предельной поверхности во вне поверхности, начинается процесс образования неупругих деформаций. Здесь и в дальнейшем, где необходимо, будем использовать векторный язык, ведя разговор о тензорах напряжений и деформаций.

При выводе формулы (5.1) был рассмотрен частный случай, когда нагружение по замкнутому пути NPN идет из точки N , которая лежит на предельной поверхности (рис. 6.1) и которой соответствует тензор напряжений $\sigma = C \cdot \epsilon^e$. Общий случай требует производить деформирование из произвольной точки L , лежащей внутри области, ограниченной предельной поверхностью, по замкнутому пути $LNPL$. Упругие деформации в точке L обозначим ϵ^*_{ij} , а напряжения σ^*_{ij} ($\sigma^* = C \cdot \epsilon^*$). Тогда к выражению A_ϵ необходимо добавить величину

$$A'_\varepsilon = \sigma^* \cdot (\varepsilon^e - \varepsilon^*) + \frac{1}{2}(\varepsilon^e - \varepsilon^*) \cdot (\sigma - \sigma^*) - \frac{1}{2}(\varepsilon^e - \varepsilon^*) \cdot (\sigma - \sigma^*) - (\varepsilon^e - \varepsilon^*) \cdot C \cdot (\varepsilon^* - d\varepsilon^p) = (\varepsilon^e - \varepsilon^*) \cdot C \cdot d\varepsilon^p = (\varepsilon^e - \varepsilon^*) \cdot d\sigma^p.$$

$$\left(\varepsilon^e - \varepsilon^*\right) \cdot d\sigma^p + d\varepsilon \cdot d\sigma^p > 0. \quad (6.1)$$
$$\left(\varepsilon^e - \varepsilon^*\right) \cdot d\sigma^p > 0. \quad (6.2)$$

Согласно неравенству (6.2) угол между векторами $(\varepsilon^e - \varepsilon^*)$ и $d\sigma^p$ должен быть острым.

Условие (5.2) также определяет острый угол между векторами $d\epsilon$ и $d\sigma^p$. В силу произвольности $d\epsilon$ и независимости направления векторов $d\epsilon$ и $d\sigma^p$ (постулат Ильюшина не пред-

полагает никакой определенной зависимости $d\epsilon^P$ от $d\epsilon$) непосредственно снова получаем ортогональность вектора $d\sigma^P$ к предельной поверхности.

Отметим, что в особых точках предельной поверхности направление вектора $d\sigma^P$ не определено. Он расположен внутри конуса (конус B , рис. 6.1), образованного нормальными к гладким участкам поверхности, пересекающимся в особой точке.

Далее перепишем неравенство (6.2) в виде

$$(\epsilon^e - \epsilon^*) \cdot C \cdot d\epsilon^P = (\sigma - \sigma^*) \cdot d\epsilon^P > 0. \quad (6.3)$$

В частном случае ($\sigma^* = 0$) имеем $\sigma \cdot d\epsilon^P > 0$. Таким образом, из постулата Ильюшина вытекает справедливость принципа максимума Мизеса (6.3) [12] и положительность механической диссипации энергии на всех стадиях деформирования. Следовательно, процесс деформирования, включающий стадию разупрочнения, не противоречит законам термодинамики.

Итак, множество тензоров деформаций $M_\epsilon \{ \epsilon : \phi(\epsilon) < 0 \}$ является выпуклым. Сдвиг M_ϵ на ϵ^P (т. е. множество $M_\epsilon^e = M_\epsilon - \epsilon^P$), где ϵ^P — фиксированный тензор неупругих деформаций, образовавшихся к данному моменту при деформировании по некоторому пути, — также выпуклое множество. Посредством линейного преобразования $C \cdot \epsilon^e = \sigma$ множество M_ϵ^e отображается во множество M_σ шестимерного пространства напряжений, а поверхность $\phi = 0$ — в поверхность $f(\sigma_{ij}) = 0$, называемую поверхностью нагружения. Так как тензор C осуществляет взаимно однозначное отображение, то множество M_σ должно быть выпуклым. Отсюда поверхность $f = 0$ также выпуклая. При этом особая точка на предельной поверхности переходит в особую точку поверхности нагружения.

Выпуклость поверхности нагружения вытекает также и из неравенства (6.3). Кроме того, это неравенство определяет ортогональность вектора $d\epsilon^P$ к предельной поверхности.

Таким образом, если точка догужения находится на гладкой части предельной поверхности, то вектор $d\epsilon^P$ ортогонален к поверхности нагружения в пространстве напряжений, а вектор $d\sigma^P$ ортогонален к поверхности нагружения в пространстве деформаций на всех стадиях деформирования, включая и разупрочнение. Этот результат называется свойством градиентальности.

7. Свойства отображений пространств напряжений и деформаций. В девятимерном пространстве тензоров второго ранга ортонормированным базисом являются девять диад $e_i e_j$. Здесь векторы $e_1 = \{1, 0, 0\}$, $e_2 = \{0, 1, 0\}$, $e_3 = \{0, 0, 1\}$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ — ортонормированный базис в трехмерном евклидовом пространстве, $e_i e_j$ — тензорное произведение векторов [6]. Эти диады попарно ортогональны (двойное скалярное произведение равно нулю), а двойная свертка каждой из них с самой собой равна единице.

В шестимерном пространстве симметричных тензоров второго ранга ортогональным базисом являются тензоры $\frac{1}{2}(e_i e_j + e_j e_i)$. После нормирования получаем ортонормированный базис

$$\Lambda^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \Lambda^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \Lambda^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Lambda^4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \Lambda^5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \Lambda^6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (7.1)$$

Считая тензоры (7.1) базисом в пространстве тензоров напряжений, отобразим данные орты посредством линейного оператора, заданного изотропным тензором S , в пространство деформаций. Получим шесть тензоров a^k ($k = 1, 2, \dots, 6$), где $a^k = S \cdot \Lambda^k$. Эти тензоры обладают следующими свойствами:

$$a^m \cdot a^n = \frac{v(v-2)}{E^2} (m, n = 1, 2, 3, m \neq n);$$

$$a^m \cdot a^n = 0 (m = 1, 2, \dots, 6, n = 4, 5, 6, m \neq n);$$

$$a^m \cdot a^m = \frac{1+2v^2}{E^2} \quad (m=1, 2, 3);$$

$$a^n \cdot a^n = \frac{(1+v)^2}{E^2} \quad (n=4, 5, 6).$$

Таким образом, единичные орты, рассматриваемые в пространстве напряжений, преобразуются в векторы (тензоры), имеющие меньшую длину и тупой угол между векторами a^m и a^n при $m, n=1, 2, 3, m \neq n$.

Если единичные орты из пространства деформаций отобразить посредством изотропного тензора C в пространство напряжений, то получаем шесть тензоров b^k ($k=1, 2, \dots, 6$), которые обладают свойствами:

$$b^m \cdot b^n = \frac{vE^2(2-v)}{[(1+v)(1-2v)]^2} \quad (m, n=1, 2, 3, m \neq n);$$

$$b^m \cdot b^m = \frac{E^2(1-2v+3v^2)}{[(1+v)(1-2v)]^2} \quad (m=1, 2, 3);$$

$$b^m \cdot b^n = 0 \quad (m=1, 2, \dots, 6, n=4, 5, 6, m \neq n);$$

$$b^n \cdot b^n = \frac{E^2}{(1+v)^2} \quad (n=4, 5, 6).$$

Таким образом, единичные орты пространства деформаций преобразуются в векторы, имеющие большую длину и острый угол между векторами b^m и b^n $m, n=1, 2, 3, m \neq n$.

Отметим, что отображение без искажения углов осуществляется лишь при условии $v=0$.

Непосредственно проверяется факт нарушения ортогональности тензоров после их отображения. Если в пространстве напряжений $\Lambda^1 \cdot \sigma = 0$, то $(S \cdot \Lambda^1) \cdot (S \cdot \sigma) \neq 0$. Если в пространстве деформаций $\Lambda^1 \cdot \varepsilon = 0$, то $(C \cdot \Lambda^1) \cdot (C \cdot \varepsilon) \neq 0$.

Рассмотрим, наконец, отрезок в пространстве напряжений $t_\sigma = \lambda \sigma_1 + (1-\lambda) \sigma_2$, который касается поверхности $f_k = 0$ в точке догружения, т.е. существует единственное значение $\lambda = \lambda_N$ такое, что $\lambda_N \sigma_1 + (1-\lambda_N) \sigma_2 \in f_k$. Здесь $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 < \lambda_N < 1$, σ_1, σ_2 — симметричные тензоры напряжений. Из результатов предыдущего параграфа следует равенство $t_\sigma \cdot d\varepsilon^p = 0$. При отображении отрезка t_σ в пространство деформаций получаем отрезок $t_\varepsilon = \lambda S \cdot \sigma_1 + (1-\lambda) S \cdot \sigma_2$. Очевидно, что $\lambda_N S \cdot \sigma_1 + (1-\lambda_N) S \cdot \sigma_2 \in \phi_k$, и отрезок t_ε касается в точке догружения поверхности $\phi_k = 0$. Рассуждения, приведенные выше, показывают нарушение ортогональности, т.е. $(S \cdot t_\sigma) \cdot (S \cdot d\varepsilon^p) \neq 0$. Однако, $t_\sigma \cdot d\varepsilon^p = (S \cdot t_\sigma) \cdot (C \cdot d\varepsilon^p) = t_\varepsilon \cdot d\sigma^p = 0$, т.е. в пространстве деформаций ортогональным к отрезку t_ε является вектор $d\sigma^p$.

Таким образом, когда вектор $d\sigma^p$ ортогонален к поверхности $\phi_k = 0$, то ортогональность вектора $d\varepsilon^p$ к поверхности $f_k = 0$, представляющей отображение $\phi_k = 0$ в пространство напряжений, является следствием особенностей отображения шестимерных евклидовых пространств напряжений и деформаций друг в друга посредством тензоров C и S .

В заключении данного параграфа заметим, что при $v=0$ тензор $C = EI$. Тогда $d\sigma^p = EI \cdot d\varepsilon^p = Ed\varepsilon^p$, и, следовательно, векторы $d\sigma^p$ и $d\varepsilon^p$ коллинеарны. Они одновременно ортогональны как к предельной поверхности, так и к поверхности нагружения.

8. Нагружение, разгрузка и разрушение. Для сложного напряженно-деформированного состояния процессы активного нагружения, нейтрального нагружения и разгрузки определяются по отношению к предельным поверхностям векторов догружения в пространствах напряжений и деформаций. Рассмотрим эти процессы сначала в пространстве деформаций. Очевидно, что при активном деформировании вектор $d\varepsilon$ направлен вовне предельной поверхности, т.е. $N_\varepsilon \cdot d\varepsilon > 0$. Здесь N_ε — симметричный тензор второго ранга с компонентами $\partial \phi_k / \partial \varepsilon_{ij}$, задающий внешнюю нормаль к поверхности $\phi_k = 0$ в точке догружения. При этом возможно два варианта, а именно, $N_\varepsilon \cdot d\varepsilon^e > 0$ ($d\varepsilon^e \cdot C \cdot d\varepsilon^p > 0$) — упрочнение и $N_\varepsilon \cdot d\varepsilon^e < 0$ ($d\varepsilon^e \cdot C \cdot d\varepsilon^p < 0$) — разупрочнение, когда вектор $d\varepsilon^e$ составляет с вектором $d\sigma^p$ тупой угол и, следова-

тельно, направлен внутрь предельной поверхности (упругая деформация материала уменьшается). При догрузке $d\varepsilon^p \neq 0$.

Разгрузка отвечает неравенству $N_\varepsilon \cdot d\varepsilon < 0$. Кроме того, $d\varepsilon^p = 0$. Для нейтрального нагружения имеем $N_\varepsilon \cdot d\varepsilon = 0$, $d\varepsilon^p = 0$.

В пространстве напряжений нейтральное нагружение определяется равенством $N_\sigma \cdot d\sigma = 0$, где N_σ — симметричный тензор второго ранга с компонентами $\partial f_k / \partial \sigma_{ij}$, задающий внешнюю нормаль к поверхности $f_k = 0$. При этом $d\varepsilon^p = 0$.

Активному нагружению в случае упрочнения соответствует неравенство $N_\sigma \cdot d\sigma > 0$ ($d\varepsilon^p \neq 0$). Вектор догрузки $d\sigma$ направлен вовне поверхности нагружения.

При разупрочнении состояние материала неустойчивое. Поэтому догрузка в пространстве напряжений за пределы поверхности нагружения невозможно. Сохранение равновесного характера процесса активного деформирования возможно лишь при жестком нагружении, а именно, заданием деформаций. При этом для вектора догрузки $d\sigma$ должно выполняться неравенство $N_\sigma \cdot d\sigma < 0$ (вектор $d\sigma$ направлен внутрь поверхности нагружения). Но это неравенство справедливо и для разгрузки. Отличие заключается в том, что при нагрузке $N_\sigma \cdot d\sigma^m = N_\sigma \cdot (C \cdot d\varepsilon) > 0$ ($d\varepsilon^p \neq 0$), а при разгрузке $N_\sigma \cdot d\sigma^m < 0$ ($d\varepsilon^p = 0$).

Стадия разупрочнения материала завершается его разрушением. Будем считать материал разрушенным, если существуют такие пути догрузки в пространстве деформаций, на которых материал не диссипирует подводимую энергию, т.е. $dg = \sigma \cdot d\varepsilon^p = 0$. Вообще говоря, это условие может выполняться и для неразрушенного материала, когда тензоры σ и $d\varepsilon^p$ ортогональны, и не выполняться для разрушенного материала на некоторых путях догрузки, например, при всестороннем сжатии. Поэтому существенно требование наличия некоторого набора путей догрузки, где равенство $dg = 0$ выполняется. Тогда очевидным следствием данного дополнительного условия является отсутствие в материале напряжений в точке догрузки, т.е. $\sigma = 0$. Еще одним признаком разрушения является равенство $d\sigma^m = d\sigma^p$. Следовательно, $d\sigma = 0$ и приращение полных деформаций равняется приращению неупругих деформаций, т.е. $d\varepsilon = d\varepsilon^p$.

Р и с. 8.1. Трансформация предельных кривых при активном нагружении в плоскости двух главных деформаций

Используя рассуждения, приведенные выше, покажем на качественном уровне изменение предельных поверхностей при активном деформировании. На рис. 8.1 изображена трансформация предельных кривых при активном деформировании в плоскости двух главных деформаций. На рис. 8.2 изображена трансформация кривых нагружения при активном нагружении в плоскости двух главных напряжений. Пунктиром обозначены кривые, разделяющие области упругости и разупрочнения.

Отражен трансляционный характер изменения кривых, а именно, расширение области упругости при упрочнении и сужение ее при разупрочнении. Показано влияние на расположение кривых эффекта Баушингера и его инверсии на стадии разупрочнения [1]. После достижения путем деформирования точки B (рис. 8.1), где $d\varepsilon = d\varepsilon^p$, и путем нагружения точки O (рис. 8.2), где $\sigma = 0$, материал разрушается. Однако, при последующем нагружении в область сжатия существует небольшая область, где этот фрагментированный материал может вести себя упругим образом.

Рассмотрим теперь случай, когда нагружение осуществляется из особой точки, в которой пересекается несколько гладких поверхностей. Тогда активное нагружение элемента материала прогнозируется, когда условия активного нагружения выполняются хотя бы для одной из по-

Р и с. 8.2. Трансформация кривых нагружения при активном нагружении в плоскости главных напряжений:
 a — процесс упрочнения; b — процесс разупрочнения

верхностей. Нейтральное нагружение — это нейтральное нагружение относительно одной из поверхностей, не являющееся нагрузкой по отношению к другим поверхностям. Условия разрушения не изменяются, т.е. в особой точке $\sigma = 0$ и при любом догружении посредством задания деформаций $d\varepsilon = d\varepsilon^p$.

Отметим, наконец, что в случае кусочно-гладких поверхностей, когда точка догружения расположена на гладкой части или в особой точке, не являющейся результатом процесса деформирования, при разгрузке виды предельной поверхности и поверхности нагружения не изменяются.

9. Ассоциированный и инкрементальный законы пластического течения [9]. В силу ортогональности вектора $d\varepsilon^p$ к поверхности $f_k = 0$ (гладкая часть поверхности нагружения) справедлив ассоциированный закон течения [12]

$$d\varepsilon^p = k_\sigma N_\sigma N_\sigma \cdot d\sigma, \quad (9.1)$$

где диадное (тензорное) произведение тензоров N_σ представляет симметричный тензор четвёртого ранга. Аналогично в пространстве деформаций имеем

$$C \cdot d\varepsilon^p = k_\varepsilon N_\varepsilon N_\varepsilon \cdot d\varepsilon. \quad (9.2)$$

Здесь параметры k_σ , k_ε могут быть скалярными функциями напряжений и деформаций или функционалами, каждый из которых в общем случае зависит от пути нагружения (деформирования).

Кроме того, справедлив инкрементальный закон пластического течения, как более общий и не связанный с предельными поверхностями. Тогда, подставляя в равенство (9.1) выражение для $d\varepsilon^p$ из формулы (2.8), а в равенство (9.2) выражение для $d\varepsilon^p$ из формулы (2.6), получаем

$$W_\sigma = S^p - S = k_\sigma N_\sigma N_\sigma, \quad (9.3)$$

$$R = C - C^p = k_\varepsilon N_\varepsilon N_\varepsilon. \quad (9.4)$$

Непосредственно проверяется, что

$$w \cdot N_\varepsilon N_\varepsilon \cdot w > 0, \quad w \cdot N_\sigma N_\sigma \cdot w > 0,$$

где w — произвольный симметричный тензор второго ранга. Следовательно, тензоры $N_\varepsilon N_\varepsilon$ и $N_\sigma N_\sigma$ — положительно определенные. Так как и тензор $C - C^p$ положительно определен, то $k_\varepsilon > 0$. При $k_\sigma > 0$ тензор W_σ положительно определен (стадия упрочнения), при $k_\sigma < 0$ этот тензор отрицательно определен (стадия разупрочнения). При $k_\sigma = 0$ он вырождается (переход упрочнения на разупрочнение).

Для гладких предельных поверхностей, имеющих в точке догружения только один вектор внешней нормали, равенства (9.3) и (9.4) определяют тензоры W_σ и R как анизотропные, имеющие в общем случае 21 ненулевой элемент, т.е. инкрементальные свойства материала в этом случае задают анизотропные тензоры C^p и S^p .

Если в процессе деформирования, материал сохраняет изотропность, т.е. тензоры C^p и S^p и, следовательно, тензоры W_σ и R являются изотропными, равенства (9.3) и (9.4) не выполняются, т.к. диадное произведение NN двух одинаковых симметричных тензоров не может дать в результате изотропный тензор четвертого ранга. Действительно, для изотропности результирующего тензора необходимо, чтобы компоненты тензора N удовлетворяли следующим условиям: $N_{ij}N_{mn}=0$ при $i=j$, $m \neq n$; $N_{ij}N_{mn} \neq 0$ при $i=j$, $m=n$ и $N_{ij}N_{mn}=0$ при $i \neq j$, $m \neq n$, $i=m$, $j=n$ ($i, j, m, n=1, 2, 3$). Очевидно, что данные условия несовместимы.

Данное противоречие может быть разрешено только следующим образом. Используя ортонормированный базис пространства симметричных тензоров второго ранга, построим ортонормированный базис пространства симметричных тензоров четвертого ранга. Имеем

$$\begin{aligned}\Phi^n &= \Lambda^n \Lambda^n \quad (n=1, 2, \dots, 6); \\ \Phi^m &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Lambda^1 \Lambda^i + \Lambda^i \Lambda^1) \quad (i=2, 3, \dots, 6, \quad m=i+5); \\ \Phi^l &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Lambda^2 \Lambda^i + \Lambda^i \Lambda^2) \quad (i=3, 4, 5, 6, \quad l=i+9); \\ \Phi^u &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Lambda^3 \Lambda^i + \Lambda^i \Lambda^3) \quad (i=4, 5, 6, \quad u=i+12); \\ \Phi^q &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Lambda^4 \Lambda^i + \Lambda^i \Lambda^4) \quad (i=5, 6, \quad q=i+14); \\ \Phi^{21} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Lambda^5 \Lambda^6 + \Lambda^6 \Lambda^5).\end{aligned}$$

Разлагая по этому базису изотропный тензор W_σ , получаем

$$\begin{aligned}W_\sigma &= \sum_{k=1}^{21} (W_\sigma \cdots \Phi^k) \Phi^k = \frac{1}{H} (\Lambda^1 \Lambda^1 + \Lambda^2 \Lambda^2 + \Lambda^3 \Lambda^3) - \\ &\quad - \frac{\eta}{H} [(\Lambda^1 \Lambda^2 + \Lambda^2 \Lambda^1) + (\Lambda^1 \Lambda^3 + \Lambda^3 \Lambda^1) + (\Lambda^2 \Lambda^3 + \Lambda^3 \Lambda^2)] + \frac{1+\eta}{H} (\Lambda^4 \Lambda^4 + \Lambda^5 \Lambda^5 + \Lambda^6 \Lambda^6).\end{aligned}$$

Добавим и вычтем тензор $\frac{\eta}{H} \sum_{i=1}^3 \Lambda^i \Lambda^i$ и после преобразований получим

$$W_\sigma = -\frac{3\eta}{H} I^0 + \frac{1+\eta}{H} \sum_{j=1}^6 \Lambda^j \Lambda^j = S^p - S.$$

Напомним, что

$$\begin{aligned}\frac{1+\eta}{H} &= \frac{E(1+\nu^p) - E^p(1+\nu)}{EE^p} = \frac{G - G^p}{2GG^p}, \\ -\frac{3\eta}{H} &= 3 \frac{E^p \nu - E \nu^p}{EE^p} = \frac{E(1-2\nu^p) - E^p(1-2\nu)}{EE^p} - \frac{E(1+\nu^p) - E^p(1+\nu)}{EE^p} = \frac{K - K^p}{KK^p} - \frac{G - G^p}{2GG^p}, \\ G^p &= \frac{E^p}{2(1+\nu^p)}, \quad K^p = \frac{E^p}{1-2\nu^p}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{1-2\nu},\end{aligned}$$

K , G — объемный модуль и модуль сдвига в области упругости, G^p , K^p — соответствующие инкрементальные (мгновенные) модули в областях упрочнения и разупрочнения.

Для выполнения равенства (9.3) теперь необходимо, чтобы в точке догружения в пространстве напряжений, определяемой некоторым тензором p , выполнялось равенство

$$k_\sigma N_\sigma N_\sigma = k_\sigma^0 N_\sigma^0 N_\sigma^0 + k_\sigma^* \sum_{i=1}^6 N_\sigma^i N_\sigma^i,$$

где $k_\sigma^0 = -\frac{\eta}{H}$, $k_\sigma^* = \frac{1+\eta}{H}$, $N_\sigma^0 = \Lambda$ — единичный тензор второго ранга, $N_\sigma^i = \Lambda^i$. С геометрической точки зрения N_σ^0 — это внешняя нормаль к плоскости $f_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} -$

$-\sum_{n=1}^3 (p \cdot \Lambda^n) = 0, \quad N_{\sigma}^j \quad (j=1, 2, 3) \text{ — внешние нормали к плоскостям } f_j = \sigma_{jj} - (p \cdot \Lambda^j) = 0,$
 а $N_{\sigma}^4, N_{\sigma}^5, N_{\sigma}^6$ — внешние нормали соответственно к плоскостям $f_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{12} - \frac{1}{\sqrt{2}} (p \cdot \Lambda^4) = 0,$
 $f_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{13} - \frac{1}{\sqrt{2}} (p \cdot \Lambda^5) = 0, \quad f_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{23} - (p \cdot \Lambda^6) = 0 \quad (\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}).$ Отметим, что f_0 — плоскость, равнонаклоненная к осям, по которым откладываются значения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$.

Таким образом, вспоминая формулы (2.8) и (9.1), получаем, что тензор $d\varepsilon^p$ является суммой семи тензоров. Точка догужения является угловой точкой на поверхности нагружения, образованной пересечением семи плоскостей $f_0, f_i \quad (i=1, \dots, 6)$, а вектор $d\varepsilon^p$ есть сумма семи векторов, ортогональных данным плоскостям, и он должен быть расположен внутри пирамидального конуса, образованного нормальными, восстановленными в угловой точке к каждой плоскости f_i .

Аналогично равенство (9.4) при сохранении материалом изотропности выполняется тогда, когда тензор R разлагается на сумму

$$R = \left[(K - K^p) - 2(G - G^p) \right] I^0 + 2(G - G^p) \sum_{j=1}^6 \Lambda^j \Lambda^j,$$

а тензор $k_{\varepsilon} N_{\varepsilon} N_{\varepsilon}$ представляется суммой

$$k_{\varepsilon} N_{\varepsilon} N_{\varepsilon} = k_{\varepsilon}^0 N_{\varepsilon}^0 N_{\varepsilon}^0 + k_{\varepsilon}^* \sum_{i=1}^6 N_{\varepsilon}^i N_{\varepsilon}^i,$$

где $N_{\varepsilon}^0 = \Lambda, \quad N_{\varepsilon}^i = \Lambda^i, \quad k_{\varepsilon}^0 = \left[(K - K^p) - 2(G - G^p) \right] / 3, \quad k_{\varepsilon}^* = 2(G - G^p)$. С геометрической точки

зрения N_{ε}^0 — это внешняя нормаль к плоскости $\Phi_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - \sum_{n=1}^3 (e \cdot \Lambda^n) = 0$; N_{ε}^j
 $(j=1, 2, 3)$ — внешние нормали к плоскостям $\Phi_j = \varepsilon_{jj} - (e \cdot \Lambda^j) = 0$; а $N_{\varepsilon}^4, N_{\varepsilon}^5, N_{\varepsilon}^6$ — внешние нормали соответственно к плоскостям $\Phi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{12} - \frac{1}{\sqrt{2}} (e \cdot \Lambda^4) = 0, \quad \Phi_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{13} - \frac{1}{\sqrt{2}} (e \cdot \Lambda^5) = 0,$
 $\Phi_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{23} - (e \cdot \Lambda^6) = 0 \quad (\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}).$ Здесь e — тензор деформаций, отвечающий точке догужения на предельной поверхности в пространстве деформаций.

Таким образом, вспоминая формулу (9.2), можно утверждать, что тензор $d\sigma^p$ является суммой семи тензоров. Точка догужения является угловой точкой на предельной поверхности, образованной пересечением семи плоскостей $\Phi_0, \Phi_i \quad (i=1, 2, \dots, 6)$, а вектор $d\sigma^p$ есть сумма семи векторов, ортогональных данным плоскостям, и он должен быть расположен внутри пирамидального конуса, образованного нормальными, восстановленными в угловой точке к плоскости Φ_i .

Отметим, что данные выводы согласуются с экспериментальными результатами, приведенными в работе [13].

П р и м е ч а н и е 9.1. Так как упругие свойства материала не изменяются, то при разгрузке предельная поверхность восстанавливает свою регулярность [13] и приобретает форму начальной поверхности с соответствующими изменениями, связанными с характером упрочнения или разупрочнения (изотропным или трансляционным).

10. Основные результаты.

1. Инкрементальный закон пластичности:

$$d\varepsilon^p = (I - S \cdot C^p) \cdot d\varepsilon, \quad d\varepsilon^p = (S^p - S) \cdot d\sigma;$$

$W_{\varepsilon} = (I - S \cdot C^p)$ — первый инкрементальный тензор пластичности;

$W_{\sigma} = (S^p - S)$ — второй инкрементальный тензор пластичности.

2. Основные инкрементальные соотношения:

$$d\sigma = C^p \cdot d\varepsilon, \quad d\varepsilon = S^p \cdot d\sigma, \quad d\sigma = D \cdot d\varepsilon^p,$$

$$d\varepsilon^p = W_\sigma \cdot d\sigma, d\sigma^p = (C - C^p) \cdot d\varepsilon = R \cdot d\varepsilon, d\sigma^p = C \cdot d\varepsilon^p,$$

C^p, S^p, D, R — соответственно симметричные тензоры четвертого ранга инкрементальных модулей упругости и податливости ($S^p = (C^p)^{-1}$), упрочнения – разупрочнения ($D = W_\sigma^{-1}$), релаксации.

3. Тензоры D, W_σ, C^p, S^p — положительно определенные на стадии упрочнения. Если материал сохраняет изотропность, то эти тензоры на стадии разупрочнения отрицательно определенные.

4. Тензор релаксации R — положительно определенный на всех стадиях деформирования.

5. Тензор W_ε — положительно определенный для изотропного материала.

6. Условием перехода со стадии упрочнения на стадию разупрочнения является вырождение тензоров C^p, S^p, W_σ, D .

7. Если свойства материала характеризуются гладкими предельными поверхностями, то вектор $d\varepsilon^p$ ортогонален к поверхности нагружения в пространстве напряжений, а вектор $d\sigma^p$ ортогонален к предельной поверхности в пространстве деформаций на всех стадиях деформирования, включая разупрочнение.

8. В пространстве деформаций нагрузке отвечает неравенство $N_\varepsilon \cdot d\varepsilon > 0$, где $N_\varepsilon = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varepsilon_{ij}}$, разгрузке — $N_\varepsilon \cdot d\varepsilon < 0$, нейтральному нагружению — равенство $N_\varepsilon \cdot d\varepsilon = 0$.

9. В пространстве напряжений нейтральному нагружению отвечает равенство $N_\sigma \cdot d\sigma = 0$ ($N_\sigma = \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}}$), нагрузке в области упрочнения — неравенство $N_\sigma \cdot d\sigma > 0$, в области разупрочнения — неравенства $N_\sigma \cdot d\sigma < 0, N_\sigma \cdot d\sigma^m = N_\sigma \cdot (C \cdot d\varepsilon) > 0$, разгрузке — неравенства $N_\sigma \cdot d\sigma < 0, N_\sigma \cdot d\sigma^m < 0$.

10. Признаки разрушения: $dg = 0$ и $\sigma = 0$; $d\sigma^m = d\sigma^p, d\sigma = 0, d\varepsilon = d\varepsilon^p$.

11. Если предельные поверхности сохраняют гладкость при деформировании, то материал становится инкрементально анизотропным. Тензор W_σ на стадии разупрочнения отрицательно определенный.

12. При сохранении материалом изотропности на предельной поверхности появляется угловая точка, образованная пересечением семи плоскостей в шестимерных пространствах напряжений и деформаций, а векторы $d\varepsilon^p$ и $d\sigma^p$ являются суммами семи векторов, перпендикулярных соответствующим плоскостям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Стружанов В. В. Уругопластическая среда с разупрочнением. Сообщение 1. Свойства материала и инкрементальный закон пластичности при растяжении // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер: «Физ.-мат. науки», 2006. — № 42. — С. 49–61.
2. Ильюшин А. А. Об основах общей математической теории пластичности / В кн.: Вопросы теории пластичности. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 3–29.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 271 с.
4. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
5. Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и её применения. — М.: Мир, 1988. — 344 с.
6. Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 940 с.
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. — М.: Наука, 1970. — 568 с.
8. Стружанов В. В., Миронов В. И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995. — 192 с.
9. Стружанов В. В. Ассоциированный и инкрементальный законы пластического течения для сред, проявляющих деформационное разупрочнение // Изв. Урал. гос. ун-та, 1999. — № 14. (сер. Математика и механика. Вып. 2). — С. 119–134.
10. Белман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: — Мир, 1989. — 655 с.
12. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. — М.: Наука, 1971. — 232 с.
13. Шевченко Ю. Н. К построению поверхности нагружения в теории пластичности // Прикладная механика, 1996. — Т. 32, № 11. — С. 31–37.

Поступила 11.09.2006 г.