Общероссийский математический портал

А. И. Хромов, Е. П. Кочеров, А. Л. Григорьева, Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформаций несжимаемого жесткопластического тела, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu456>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:49:13

А. И. Хромов, Е. П. Кочеров, А. Л. Григорьева

ПОВЕРХНОСТЬ НАГРУЖЕНИЯ, СВЯЗАННАЯ С ЛИНИЯМИ УРОВНЯ ПОВЕРХНОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ НЕСЖИМАЕМОГО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Одной из проблем формулировки критериев разрушения пластических тел является зависимость разрушения как от деформированного состояния, так и диссипации энергии, произведенной элементом материала в процессе деформирования. Связь этих параметров зависит от формулировки условия пластичности и пути деформирования. Ниже предлагается введение поверхности нагружения, связанной с деформационными состояниями несжимаемого жесткопластического тела, позволяющей выделить диссипацию энергии как параметр, определяющий разрушение.

1. Основные соотношения. В качестве меры деформаций будем использовать тензоры деформаций Коши C_{ij} и Альманси E_{ij} :

$$C_{ij} = H_{ki}H_{kj}, \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - C_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

где $H_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$; X_i, x_j — лагранжевы и эйлеровы координаты частицы, соответственно. Запишем ассоциированный закон течения:

$$\epsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda > 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

и соотношения:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}),$$

где $f(\sigma_{ij}, E_{ij})$ — функция нагружения; $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}$ — тензоры напряжений и скоростей деформаций; V_i — вектор скорости перемещений.

Будем рассматривать жесткопластическое тело [1] при условии пластичности, удовлетворяющее условию несжимаемости.

Тензоры E_{ij} и ϵ_{ij} связаны соотношением

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial E_{ij}}{\partial x_k} V_k + E_{ik} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} + E_{jk} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} = \epsilon_{ij}. \quad (1.3)$$

2. Деформационные состояния несжимаемого жесткопластического тела. Условие несжимаемости можно записать в различных формах, в частности

$$\begin{aligned} \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 &= 0; \\ C_1 C_2 C_3 &= 1, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \quad C_3 > 0; \\ (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) &= 1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

которые определяют в пространстве E_i гиперболическую поверхность третьего порядка $\mathcal{C}$ (рис. 1). Точка O изображает исходное недеформированное состояние.

Рассмотрим проекцию поверхности $\mathcal{C}$ на девиаторную плоскость с нормалью $\mathbf{n}$ (рис. 2), на которой представлены проекции линий пересечения поверхности $\mathcal{C}$ с плоскостью, параллельной девиаторной плоскости, расположенной на расстоянии $\frac{h}{\sqrt{3}}$ до начала координат,

$$h = (E_1 + E_2 + E_3), \quad (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1. \quad (2.2)$$

3. Простые процессы деформирования. Рассмотрим поле скоростей вида

$$V_1 = x_1 \epsilon_1(t), \quad V_2 = x_2 \epsilon_2(t), \quad V_3 = x_3 \epsilon_3(t), \quad (3.1)$$

где $\epsilon_i(t)$ — главные значения тензора скоростей деформации

Р и с. 1. Поверхность деформационных состояний несжимаемого жесткопластического тела

Р и с. 2. Линии уровня поверхности деформационных состояний

ций являются функциями времени t .

В атермической теории пластичности масштаб времени не определен и, вообще говоря, он может изменяться в процессе деформирования, в частности из трех функций $\varepsilon_i(t)$ одну можно задать произвольно, например $\varepsilon_1(t) \equiv 1$. В этом случае из (2.1) следует

$$\varepsilon_1(t) = 1, \quad \varepsilon_2 = -1 - \varepsilon_3(t). \quad (3.2)$$

При сделанном выборе ($\varepsilon_1(t) \equiv 1$) только одна функция $\varepsilon_3(t)$ определяет простой процесс деформирования в пространстве E_i .

Пусть деформационный процесс начинается из недеформированного состояния (точка O рис. 1, 2). Система уравнений (1.4) при условии (3.1) и начальных условиях $E_{ij}|_{t=0} = 0$ имеет решения:

$$E_i = \frac{1}{2}(1 - \exp \tau_i(t)) \quad i = 1, 2, 3, \quad E_{12} = E_{13} = E_{23} \equiv 0, \quad \tau_i(t) = -2 \int_0^t \varepsilon_i(t) dt. \quad (3.3)$$

4. Ортогональные процессы деформирования. Будем изображать простые деформационные процессы кривыми l на девиаторной плоскости (рис. 2). В качестве параметра процесса (времени) выберем величину

$$h = E_1 + E_2 + E_3, \quad E_i = E_i(h). \quad (4.1)$$

При замене t на h из (3.3) следует уравнение

$$h = \frac{1}{2} \left(3 - e^{\tau_1(h)} - e^{\tau_2(h)} - e^{\tau_3(h)} \right), \quad \tau_i = -2 \int_0^h \varepsilon_i(h) dh \quad (4.2)$$

Рассмотрим простые процессы деформирования, для которых вектор главных значений тензора скоростей деформаций ε_i ортогонален проекциям линий (2.2) на девиаторную плоскость, которые являются линиями уровня для функции $h = E_1 + E_2 + E_3$.

Для этих процессов величины ε_i связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 &= 0; \\ \varepsilon_1(1 - 2E_1) + \varepsilon_2(1 - 2E_2) + \varepsilon_3(1 - 2E_3) &= 1; \\ \varepsilon_1(1 - 2E_1)(E_2 - E_3) + \varepsilon_2(1 - 2E_2)(E_3 - E_1) + \varepsilon_3(1 - 2E_3)(E_1 - E_2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь первое уравнение отображает несжимаемость, второе уравнение следует из (4.2) после дифференцирования его по времени h , третье уравнение следует из условия ортогональности процесса деформирования проекциям линий (2.2) на девиаторную плоскость.

Введем новый параметр процесса t . Выполняя замену переменной $h = h(t)$ в (4.2) и дифференцируя по t , получим уравнение

$$\varepsilon_1(1 - 2E_1)h' + \varepsilon_2(1 - 2E_2)h' + \varepsilon_3(1 - 2E_3)h' = h'. \quad (4.4)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по времени t . При этом второе уравнение в системе (4.3) можно записать в виде

$$\frac{\varepsilon_1}{h'}(1 - 2E_1)h' + \frac{\varepsilon_2}{h'}(1 - 2E_2)h' + \frac{\varepsilon_3}{h'}(1 - 2E_3)h' = 1. \quad (4.5)$$

Положим, что деформации и напряженное состояние связаны с функцией $h(t)$ соотношениями

$$\sigma_i = (1 - 2E_i)h', \quad \varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i}{h'}. \quad (4.6)$$

Уравнения (4.3) при условии (4.6) примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^* &= 0; \\ \varepsilon_1^* \sigma_1 + \varepsilon_2^* \sigma_2 + \varepsilon_3^* \sigma_3 &= 1; \\ \varepsilon_1^* \sigma_1(\sigma_2 - \sigma_3) + \varepsilon_2^* \sigma_2(\sigma_3 - \sigma_1) + \varepsilon_3^* \sigma_3(\sigma_1 - \sigma_2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Уравнения (4.7) приводят к заданию цилиндрической поверхности нагружения с направляющей линией в девиаторной плоскости, совпадающей с проекциями линий (2.2) и образующей, параллельной $\mathbf{n}$ с параметром упрочнения $h = E_1 + E_2 + E_3$. В этом случае первое и третье уравнения (4.7) следуют из ассоциированного закона течения (1.2) для всех процессов деформирования несжимаемого жесткопластического тела. Второе уравнение (4.7) будет выполняться

ся для всех процессов деформирования, если за параметр процесса (время) принять диссипацию энергии.

Данная поверхность нагружения обладает следующими свойствами:

1) при деформировании материала по любому простому ортогональному процессу из точки O до уровня деформаций $h = E_1 + E_2 + E_3$, частицей совершается одна и та же удельная диссипация энергии $D_0 = \int_{l_0^h} \epsilon_i \sigma_i dl$;

2) при деформировании по пути, отличному от простого ортогонального процесса деформирования, требуется большая диссипация энергии; это свойство непосредственно следует из того, что кривая L_0 на поверхности $\mathcal{C}$, соответствующая ортогональному процессу l_0 , является линией наискорейшего спуска из точки O .

Для любого конструкционного материала поверхность нагружения может быть определена из стандартного эксперимента на одноосное растяжение по зависимости предела текучести от h ($\sigma_T = \sigma_T(h)$). Соотношения (4.6) определяют величину h' .

5. Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформаций. Для упрощения записи уравнения (2.2) запишем его в компонентах тензора Коши:

$$H = \frac{1}{\sqrt{3}}(C_1 + C_2 + C_3), \quad C_1 C_2 C_3 = 1, \quad C_i = 1 - 2E_i. \quad (5.1)$$

Введем новую систему координат, связанную с девиаторной плоскостью и нормалью к ней преобразованием

$$H = \frac{1}{\sqrt{3}}C_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}C_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}C_3, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}C_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}C_2, \quad y = -\frac{1}{\sqrt{6}}C_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}C_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}C_3.$$

В девиаторной плоскости уравнения (5.1) определяют линии уровня для функции H :

$$2x^3 - 6xy^2 - 3\sqrt{2}Hx^2 - 3\sqrt{2}Hy^2 + 2\sqrt{2}H^3 - 6\sqrt{6} = 0 \quad (5.2)$$

или в полярной системе координат ($x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$) —

$$2\rho^3 \cos 3\phi - 3\sqrt{2}H\rho^2 + 2\sqrt{2}H^3 - 6\sqrt{6} = 0. \quad (5.3)$$

Уравнения (5.2) и (5.3) определяют цилиндрическую поверхность нагружения после замены согласно (4.6) в виде $f(\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2 - \sigma_3, H) = 0$, где $x = \frac{-1}{\sqrt{2}h'}(\sigma_1 - \sigma_2)$, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{6}h'}(\sigma_2 - \sigma_3)$, $H = \frac{-2}{\sqrt{3}}(E_1 + E_2 + E_3) + \sqrt{3}$.

На рис. 3 представлены кривые (5.2) и (5.3) при различных значениях H , которые показывают, что при малых значениях H они мало отличаются от окружности. Кривая 1 — при $H = \sqrt{3} + 10^{-5}$; кривая 2 — при $H = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$; кривая 3 — при $H = \sqrt{3} + \frac{3}{2}$. При увеличении H пределы текучести на растяжение и сжатие становятся существенно различными. На рис. 4 представлено сечение поверхности $\mathcal{C}$ плоскостью, проходящей через ось C_1 и n , которое характеризует соотношения пределов текучести на растяжение и сжатие (σ_T^P, σ_T^C). Можно показать, что $\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\sigma_T^P}{\sigma_T^C} = 2$, $\lim_{H \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sigma_T^P}{\sigma_T^C} = 1$.

6. Условия разрушения. Стандартные экспериментальные исследования по растяжению плоских, цилиндрических и других образцов показывают, что разрушения материалов происходит при определенных деформациях E_i^* . При этом экспериментально определяемые характеристики разрушения (δ , ψ — относительное удлинение и сужение образца при разрушении) могут служить основой для вычисления соответствующих значений E_i^* (см. [5]). Эти эксперименты определяют минимальную систему точек на поверхности $\mathcal{C}$, которая может быть аппроксимирована некоторой критической кривой.

Вместе с тем из опыта известно, что даже при небольших циклически изменяющихся пластических деформациях происходит разрушение практически всех материалов, что связано, прежде всего, с диссипацией энергии $D = \int \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dt$. Поэтому уравнение критической кривой можно записать в виде

$$\begin{cases} \Phi(E_1, E_2, E_3, D) = 0, \\ (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1. \end{cases} \quad (6.1)$$

Р и с. 3: Кривая нагружения, связанная с линиями уровня

Р и с. 4. Сечение поверхности деформационных состояний плоскостью симметрии, проходящей через ось C_1 и n

Это позволяет постулировать: при пересечении кривой, соответствующей процессу деформирования критической линии (6.1) происходит разрушение материала.

В качестве аппроксимирующих кривых естественный интерес представляют линии (2.2), так как эти линии всегда пересекаются ортогональными процессами деформирования и, в частности, кривыми, соответствующими стандартным испытаниям на одноосное растяжение–сжатие. Поэтому положение критической кривой (2.2) может быть определено экспериментально для каждого конструкционного материала.

Если предположить, что механические свойства материала соответствуют поверхности нагружения п.5, и второй и третий инварианты тензора деформации Альманси мало влияют на разрушение материала, то уравнения критической линии (6.1) можно записать в виде

$$\begin{cases} E_1 + E_2 + E_3 = h(D); \\ (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1. \end{cases} \quad (6.2)$$

Критическая линия в виде (6.2) совпадает с линией максимально возможного упрочнения материала, которая определяется величиной $h_{\max} = h(D_0^{\max})$, где D_0 — диссипация энергии при ортогональном процессе деформирования. Естественно предположить, что дополнительная диссипация энергии, производимая элементом объема материала при неортогональном деформировании, снижает способность материала к упрочнению. Это влияние может зависеть от уровня деформаций (величины h). Уравнения (6.1), (6.2) означают, что критическая линия уровня, определяющая момент разрушения каждой частицы, приближается к недеформированному состоянию в процессе пластического деформирования соответственно диссипации

энергии. Функция $h(D)$ должна определяться экспериментально.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. — Владивосток: Дальнаука, 1998. — 529 с.
2. Кочеров Е. П., Хромов А. И. Деформационные состояния и разрушения идеальных жесткопластических тел // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ.-мат. науки», 2006. — № 42. — С. 66–72.
3. Хромов А. И. Разрушение жесткопластических тел, константы разрушения // Известия РАН. МТТ, 2005. — № 3. — С. 137–152.

Поступила 5.07.2006 г.

УДК 539.3

В. П. Федотов, Л. Ф. Сневак

К АНАЛИТИЧЕСКОМУ ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ В ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Получены формулы аналитического интегрирования компонентов функций влияния по произвольному отрезку прямой и произвольной дуге окружности. Формулы являются одной из ключевых частей численно-аналитического алгоритма параллельного действия для решения плоских задач деформирования.

Введение. Для решения краевых задач математической физики авторами был предложен численно-аналитический метод решения [1–3], основанный на методе граничных элементов [4, 5]. Метод позволяет построить алгоритмы решения, которые сочетают в себе преимущества