Общероссийский математический портал

В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак, К аналитическому вычислению интегралов в численно-аналитическом методе решения задач деформирования, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 91–98

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu457>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:48:48

Р и с. 3: Кривая нагружения, связанная с линиями уровня

Р и с. 4. Сечение поверхности деформационных состояний плоскостью симметрии, проходящей через ось C_1 и n

Это позволяет постулировать: при пересечении кривой, соответствующей процессу деформирования критической линии (6.1) происходит разрушение материала.

В качестве аппроксимирующих кривых естественный интерес представляют линии (2.2), так как эти линии всегда пересекаются ортогональными процессами деформирования и, в частности, кривыми, соответствующими стандартным испытаниям на одноосное растяжение–сжатие. Поэтому положение критической кривой (2.2) может быть определено экспериментально для каждого конструкционного материала.

Если предположить, что механические свойства материала соответствуют поверхности нагружения п.5, и второй и третий инварианты тензора деформации Альманси мало влияют на разрушение материала, то уравнения критической линии (6.1) можно записать в виде

$$\begin{cases} E_1 + E_2 + E_3 = h(D); \\ (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1. \end{cases} \quad (6.2)$$

Критическая линия в виде (6.2) совпадает с линией максимально возможного упрочнения материала, которая определяется величиной $h_{\max} = h(D_0^{\max})$, где D_0 — диссипация энергии при ортогональном процессе деформирования. Естественно предположить, что дополнительная диссипация энергии, производимая элементом объема материала при неортогональном деформировании, снижает способность материала к упрочнению. Это влияние может зависеть от уровня деформаций (величины h). Уравнения (6.1), (6.2) означают, что критическая линия уровня, определяющая момент разрушения каждой частицы, приближается к недеформированному состоянию в процессе пластического деформирования соответственно диссипации

энергии. Функция $h(D)$ должна определяться экспериментально.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. — Владивосток: Дальнаука, 1998. — 529 с.
2. Кочеров Е. П., Хромов А. И. Деформационные состояния и разрушения идеальных жесткопластических тел // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ.-мат. науки», 2006. — № 42. — С. 66–72.
3. Хромов А. И. Разрушение жесткопластических тел, константы разрушения // Известия РАН. МТТ, 2005. — № 3. — С. 137–152.

Поступила 5.07.2006 г.

УДК 539.3

В. П. Федотов, Л. Ф. Сневак

К АНАЛИТИЧЕСКОМУ ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ В ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Получены формулы аналитического интегрирования компонент функций влияния по произвольному отрезку прямой и произвольной дуге окружности. Формулы являются одной из ключевых частей численно-аналитического алгоритма параллельного действия для решения плоских задач деформирования.

Введение. Для решения краевых задач математической физики авторами был предложен численно-аналитический метод решения [1–3], основанный на методе граничных элементов [4, 5]. Метод позволяет построить алгоритмы решения, которые сочетают в себе преимущества

параллельных вычислений перед последовательными и аналитических расчетов перед численными.

1. Алгоритм решения упругой задачи. Задача теории упругости для плоской области D состоит в нахождении вектора перемещений u_i , тензора деформаций ε_{ij} и тензора напряжений σ_{ij} , которые удовлетворяют в этой области системе уравнений

$$\sigma_{ij,i} = b_j; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}); \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (3)$$

и заданным граничным условиям

$$\text{на поверхности } S_f: \quad \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 = f_1 = f_1^*, \quad \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 = f_2 = f_2^*,$$

$$\text{на поверхности } S_u: \quad u_1 = u_1^*, \quad u_2 = u_2^*. \quad (4)$$

Здесь b_i — известные объемные силы (здесь и далее по повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до 2); $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$; μ — модуль упругости при сдвиге; ν — коэффициент Пуассона; δ_{ij} — единичный тензор; n_i — вектор нормали к поверхности. Обратная к (3) зависимость будет иметь вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right). \quad (5)$$

Согласно методу граничных элементов [4, 5] решение системы (1)–(4) можно выразить через поверхностные перемещения $u_i(x)$ и поверхностные напряжения $f_i(x)$:

$$u_i(\xi) = \int_{S_f} \left[u_{ij}^*(\xi, x) f_j^*(x) - f_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) \right] dS(x) + \int_{S_u} \left[u_{ij}^*(\xi, x) f_j(x) - f_{ij}^*(\xi, x) u_j^*(x) \right] dS(x). \quad (6)$$

Здесь $x \in S$ — граничная точка области; ξ — внутренняя точка области; звездочкой (*) обозначены известные из граничных условий для группы поверхностей S_u перемещения $u_j^*(x)$ и для группы поверхностей S_f поверхностные напряжения $f_j^*(x)$. Функции влияния $u_{ij}^*(\xi, x)$ и $f_{ij}^*(\xi, x)$ для двумерной задачи имеют вид

$$u_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} \left[(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - \Delta_i r \Delta_j r \right]; \quad (7)$$

$$f_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2\Delta_i r \Delta_j r \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) (\Delta_i r m_j - \Delta_j r m_i) \right\}, \quad (8)$$

где $r = r(x, \xi)$ — расстояние между точками x и ξ ; $\Delta_i r = \frac{\partial r}{\partial x_i}$.

Для произвольной точки x_0 гладкой границы граничное интегральное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_i(x_0) = & \int_{S_f} \left[u_{ij}^*(x_0, x) f_j^*(x) - f_{ij}^*(x_0, x) u_j(x) \right] dS(x) + \\ & + \int_{S_u} \left[u_{ij}^*(x_0, x) f_j(x) - f_{ij}^*(x_0, x) u_j^*(x) \right] dS(x). \end{aligned} \quad (9)$$

Это уравнение используется для определения неизвестных поверхностных перемещений $u_j(x)$ и поверхностных напряжений $f_j(x)$. Разбив границу области на элементы, мы приходим к численной схеме, в основе которой лежит граничный элемент (отрезок прямой либо дуга окружности) и произвольная точка, на которую оказывают влияние напряжения и перемещения, действующие на этом элементе. Если сделать разбиение поверхности деформируемой области достаточно мелким, то все поверхностные перемещения и напряжения, включая неизвестные, можно считать постоянными на элементе и помещенными в его середину. В этом приближении, записав уравнение (9) для середины каждого граничного элемента, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i^{(\beta)} = & \sum_{\alpha=1}^N f_j^{(\alpha)*} \int_{S_f^{(\alpha)}} u_{ij}^*(x^{(\beta)}, x) dS(x) - \sum_{\alpha=1}^N u_j^{(\alpha)} \int_{S_f^{(\alpha)}} f_{ij}^*(x^{(\beta)}, x) dS(x) + \\ & + \sum_{\alpha=N+1}^{N+M} f_j^{(\alpha)} \int_{S_u^{(\alpha)}} u_{ij}^*(x^{(\beta)}, x) dS(x) - \sum_{\alpha=N+1}^{N+M} u_j^{(\alpha)*} \int_{S_u^{(\alpha)}} f_{ij}^*(x^{(\beta)}, x) dS(x), \\ & i = 1, 2, \beta = 1 \dots M + N. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь M и N — количество элементов на каждой из групп поверхностей. Соотношения (10) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $u_j^{(\alpha)}$ и $f_j^{(\alpha)}$.

Коэффициентами системы являются интегралы $\int_{S_{u,f}^{(\alpha)}} u_{ij}^*(x^{(\beta)}, x) dS(x)$ и $\int_{S_{u,f}^{(\alpha)}} f_{ij}^*(x^{(\beta)}, x) dS(x)$ от

компонентов функций u_{ij}^* и f_{ij}^* по граничным элементам для точек влияния, помещенных в узловые точки $x^{(\beta)}$. В следующих пунктах приведены формулы для вычисления таких интегралов по произвольному отрезку прямой и произвольной дуге окружности для произвольной точки влияния.

2. Аналитическое вычисление интегралов по отрезку прямой. Для упрощения процедуры вычисления необходимых интегралов поставим в соответствие расчетному блоку из произвольного граничного элемента и произвольной точки влияния блок из специального элемента и соответствующей точки влияния таким образом, чтобы интегралы для двух блоков были связаны.

Рассмотрим на плоскости отрезок AB , где $A(A_1, A_2)$ и $B(B_1, B_2)$ — произвольные точки, и точку влияния $\xi(\xi_1, \xi_2)$ (рис. 1). Действующие на

Р и с 1. Преобразование координат

отрезке AB перемещения $u = (u_1, u_2)$ и поверхностные напряжения $f = (f_1, f_2)$ вызывают в точке ξ некоторое перемещение $u(\xi) = (u_1(\xi), u_2(\xi))$. Осуществим преобразование координат, сохраняющее расстояния, и отображающее точку A в начало координат $O(0,0)$, а точку B — в точку $C(L,0)$, где $L = \sqrt{(B_1 - A_1)^2 + (B_2 - A_2)^2}$ — длина отрезка AB . Такое преобразование является комбинацией параллельного переноса и поворота на угол ϕ (см. рис. 1). Произвольная точка $x(x_1, x_2)$ на плоскости отображается в точку $\bar{x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, связанную с ней соотношениями

$$x = K\bar{x} + A; \quad \bar{x} = K^{-1}(x - A), \quad (11)$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, K — матрица поворота:

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad K^{-1} = K^T, \quad (12)$$

$$k_{11} = k_{22} = \frac{B_1 - A_1}{L} = \cos \phi, \quad k_{12} = -k_{21} = -\frac{B_2 - A_2}{L} = -\sin \phi.$$

Здесь и далее во всех соотношениях одномерные массивы трактуются как матрицы–столбцы. Произвольный вектор $w = (w_1, w_2)$ на плоскости отображается в вектор $\bar{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$:

$$w = K\bar{w}, \quad \bar{w} = K^{-1}w. \quad (13)$$

Очевидно, что такое преобразование является жестким перемещением исследуемой системы объектов как единого целого, и не меняет сути упругого взаимодействия. Это означает, что ес-

ли на отрезке OC действуют перемещения $\bar{u} = K^{-1}u$ и поверхностные напряжения $\bar{f} = K^{-1}f$, то они вызовут в точке $\bar{\xi} = K^{-1}(\xi - A)$ перемещения

$$u(\bar{\xi}) = K^{-1}u(\xi). \quad (14)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} I(u_{ij}^*) &= \int_{AB} u_{ij}^*(\xi, x) dS(x); \quad I(f_{ij}^*) = \int_{AB} f_{ij}^*(\xi, x) dS(x); \\ \bar{I}(u_{ij}^*) &= \int_{OC} u_{ij}^*(\bar{\xi}, x) dS(x); \quad \bar{I}(f_{ij}^*) = \int_{OC} f_{ij}^*(\bar{\xi}, x) dS(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Используя соотношение (14) и выражение (6) для перемещений точек ξ и $\bar{\xi}$, можно установить следующую связь между интегралами от компонентов функций $u^*(\xi, x)$ и $f^*(\xi, x)$ вдоль отрезка AB и интегралами от компонентов функций $u^*(\bar{\xi}, x)$ и $f^*(\bar{\xi}, x)$ вдоль отрезка OC :

$$\begin{aligned} I(u_{11}^*) &= r_1 \bar{I}(u_{11}^*) + 2r_2 \bar{I}(u_{12}^*) + r_3 \bar{I}(u_{22}^*); \quad I(u_{12}^*) = I(u_{21}^*) = r_2 (\bar{I}(u_{22}^*) - \bar{I}(u_{11}^*)) + (r_1 - r_3) \bar{I}(u_{12}^*); \\ I(u_{22}^*) &= r_3 \bar{I}(u_{11}^*) - 2r_2 \bar{I}(u_{12}^*) + r_1 \bar{I}(u_{22}^*); \quad I(f_{11}^*) = r_1 \bar{I}(f_{11}^*) + r_2 (\bar{I}(f_{12}^*) + \bar{I}(f_{21}^*)) + r_3 \bar{I}(f_{22}^*); \\ I(f_{12}^*) &= r_2 (\bar{I}(f_{22}^*) - \bar{I}(f_{11}^*)) + r_1 \bar{I}(f_{12}^*) - r_3 \bar{I}(f_{21}^*); \\ I(f_{21}^*) &= r_2 (\bar{I}(f_{22}^*) - \bar{I}(f_{11}^*)) - r_3 \bar{I}(f_{12}^*) + r_1 \bar{I}(f_{21}^*); \\ I(f_{22}^*) &= r_3 \bar{I}(u_{11}^*) - r_2 (\bar{I}(f_{12}^*) + \bar{I}(f_{21}^*)) + r_1 \bar{I}(u_{22}^*), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= k_{11}^2 = k_{22}^2 = k_{11}k_{22} = \cos^2 \varphi; \\ r_2 &= k_{11}k_{12} = -k_{11}k_{21} = k_{12}k_{22} = -k_{21}k_{22} = -\frac{1}{2} \sin 2\varphi; \\ r_3 &= -k_{12}k_{21} = k_{12}^2 = k_{21}^2 = \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, мы получили, что для вычисления интегралов по произвольному отрезку AB для точки влияния ξ достаточно построить матрицу K (12), определить через соотношение (11) точку $\bar{\xi}$ и вычислить интегралы по отрезку OC , что является более простой задачей. Для вычисления интегралов $\bar{I}(u_{ij}^*)$ и $\bar{I}(f_{ij}^*)$ для произвольной длины отрезка L и произвольной точки влияния $\bar{\xi}$ получены простые аналитические формулы, которые приведены ниже:

$$\begin{aligned} \bar{I}(u_{11}^*) &= c_1 \left((c_2 + 1)(\bar{\xi}_2 Q_3 - L) + \frac{c_2}{2}(LQ_1 + \bar{\xi}_1 Q_2) \right); \\ \bar{I}(u_{12}^*) &= -\frac{1}{2} c_1 \bar{\xi}_2 Q_2; \quad \bar{I}(u_{22}^*) = c_1 \left((c_2 - 1)\bar{\xi}_2 Q_3 + c_2 \left(\frac{1}{2}(LQ_1 + \bar{\xi}_1 Q_2) - L \right) \right); \\ \bar{I}(f_{11}^*) &= c_3 ((c_4 + 1)Q_3 + \bar{\xi}_2 d_1), \quad \bar{I}(f_{12}^*) = c_3 \left(-\frac{1}{2} c_4 Q_2 - \bar{\xi}_2 d_2 \right); \\ \bar{I}(f_{21}^*) &= c_3 \left(\frac{1}{2} c_4 Q_2 - \bar{\xi}_2 d_2 \right), \quad \bar{I}(f_{22}^*) = c_3 ((c_4 + 1)Q_3 - \bar{\xi}_2 d_1), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}, \quad c_2 = 3-4\nu, \quad c_3 = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)}, \quad c_4 = 1-2\nu; \\ Q_1 &= \ln \left((\bar{\xi}_1 - L)^2 + \bar{\xi}_2^2 \right), \quad Q_2 = \ln \left(\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 \right) - \ln \left((\bar{\xi}_1 - L)^2 + \bar{\xi}_2^2 \right), \\ Q_3 &= \arctg \left(\frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\xi}_2} \right) - \arctg \left(\frac{\bar{\xi}_1 - L}{\bar{\xi}_2} \right); \end{aligned}$$

$$d_1 = \frac{\bar{\xi}_1 - L}{(\bar{\xi}_1 - L)^2 + \bar{\xi}_2^2} - \frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2}, \quad d_2 = \bar{\xi}_2 \left(\frac{1}{\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2} - \frac{1}{(\bar{\xi}_1 - L)^2 + \bar{\xi}_2^2} \right). \quad (19)$$

Приведенные формулы не могут быть использованы в случае, если $\bar{\xi}_2 = 0$, то есть, точка влияния ξ лежит на прямой, содержащей отрезок AB . Для этого случая получены следующие специальные формулы:

$$\begin{aligned} \bar{I}(u_{11}^*) &= c_1 \left(c_2 \left(L(Q_1^* - 1) + \bar{\xi}_1 Q_2^* \right) - L \right), \\ \bar{I}(u_{12}^*) &= 0, \quad \bar{I}(u_{22}^*) = c_1 c_2 \left(L(Q_1^* - 1) + \bar{\xi}_1 Q_2^* \right), \\ \bar{I}(f_{11}^*) &= \bar{I}(f_{22}^*) = 0, \quad \bar{I}(f_{12}^*) = -\bar{I}(f_{21}^*) = -c_3 c_4 Q_2^*, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$Q_1^* = \ln |L - \bar{\xi}_1|, \quad Q_2^* = \ln |\bar{\xi}_1| - \ln |L - \bar{\xi}_1|. \quad (21)$$

Что касается неопределенностей при условиях $\bar{\xi}_2 = 0$, $\bar{\xi}_1 = 0$ или $\bar{\xi}_2 = 0$, $\bar{\xi}_1 = L$, соответствующих совпадению точки влияния ξ с одним из концов отрезка AB , то для выбранной аппроксимации они не реализуются, поскольку узловые точки $x^{(B)}$ находятся в серединах элементов.

3. Аналитическое вычисление интегралов по дуге окружности. Рассмотрим произвольно ориентированную дугу окружности M , которая определяется следующими параметрами: $M_c(x_{1c}, x_{2c})$ — центр; R — радиус; φ_a и φ_b ($\varphi_a < \varphi_b$) — полярные углы, соответствующие началу и концу дуги при обходе против часовой стрелки, соответственно (рис. 2).

Р и с. 2. Произвольно ориентированная дуга окружности

Учитывая связь декартовых координат x_1, x_2 с координатами ρ, φ полярной системы с центром M_c

$$x_1 = x_{1c} + \rho \cos \varphi, \quad x_2 = x_{2c} + \rho \sin \varphi, \quad (22)$$

можно свести интегралы от компонентов функций влияния по дуге M к определенным интегралам:

$$\begin{aligned} \int_M u_{ij}^*(\xi, x) dS(x) &= \int_M u_{ij}^*(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2) dS(x) = R \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} u_{ij}^*(\xi_1, \xi_2, x_{1c} + R \cos \varphi, x_{2c} + R \sin \varphi) d\varphi, \\ \int_M f_{ij}^*(\xi, x) dS(x) &= \int_M f_{ij}^*(\xi_1, \xi_2, x_1, x_2) dS(x) = R \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f_{ij}^*(\xi_1, \xi_2, x_{1c} + R \cos \varphi, x_{2c} + R \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (23)$$

Отметим, что интеграл по дуге окружности от функции $\ln(r)$, входящей как слагаемое в диагональные компоненты функции u_{ij}^* , не вычисляется аналитически, поэтому для вычисления интеграла от этого слагаемого использовалось разложение в ряд Тейлора по переменной φ в окрестности точки $\varphi_0 = \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}$, соответствующей середине дуги. Тесты показали, что при величине дуги меньше 10° достаточно учесть отрезок ряда четвертой степени. В этом случае можно принять, что

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \ln \left(\sqrt{(\xi_1 - x_{1c} - R \cos \varphi)^2 + (\xi_2 - x_{2c} - R \sin \varphi)^2} \right) d\varphi = \\ &= \ln(Q_1^0) \frac{(\varphi_b - \varphi_a)}{2} - Q_2^0 \frac{(\varphi_b - \varphi_a)^3}{2} + \left(Q_2^0 \left(1 - 9Q_3^0 - \frac{3Q_4^0}{Q_1^0} \right) + \frac{(Q_3^0)^2 + Q_3^0}{8} \right) \frac{(\varphi_b - \varphi_a)^5}{160}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned}
Q_1^0 &= s_1 \sin\left(\frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}\right) + s_2 \cos\left(\frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}\right) + s_3, \quad Q_2^0 = \frac{Q_1^0 Q_4^0 + (Q_5^0)^2}{24(Q_1^0)^2}, \quad Q_3^0 = \left(\frac{Q_5^0}{Q_1^0}\right)^2, \\
Q_4^0 &= s_1 \sin\left(\frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}\right) + s_2 \cos\left(\frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}\right), \quad Q_5^0 = s_1 \cos\left(\frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}\right) - s_2 \sin\left(\frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}\right); \\
s_1 &= 2qR^2, \quad s_2 = 2pR^2, \quad s_3 = (p^2 + q^2 + 1)R^2; \quad p = \frac{x_{1c} - \xi_1}{R}, \quad q = \frac{x_{2c} - \xi_2}{R}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Интегралы от остальных составляющих функций влияния были вычислены аналитически. В результате были получены следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\int_M u_{11}^*(\xi, x) dS(x) &= 2c_1 R (2c_2 I_0 - 2Q_1 + \delta_5 Q_2 - \delta_6 Q_4 - d_2), \\
\int_M u_{22}^*(\xi, x) dS(x) &= 2c_1 R (2c_2 I_0 - 2Q_1 - \delta_5 Q_2 + \delta_6 Q_4 + d_2), \\
\int_M u_{12}^*(\xi, x) dS(x) &= c_1 R (-4\delta_6 Q_2 - \delta_5 Q_4 + d_3), \\
\int_M f_{11}^*(\xi, x) dS(x) &= c_3 ((c_4 + 1)Q_3 + d_5), \quad \int_M f_{12}^*(\xi, x) dS(x) = c_3 \left(\frac{c_4 Q_4}{2} + \frac{4d_6}{\delta_4} \right), \\
\int_M f_{21}^*(\xi, x) dS(x) &= c_3 \left(-\frac{c_4 Q_4}{2} + \frac{4d_6}{\delta_4} \right), \quad \int_M f_{22}^*(\xi, x) dS(x) = c_3 ((c_4 + 1)Q_3 - d_5),
\end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \arctg(t_b) - \arctg(t_a), \quad Q_2 = Q_1 + \arctg\left(\frac{\delta_4 t_b + 2q}{\delta_3}\right) - \arctg\left(\frac{\delta_4 t_a + 2q}{\delta_3}\right), \\
Q_3 &= Q_1 - \arctg\left(\frac{\delta_4 t_b + 2q}{\delta_3}\right) + \arctg\left(\frac{\delta_4 t_a + 2q}{\delta_3}\right), \quad Q_4 = \ln|d_{4b}| - \ln|d_{4a}| - \ln(d_{1b}) + \ln(d_{1a});
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
d_{1a} &= 1 + t_a^2, \quad d_{1b} = 1 + t_b^2, \quad d_2 = \frac{2}{\delta_1} \left(\frac{q + pt_b}{d_{1b}} - \frac{q + pt_a}{d_{1a}} \right), \quad d_3 = \frac{2}{\delta_1} \left(\frac{p - qt_b}{d_{1b}} - \frac{p - qt_a}{d_{1a}} \right), \\
d_{4a} &= \delta_4 t_a^2 + 4qt_a + \delta_2, \quad d_{4b} = \delta_4 t_b^2 + 4qt_b + \delta_2, \\
d_5 &= \frac{4}{\delta_4} \left(\frac{1}{d_{4b}} \left(\frac{\delta_9 t_b^3 + \delta_{10} t_b}{d_{1b}} - q\delta_8 \right) - \frac{1}{d_{4a}} \left(\frac{\delta_9 t_a^3 + \delta_{10} t_a}{d_{1a}} - q\delta_8 \right) \right), \\
d_6 &= \frac{1}{d_{4b}} \left(q\delta_7^2 t_b - q^2 p + \frac{\delta_4 t_b^2}{d_{1b}} \right) - \frac{1}{d_{4a}} \left(q\delta_7^2 t_a - q^2 p + \frac{\delta_4 t_a^2}{d_{1a}} \right);
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= p^2 + q^2, \quad \delta_2 = (p+1)^2 + q^2, \quad \delta_3 = p^2 + q^2 - 1, \quad \delta_4 = (p-1)^2 + q^2, \\
\delta_5 &= \frac{q^4 - p^4 + p^2 - q^2}{(p^2 + q^2)^2}, \quad \delta_6 = \frac{(p^2 + q^2 - 1)pq}{(p^2 + q^2)^2}, \quad \delta_7 = p - 1, \quad \delta_8 = p^2 - q^2 - 1, \\
\delta_9 &= (p-1)((p-1)^2 - q^2), \quad \delta_{10} = (p-1)(p^2 - q^2 - 1) + 2q^2;
\end{aligned} \tag{29}$$

$$t_a = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_a}{2}\right), \quad t_b = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_b}{2}\right). \tag{30}$$

Очевидно, что выражения (30) предполагают, что $\varphi_a \neq \pi$ и $\varphi_b \neq \pi$. В этих случаях соотношения (27), (28) следует принять в следующем виде:

при $\varphi_a = \pi$ —

$$Q_1 = \arctg(t_b) - \frac{\pi}{2}, \quad Q_2 = Q_1 + \arctg\left(\frac{\delta_4 t_b + 2q}{\delta_3}\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\delta_3),$$

$$Q_3 = Q_1 - \arctg\left(\frac{\delta_4 t_b + 2q}{\delta_3}\right) + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\delta_3), \quad Q_4 = \ln|d_{4b}| - \ln(d_{1b}) - \ln(\delta_4); \quad (27a)$$

$$d_{1b} = 1 + t_b^2, \quad d_2 = \frac{2(q + pt_b)}{\delta_1 d_{1b}}, \quad d_3 = \frac{2(p - qt_b)}{\delta_1 d_{1b}}, \quad d_{4b} = \delta_4 t_b^2 + 4qt_b + \delta_2, \\ d_5 = \frac{4}{\delta_4 d_{4b}} \left(\frac{\delta_9 t_b^3 + \delta_{10} t_b}{d_{1b}} - q\delta_8 \right), \quad d_6 = \frac{1}{d_{4b}} \left(q\delta_7^2 t_b - q^2 p + \frac{\delta_4 t_b^2}{d_{1b}} \right); \quad (28a)$$

при $\varphi_b = \pi$ —

$$Q_1 = \frac{\pi}{2} - \arctg(t_a), \quad Q_2 = Q_1 + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\delta_3) - \arctg\left(\frac{\delta_4 t_a + 2q}{\delta_3}\right),$$

$$Q_3 = Q_1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\delta_3) + \arctg\left(\frac{\delta_4 t_a + 2q}{\delta_3}\right), \quad Q_4 = \ln(\delta_4) - \ln|d_{4a}| + \ln(d_{1a}); \quad (27b)$$

$$d_{1a} = 1 + t_a^2, \quad d_2 = -\frac{2(q + pt_a)}{\delta_1 d_{1a}}, \quad d_3 = -\frac{2(p - qt_a)}{\delta_1 d_{1a}}, \quad d_{4a} = \delta_4 t_a^2 + 4qt_a + \delta_2, \\ d_5 = -\frac{4}{\delta_4 d_{4a}} \left(\frac{\delta_9 t_a^3 + \delta_{10} t_a}{d_{1a}} - q\delta_8 \right), \quad d_6 = -\frac{1}{d_{4a}} \left(q\delta_7^2 t_a - q^2 p + \frac{\delta_4 t_a^2}{d_{1a}} \right). \quad (28b)$$

Формулы (24)–(30) не могут быть использованы в случаях, когда: 1) точка ξ лежит на окружности, содержащей дугу M ($\delta_3 = p^2 + q^2 - 1 = 0$); 2) когда точка ξ лежит в центре этой окружности ($\delta_1 = p^2 + q^2 = 0$). Для этих случаев получены специальные формулы.

В случае 1) интеграл I_0 может быть вычислен по формулам

$$I_0 = \ln\left(R\sqrt{2Q_0^*}\right)(\varphi_b - \varphi_a) + \frac{1}{16Q_0^*} \left(-\frac{(\varphi_b - \varphi_a)^3}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{Q_0^*} \right) \frac{(\varphi_b - \varphi_a)^5}{80} \right), \quad \text{если } \varphi_\xi \neq \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}, \quad (31)$$

$$I_0 = \left(\ln(R) + \ln \frac{|\varphi_b - \varphi_a|}{2} - 1 \right) (\varphi_b - \varphi_a) - \frac{(\varphi_b - \varphi_a)^3}{288} - \frac{(\varphi_b - \varphi_a)^5}{230400}, \quad \text{если } \varphi_\xi = \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}. \quad (31')$$

Здесь

$$Q_0^* = 1 - \cos\left(\varphi_\xi - \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}\right); \quad (32)$$

φ_ξ — полярный угол, соответствующий в системе координат (22) лежащей на окружности точке ξ . Итоговые формулы для случая 1) имеют следующий вид:

$$\int_M u_{11}^*(\xi, x) dS(x) = c_1 R \left(c_2 I_0 + Q_1^* - \frac{\varphi_b - \varphi_a}{2} \right), \quad \int_M u_{12}^*(\xi, x) dS(x) = -c_1 R Q_2^*, \\ \int_M u_{22}^*(\xi, x) dS(x) = c_1 R \left(c_2 I_0 - Q_1^* - \frac{\varphi_b - \varphi_a}{2} \right), \quad \int_M f_{11}^*(\xi, x) dS(x) = c_3 \left((c_4 + 1) \frac{\varphi_b - \varphi_a}{2} - Q_1^* \right), \\ \int_M f_{12}^*(\xi, x) dS(x) = c_3 (c_4 Q_3^* + Q_2^*), \quad \int_M f_{21}^*(\xi, x) dS(x) = c_3 (-c_4 Q_3^* + Q_2^*), \\ \int_M f_{22}^*(\xi, x) dS(x) = c_3 \left((c_4 + 1) \frac{\varphi_b - \varphi_a}{2} + Q_1^* \right), \quad (33)$$

где

$$Q_1^* = \frac{\sin(\varphi_b - \varphi_\xi) - \sin(\varphi_a - \varphi_\xi)}{2}, \quad Q_2^* = \frac{\cos(\varphi_b - \varphi_\xi) - \cos(\varphi_a - \varphi_\xi)}{2}, \\ Q_3^* = \ln \left| \sin\left(\frac{\varphi_b - \varphi_\xi}{2}\right) \right| - n \left| \sin\left(\frac{\varphi_a - \varphi_\xi}{2}\right) \right|. \quad (34)$$

В случае 2) необходимости приближенного интегрирования нет, поскольку для точки ξ , лежащей в центре окружности $\ln(r) = \ln(R)$. Формулы для вычисления интегралов имеют вид:

$$\begin{aligned}
\int_M u_{11}^*(\xi, x) dS(x) &= c_1 R \left(\left(c_2 \ln(R) - \frac{1}{2} \right) (\varphi_b - \varphi_a) - Q_1^{**} \right), \quad \int_M u_{12}^*(\xi, x) dS(x) = c_1 R Q_2^{**}, \\
\int_M u_{22}^*(\xi, x) dS(x) &= c_1 R \left(\left(c_2 \ln(R) - \frac{1}{2} \right) (\varphi_b - \varphi_a) + Q_1^{**} \right), \\
\int_M f_{11}^*(\xi, x) dS(x) &= c_3 \left((c_4 + 1) (\varphi_b - \varphi_a) + 2Q_1^{**} \right), \quad \int_M f_{12}^*(\xi, x) dS(x) = -2c_3 Q_2^{**}, \\
\int_M f_{21}^*(\xi, x) dS(x) &= -2c_3 Q_2^{**}, \quad \int_M f_{22}^*(\xi, x) dS(x) = c_3 \left((c_4 + 1) (\varphi_b - \varphi_a) - 2Q_1^{**} \right), \quad (35)
\end{aligned}$$

где

$$Q_1^{**} = \frac{\sin(2\varphi_b) - \sin(2\varphi_a)}{4}, \quad Q_2^{**} = \frac{\cos(2\varphi_b) - \cos(2\varphi_a)}{4}. \quad (36)$$

В заключение отметим еще раз, что $\varphi_a < \varphi_b$. В случае, когда $\varphi_a > \varphi_b$, т. е., если обход вдоль окружности происходит по часовой стрелке (например, исследуемая область имеет внутреннее отверстие), следует вычислять интегралы по приведенным формулам, сменив знак у интегралов от функций f_{ij}^* на противоположный.

Заключение. Полученные аналитические формулы интегрирования позволяют с большой эффективностью использовать параллельный алгоритм решения задач деформирования [1–3], ускоряя процесс вычисления коэффициентов разрешающей системы линейных алгебраических уравнений и повышая точность расчетов по сравнению с численным интегрированием. Поскольку даже достаточно сложную границу исследуемой области можно с высокой точностью аппроксимировать с помощью отрезков и дуг окружностей, можно считать, что полученные формулы завершают разработку предложенного алгоритма решения плоских задач. Существенным фактом является то, что исключена операция интегрирования, единые аналитические формулы применимы для любой геометрии, для любых механических или физических свойств, т.е. для любой задачи упругости. Формирование матрицы разрешающей системы и нахождение затем перемещений, деформаций и напряжений во внутренней области осуществляется простой подстановкой параметров элементов и координат точек влияния в полученные элементарные функции. Эти операции допускают абсолютное распараллеливание. Аналогичные результаты получены для задач теплопроводности (диффузии).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гасилов В. Л., Думшева Е. С., Зенкова Е. С., Федотов В. П. Численное моделирование упругой задачи на многопроцессорных вычислительных системах // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. — Екатеринбург: УрО РАН, 2002. — Вып. 6. — С. 104–124.
2. Думшева Е. С., Зенкова Е. С., Федотов В. П. и др. Численно-аналитический алгоритм для решения задач упругости, теплопроводности, диффузии // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. — Екатеринбург: УрО РАН, 2003. — Вып. 7. — С. 70–86.
3. Федотов В. П., Спевак Л. Ф., Трухин В. Б. и др. Исследование сходимости численно-аналитического метода решения задач упругости, теплопроводности и диффузии // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ.-мат. науки», 2004. — № 30. — С. 24–32.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. — М.: Мир, 1987. — 524 с.
5. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов. — М.: Мир, 1984. — 494 с.

Поступила 31.03.2006 г.