Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Радченко, Д. В. Шапиевский, О дрейфе упругой деформации для нелинейно-упругих материалов вследствие ползучести, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 99–106

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu458>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 06:49:01

О ДРЕЙФЕ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ВСЛЕДСТВИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

На основе моделирования нелинейно-упругого материала структурной моделью среды показано, что вследствие ползучести мгновенно-упругая деформация существенно зависит от накопленной деформации ползучести. В результате дрейфа упругой деформации вследствие ползучести ее величина после разгрузки может быть как больше, так и меньше аналогичной величины при нагрузке. В начальный момент времени доказан ряд теорем и следствия из них, детализирующих рассматриваемые эффекты.

Многие природные и промышленные материалы представляют собой сложную систему, состоящую из множества кристаллических зерен, цепочек молекул, размеры, форма и ориентация которых имеют случайный характер. Поэтому наряду с феноменологическими теориями, устанавливающими связь между макроскопическими свойствами материала, возникает необходимость (особенно для сред со сложными реологическими свойствами) рассматривать микро-механизмы деформирования и разрушения материала с целью более полного описания его поведения при термомеханических воздействиях. Это дает представление о том, каким образом формируются макроскопические характеристики материала, и позволяет более обоснованно выбрать подходящий вариант феноменологической теории.

В этом направлении особое место занимают структурные математические модели среды, в которых неоднородное микронапряженное состояние моделируется так называемой конструкционной неоднородностью. Согласно этому подходу материал представляется совокупностью некоторых гипотетических элементов, наделенных простейшими свойствами упругости, пластичности и вязкого течения [1–8], при этом основное внимание в этих работах уделялось линейно-упругим средам. Однако некоторые природные биоккомпозитные материалы обладают нелинейным законом упругости и для них наблюдаются сложные эффекты влияния деформации ползучести на упругую деформацию, которые с феноменологических позиций сложно понять и описать [9–11]. Целью настоящей работы является изучение и анализ отмеченных эффектов с позиций механики микронеоднородных сред.

1. Предполагается, что сплошная среда моделируется совокупностью гипотетических локальных элементов. Уравнения состояния каждого i -того локального элемента описывается следующими кинетическими уравнениями:

$$\begin{aligned} y^i(t) &= \Phi(\eta^i(t), x^i(t)), \quad \Phi^i(0, 0) = 0; \\ \dot{x}^i &= f^i(\eta^i(t), x^i(t)), \quad \eta^i(0) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x^i(t) = (x_1^i(t), x_2^i(t), \dots, x_{m_i}^i(t))$ — вектор-функция нагрузок на локальный элемент. Координатами вектора $x^i(t)$ в зависимости от математической природы локальных элементов могут быть микронапряжения $\sigma_{\eta\omega}^i$, приложенные усилия, значения температуры и т.п. Вектор $y_i(t) = (y_1^i(t), y_2^i(t), \dots, y_{n_i}^i(t))$ — вектор-функция, описывающая деформационные свойства локального элемента (микронапряжения, микроперемещения и т.д.); $\eta_i(t) = (h_1^i(t), h_2^i(t), \dots, h_{s_i}^i(t))$ — вектор-функция состояния локального элемента, при помощи которой фиксируется предыстория процесса деформирования локального элемента; f^i и Φ^i — вектор-функции $m_i + s_i$ переменных с n_i и s_i координатами соответственно.

Введем вектор нагрузок $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$, приложенный к материальной точке макросреды (микронапряжения, усилия, моменты и т.д.). Поскольку локальные элементы взаимодействуют друг с другом, то к уравнениям состояния (1) необходимо добавить k_1 уравнений равновесия и k_2 — уравнений совместности деформаций локальных элементов:

$$F_{i_1}^1(x_1, x_2, \dots, x_l, q_1, q_2, \dots, q_m) = 0, \quad i_1 = 1, 2, \dots, k_1; \quad (2)$$

$$F_{j_1}^2(y_1, y_2, \dots, y_l) = 0, \quad j_1 = 1, 2, \dots, k_2, \quad (3)$$

где $k_1 + k_2 = \sum_{i=1}^l m_i = m_0$.

Система уравнений (1)–(3) описывает некоторую математическую структурную модель материала, при этом m_0 — число внутренних, а m — внешних степеней свободы модели. Равенства (2), (3) отражают структуру математической модели, а уравнения (1) — свойства её отдельных локальных элементов.

Для описания макродеформационных характеристик среды вводится в рассмотрение вектор $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$, координатами которого могут быть макродеформации, макроперемещения и т.д. Очевидно, что должна существовать функциональная зависимость, связывающая микро- и макродеформированные состояния:

$$Y_i = \Psi_i(y_1, y_2, \dots, y_l); \quad (4)$$

$$\Psi_i(0, 0, \dots, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

где Ψ_i — вектор-функция с m_0 координатами. В механике деформируемого твердого тела для построения соотношений (4) используются различные гипотезы, в частности гипотезу однородности деформаций по объему, различные методы осреднения микродеформаций и т.д.

Так как координаты вектора $y^i = (y_1^i, y_2^i, \dots, y_{n_i}^i)$ связываются с микродеформационными характеристиками, то при малых деформациях справедливо $|y_j^i| = 1$ ($j = 1, 2, \dots, n_i$). Предполагая далее, что функции Ψ_i непрерывно дифференцируемы, разложим (4) в ряд Тейлора и ограничимся линейными членами. Тогда с учетом (5) получим

$$Y_k = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\partial \Psi^k}{\partial y_j^i} y_j^i, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Конкретизируем соотношения (1) применительно к задачам ползучести. Практический интерес вызывает случай, когда часть координат вектор-функции $y^i = \phi^i(\eta^i, x^i)$ зависит лишь от $x^i(t)$, а другая часть — от $\eta^i(t)$. Тогда первое соотношение (1) можно представить в виде

$$y^i = (\phi_1^i(\eta^i), \phi_2^i(x^i)), \quad \phi_1^i(0) = 0, \quad \phi_2^i(0) = 0, \quad (7)$$

где ϕ_1^i и ϕ_2^i — вектор-функции с n_1^i и n_2^i координатами, причем $n_1^i + n_2^i = n_i$, $0 \leq n_1^i \leq s$, $0 \leq n_2^i \leq m_i$.

Как следует из второго соотношения (1) и (7), координаты ϕ_1^i изменяются непрерывно, а ϕ_2^i — мгновенно при ступенчатом изменении $x(t)$ на конечную величину. Отсюда следует, что координатами ϕ_2^i могут являться, например, упругие, температурные, пластические деформации, а координатами ϕ_1^i — деформации ползучести (или ее компоненты).

Гипотеза отделимости (7), введенная Ю. П. Самариным в [12], позволяет существенно конкретизировать структуру соотношения (1) для локального элемента.

ТЕОРЕМА 1. Если для определяющего уравнения локального элемента (1) выполняется гипотеза отделимости (7), вектор-функции ϕ_1^i и ϕ_2^i непрерывно дифференцируемы и имеют отличные от нуля якобианы по некоторым n_1^i и n_2^i переменным (соответственно), то при $s < \infty$ уравнения (1) приводятся к виду

$$\begin{cases} y^i = \begin{vmatrix} A_1^i & 0 \\ 0 & A_2^i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta^{i*} \\ x^{i*} \end{vmatrix}, \\ \eta^{i*} = f^{i*}(\eta^{i*}, x^{i*}), \quad \eta^{i*}(0) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где $\eta^{i*} = \eta^{i*}(\eta^i)$, $x^{i*} = x^{i*}(x^i)$ — столбцовые $s_1 \times 1$ и $m_i \times 1$ матрицы, A_1^i и A_2^i — постоянные $n_1^i \times s_i$ и $n_2^i \times m_i$ матрицы, причем $\text{rang } A_1^i = n_1^i$, $\text{rang } A_2^i = n_2^i$.

В работе [12] аналогичная теорема доказана для некоторого управляемого объекта и поэтому приведенное там доказательство можно формально перенести на теорему 1.

В дальнейшем будем считать, что определяющие соотношения (1) для локального элемента уже приведены к виду (8) и звездочки для всех функций, кроме x^{i*} , будем опускать, т.е. в качестве определяющих уравнений для локального элемента будем использовать соотношения

$$\begin{cases} y^i = \left\| \begin{array}{c|c} A_1^i & 0 \\ \hline 0 & A_2^i \end{array} \right\| \cdot \left\| \frac{\eta^i}{x^{i*}} \right\|, \\ \Phi^i = f^i(\eta^i, x^{i*}), \quad \eta^i(0) = 0, \quad x^{i*} = x^{i*}(x). \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, структурная модель описывается уравнениями (2), (3), (9).

Подставляя первое соотношение (9) в (3) и решая полученную систему уравнений (2), (3), находим функции

$$x^{i*} = \Phi^i(q_1, \dots, q_m, \eta^1, \dots, \eta^l), \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (10)$$

(соответствующий якобиан системы должен быть отличен от нуля).

Уравнения (10) замыкают систему уравнений (9), так как внешние воздействия $q_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) предполагаются известными.

Установим связь макродеформационных характеристик вектора Y с вектором $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$. Для этого подставим y^i из первого соотношения (9) в соотношение (6):

$$Y_k = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}^k \left(\sum_{p=1}^{s_i} a_{1.pj}^i \eta_p^i + \sum_{p=1}^{m_i} a_{2.pj}^i x_p^{i*} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

где $b_{ij}^k = \frac{\partial \Psi^k}{\partial y_j^i}$ (см. соотношения (6)).

В конечном итоге соотношение (11) можно представить в виде

$$Y = Y^e + Y^p; \quad (12)$$

$$Y^e = C_1 x^*, \quad Y^p = C_2 \eta, \quad (13)$$

где C_1 и C_2 — постоянные $N \times m_0$ и $N \times s$ ($m_0 = \sum_{i=1}^l m_i$, $s = \sum_{i=1}^l s_i$) постоянные матрицы; $x^*(x)$,

η — столбцовые $m_0 \times 1$ и $s \times 1$ матрицы.

Первое соотношение (13) описывает мгновенно изменяемые слагаемые вектора Y (упругие, пластические, температурные и другие макрохарактеристики), а второе — реологические слагаемые Y (деформации ползучести, перемещения от ползучести и т.п.). Используя уравнения (9), (10), (12), (13), можно установить связь между макрохарактеристиками среды в точке (материальном объеме) и внешними воздействиями $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$:

$$\begin{cases} Y = C_1 x^* + C_2 \eta, \\ \Phi^* = f^*(\eta, x^*); \end{cases} \quad (14)$$

$$x^* = \Phi^*(q, \eta), \quad (15)$$

где Φ^* — вектор-функция из l переменных с $m + s$ координатами.

Система уравнений (14), (15) позволяет определить макродеформационные характеристики среды, связывая значения Y_k с вектором внешних воздействий q , и может служить обоснованием традиционного макроскопического (феноменологического) подхода к описанию деформирования материала, когда соответствующие определяющие уравнения строятся без анализа микронапряженного состояния материала и сразу формируется связь между тензорами напряжений и деформаций.

Таким образом, в общем случае при построении феноменологических реологических уравнений нужно учитывать, что, как это следует из (14), (15), мгновенно изменяемые (в частности упругие) координаты вектора Y могут зависеть от реологических координат вектора состояний η . Это обуславливает дрейф мгновенно изменяемых координат за счет реологических эффектов. По внешнему проявлению это явление аналогично изменению упругой деформации

при постоянном напряжении в процессе старения [13], однако, как это будет показано ниже, механизм этого явления совершенно другой и реализуется лишь для нелинейно-упругих материалов [14, 15]. Следует отметить, что на возможность такого эффекта для статически неопределимых конструкций впервые было указано Ю. П. Самариным в работе [16] и несколько позже проиллюстрировано в работе [17].

2. Для выяснения условий, приводящих к эффекту зависимости мгновенно-упругой деформации от реологической деформации, рассмотрим случай одноосной ползучести материала при постоянной температуре. Детальный анализ опубликованных в литературе экспериментальных данных показал, что этот эффект проявляется лишь у природных биокomпозитных материалов (компактной костной ткани) [10, 11] с ярко выраженными свойствами нелинейности для упругой деформации [9, 18]. С целью конкретизации полученных выше результатов для математического моделирования таких сред в качестве структурной модели материала возьмем l параллельно соединенных локальных элементов типа обобщенной модели Максвелла, наделенных свойствами нелинейной упругости и нелинейной вязкости, так, что полная деформация каждого элемента ε_i представляется в виде

$$\varepsilon_i = e_i + p_i, \quad (16)$$

$$e_i = \varphi(\sigma_i(t)), \quad p_i(t) = A_i(\sigma_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (17)$$

где e_i — упругая деформация; p_i — деформация ползучести; A_i — некоторый временной (в общем случае — нелинейный) оператор; σ_i — микронапряжение в локальном элементе; $\varphi_i(0) = 0$, $p_i(0) = 0$.

Обозначим через $\sigma(t)$ макронапряжение, а через $\varepsilon(t)$ — макродеформацию. Запишем уравнение равновесия для структурной модели

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i \sigma_i(t) = \sigma(t) \quad (18)$$

и (в предположении гипотезы однородности деформаций по объему) уравнения совместности деформаций

$$\varepsilon_i(t) = \varepsilon(t), \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (19)$$

где α_i — «вес» локального элемента с номером i , $\alpha_i \in]0; 1[$, $\sum_{i=1}^l \alpha_i = 1$.

Пусть при $t \in]0; t^*[$ на образец действует постоянное макронапряжение $\sigma(t) = \sigma_0$, которое снимается при $t = t^*$ ($\sigma(t) = 0$ при $t > t^*$). Задача состоит в изучении обратимости упругой деформации образца, которая возникает при $t = +0$ и должна исчезнуть после разгрузки.

С помощью соотношений (16)–(19) для определения начальных напряжений при $t = +0$ получаем систему уравнений

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i \sigma_i^0 = \sigma_0; \quad (20)$$

$$\varphi_1(\sigma_1^0) = \varphi_2(\sigma_2^0), \quad i = 2, 3, \dots, l, \quad (21)$$

где $\sigma_i^0 = \sigma_i(+0)$, $i = 1, 2, \dots, l$.

В результате ползучести образца при $\sigma(t) = \sigma_0$ к моменту разгрузки значения микронапряжений $\sigma_i^* = \sigma_i(t^*)$ согласно (16)–(19) удовлетворяют системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i \sigma_i^* = \sigma_0; \quad (22)$$

$$\varphi_1(\sigma_1^*) + p_1^* = \varphi_i(\sigma_i^*) + p_i^*, \quad i = 2, 3, \dots, l, \quad (23)$$

где $p_i = p_i(t^*)$.

После разгрузки при $t = t^*$ в локальных элементах возникнут остаточные напряжения $\Delta\sigma_i = \sigma_i(t^* + 0)$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i \Delta\sigma_i = 0; \quad (24)$$

$$\varphi_1(\Delta\sigma_1) + p_1^* = \varphi_i(\Delta\sigma_i) + p_i^*, \quad i = 2, 3, \dots, l. \quad (25)$$

Согласно гипотезе (19) упругая макродеформация при нагрузке $e(0) = \varphi_1(\sigma_1^0)$, а при разгрузке в момент $t = t^*$ — $e(t^*) = \varepsilon(t^* - 0) - \varepsilon(t^* + 0) = \varphi_1(\sigma_1^*) - \varphi_1(\Delta\sigma_1)$.

Очевидно, что упругая макродеформация будет полностью обратимой, если выполняется условие

$$\varphi_1(\sigma_1^0) = \varphi_1(\sigma_1^*) - \varphi_1(\Delta\sigma_1). \quad (26)$$

ТЕОРЕМА 2. Если локальные элементы структурной модели (16)–(19) удовлетворяют линейному закону упругости $\varphi_i(\sigma) = \frac{\sigma}{E_i}$ ($i = 1, 2, \dots, l$), где E_i — микромодуль Юнга, то упругая макродеформация не зависит от деформации ползучести и условие (26) выполняется.

Доказательство. С учетом конкретизации функции φ_i из (21) имеем

$$\sigma_i^0 = \sigma_1^0 \frac{E_i}{E_1}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (20) и решая полученное уравнение относительно σ_1^0 , получим

$$\varphi(\sigma_1^0) = \frac{\sigma_1^0}{E_1} = \frac{\sigma_0}{\sum_{i=2}^l \alpha_i E_i}. \quad (28)$$

С учетом (22), (24) будет справедливым равенство

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i (\sigma_i^* - \Delta\sigma_i) = \sigma_0. \quad (29)$$

Вычитая из каждого равенства (23) соответствующие равенства (25), с учетом конкретизации φ_i , находим

$$\sigma_i - \Delta\sigma_i = \frac{E_i}{E_1} (\sigma_1^* - \Delta\sigma_1), \quad i = 2, 3, \dots, l. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29) и решая полученное уравнение относительно $\sigma_1^* - \Delta\sigma_1$, получим

$$\varphi(\sigma_1^*) - \varphi(\Delta\sigma_1) = \frac{(\sigma_1^* - \Delta\sigma_1)}{E_1} = \frac{\sigma_0}{\sum_{i=2}^l \alpha_i E_i}. \quad (31)$$

Из (28), (31) очевидно, что условие (26) выполняется. Теорема доказана.

Таким образом, если локальные элементы структурной модели (16)–(19) (и материал) следуют линейным законам упругости, то при любых законах ползучести локальных элементов (и материала) упругая деформация не зависит от деформации ползучести и феноменологические реологические уравнения для материала можно строить, отдельно анализируя упругую и реологическую компоненты. Этот факт подтверждается обширными экспериментальными исследованиями по ползучести материалов различной природы (металлы, пластмассы и др.).

ТЕОРЕМА 3. Если хотя бы один локальный элемент структурной модели (16)–(19) следует нелинейному закону упругости, то соотношение (26) не выполняется и величина упругой деформации материала зависит от накопленной деформации ползучести.

Доказательство. Предположим для простоты, что первые $l-1$ локальных элементов удовлетворяют линейному, а l -тый элемент — нелинейному степенному закону упругости, т.е.

$$\varphi_i(\sigma) = \frac{\sigma}{E_i} \quad (i = 1, 2, \dots, l-1), \quad \varphi_l(\sigma) = \frac{\sigma |\sigma|^{n-1}}{E_l}. \quad (32)$$

Из условия совместности деформаций (19) и первых $(l-1)$ соотношений (32) имеем

$$\sigma_i = \frac{E_i \sigma_1}{E_1} \quad (i = \overline{2, l-1}).$$

Подставляя найденное значение σ_i в (20), найдем

$$\sigma_l = \frac{1}{\alpha_l} \left(\sigma_0 - \frac{\sigma_1}{E_1} \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i E_i \right). \quad (33)$$

Так как в процессе нагрузки все микронапряжения модели (16)–(19) положительны, то условие (21) при $i = l$ принимает вид

$$\frac{\sigma_1^0}{E_1} = \frac{1}{E_2} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma_1^0 \sum_{i=1}^l \frac{\alpha_i E_i}{E_1}}{\alpha_l} \right)^n. \quad (34)$$

Из уравнения (34) очевидно, что σ_1^0 является корнем уравнения (неизвестная обозначена через x)

$$\frac{x}{E_1} = \frac{\left(\frac{\beta_1}{\alpha_l} \right)^n \left(\frac{\sigma_0}{\beta_1} - x \right)^n}{E_2}, \quad (35)$$

где

$$\beta_1 = \frac{1}{E_1} \left(\sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i E_i \right). \quad (36)$$

При конкретизации (32) уравнения (23) и (25) принимают вид

$$\begin{cases} \frac{\sigma_i^*}{E_i} + p_i^* = \frac{\sigma_i^*}{E_i} + p_i^* \quad (i = 2, 3, \dots, l-1), \\ \frac{\sigma_1^*}{E_1} + p_1^* = \frac{\sigma_l^* |\sigma_l^*|^{n-1}}{E_l} + p_l^*; \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} \frac{\Delta \sigma_i}{E_i} + p_i^* = \frac{\Delta \sigma_i}{E_i} + p_i^* \quad (i = 2, 3, \dots, l-1), \\ \frac{\Delta \sigma_1}{E_1} + p_1^* = \frac{\Delta \sigma_l |\Delta \sigma_l|^{n-1}}{E_l} + p_l^*. \end{cases} \quad (38)$$

Выражая из первых уравнений систем (37) и (38) величины σ_i^* и $\Delta \sigma_i$ соответственно через σ_1^* и $\Delta \sigma_1$ и подставляя их в (22) и (24), находим

$$\sigma_l^* = \frac{1}{\alpha_l} \left[\sigma_0 - \sigma_1 \beta_1 - \sum_{i=2}^{l-1} (p_1^* - p_i^*) \alpha_i E_i \right]; \quad (39)$$

$$\Delta \sigma_l = -\frac{1}{\alpha_l} \left[\Delta \sigma_1 \beta_1 + \sum_{i=2}^{l-1} (p_1^* - p_i^*) \alpha_i E_i \right], \quad (40)$$

где β_1 определяется (36).

Вычитая из второго уравнения системы (37) второе уравнение системы (38), легко видеть, что разность $x = \sigma_1^* - \Delta \sigma_1$ является корнем уравнения

$$\frac{x}{E_1} = \frac{1}{E_2} \left(\frac{\beta_1}{\alpha_l} \right)^n \left\{ \left[\frac{\sigma_0}{\beta_1} - \Delta \sigma_1 - \beta_2 - x \right]^n + (\Delta \sigma_1 + \beta_2) \cdot |\Delta \sigma_1 + \beta_2|^{n-1} \right\}, \quad (41)$$

где $\beta_2 = \frac{1}{\beta_1} \sum_{i=2}^{l-1} (p_1^* - p_i^*) \alpha_i E_i$.

Поскольку σ_1^0 и $\sigma_1^* - \Delta \sigma_1$ являются корнями различных уравнений (см. правые части (35) и (41)), то условие (26), вообще говоря, не выполняется. Теорема доказана.

Выполним более детальное исследование уравнений (26), (35), (41).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\Delta \sigma_1 > \beta_2$, то при $n > 1$ выполняется

$$\varphi_1(\sigma_1^0) > \varphi_1(\sigma_1^*) - \varphi_1(\Delta \sigma_1) \quad (42)$$

а при $0 < n < 1$ —

$$\varphi_1(\sigma_1^0) < \varphi_1(\sigma_1^*) - \varphi_1(\Delta \sigma_1). \quad (43)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через x_1 корень уравнения (35), а через $x_2 = \sigma_1^* - \Delta \sigma_1$ — корень уравнения (41). Величину x_1 можно определить, построив график функции $y = \frac{x}{E_1}$ и $y = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_l} \right)^n \left(\frac{\sigma_0}{\beta_1} - x \right)^n \frac{1}{E_2}$ (см. рис.).

Подставляя далее x_2 в (41) и учитывая, что $\Delta\sigma_1 > \beta_2$ по условию, получим тождество

$$\frac{x_2}{E_1} = \frac{1}{E_2} \left(\frac{\beta_1}{\alpha_l} \right)^n \left[\left(\frac{\sigma_0}{\beta_1} - \Delta\sigma_1 - \beta_2 - x_2 \right)^n + (\Delta\sigma_1 + \beta_2)^n \right]. \quad (44)$$

Воспользовавшись тривиальным неравенством $a^n + b^n < (a+b)^n$ ($a > 0, b > 0, n > 1$), из (44) имеем неравенство

$$\frac{x_2}{E_1} < \left(\frac{\beta_1}{\alpha_l} \right)^n \left(\frac{\sigma_0}{\beta_1} - x_2 \right)^n \frac{1}{E_2}. \quad (45)$$

Значения x_2 , для которых выполняется (45), находятся левее x_1 (см. рис.), т.е. $x_2 < x_1$. Отсюда очевидно, что (42) выполняется. Используя затем тривиальное $a^n + b^n > (a+b)^n$, ($a > 0, b > 0, 0 < n < 1$) из (44), получим

$$\frac{x_2}{E_1} > \left(\frac{\beta_1}{\alpha_l} \right)^n \left(\frac{\sigma_0}{\beta_1} - x_2 \right)^n \frac{1}{E_2},$$

откуда следует $x_2 > x_1$, и неравенство (43) выполняется. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\Delta\sigma_1 < \beta_2$, то при $n > 1$ выполняется неравенство (43), а при $0 < n < 1$ — неравенство (42).

Доказательство проводится аналогично доказательству следствия 1.

Таким образом, из теоремы 3 и следствий 1 и 2 следует, что эффект влияния деформации ползучести на величину упругой деформации возможен лишь для физически нелинейно упругого материала, при этом может происходить как упругое упрочнение материала (в смысле уменьшения упругих деформаций), так и его упругое разупрочнение за счет деформации ползучести. Для таких материалов классическое определение упругой деформации, функционально связывающей компоненты тензоров напряжений и деформаций, становится несправедливым, поскольку величина упругой деформации в процессе ползучести зависит от накопленной деформации ползучести. Причем этот эффект не имеет никакого отношения к подобным явлениям для стареющего материала, поскольку после разгрузки и полной релаксации остаточных напряжений $\Delta\sigma_i$ в локальных элементах структурной модели (при $t \rightarrow +\infty$) первоначальные упругие свойства материала полностью восстанавливаются.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Работнов Ю. П. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
2. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. — М.: Мир, 1974. — 284 с.
3. Радченко В. П., Еремин Ю. А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. — М.: Машиностроение-1, 2004. — 264 с.
4. Гохфельд Д. А. Садаков О. С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторном нагружении. — М.: Машиностроение, 1984. — 256 с.
5. Зарубин В. С. Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. — М.: Машиностроение, 1985. — 294 с.
6. Новожилов В. В., Кадашев Ю. И. Микронапряжения в конструкционных материалах. — М.: Машиностроение, Л. отд-ние, 1990. — 223 с.
7. Русинко К. Н. Теория пластичности и неустановившейся ползучести. — Львів: Вища школа, 1981. — 148 с.
8. Шевченко Ю. Н., Марина В. Ю. Структурная модель среды при неизотермическом процессе нагружения // Прикладная механика, 1976. — № 12. — С. 19–27.
9. Ванц Х. Изменение механических свойств компактной костной ткани человека в зависимости от возраста // Механика полимеров, 1975. — № 4. — С. 659–663.
10. Кнетс И. В., Вилкс Ю. К. Ползучесть компактной костной ткани человека при растяжении // Механика полимеров, 1975. — № 4. — С. 634–638.
11. Меллис А. Э., Лайзан Я. Б. Нелинейная ползучесть компактной костной ткани человека при растяжении // Механика полимеров, 1978. — № 1 — С. 97–100.
12. Самарин Ю. П. Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. — Куйбышев: КуГУ, 1979. — 84 с.
13. Самарин Ю. П. Применение метода разделения деформации в теории ползучести / В сб.: Механика. Новые разработки конструкций. — Куйбышев: КПТИ, 1973. — С. 17–21.
14. Радченко В. П. Об одной структурной реологической модели нелинейно-упругого материала // Прикладная механика, 1990. — Т. 26, № 6. — С. 67–74.

Графики функций: 1 — $y = x/E_1$;

$$2 — y = \left(\beta_1/\alpha_l \right)^n \left(\sigma_0/\beta_1 - x \right)^n E_2^{-1}$$

15. Радченко В. П., Самарин Ю. П. Влияние ползучести на величину упругой деформации слоистого композита // Механика композитных материалов, 1983. — № 2. — С. 231–237.
16. Самарин Ю. П. О применении теории управления к исследованию ползучести конструкций / В сб.: Механика деформируемых сред. — Куйбышев: КуГУ, 1976. — С. 123–129.
17. Радченко В. П., Самарин Ю. П. Влияние ползучести на обратимость упругой деформации статистически определимой стержневой системы как целого / В сб.: Прочность и надежность конструкций. — Куйбышев: КуАИ, 1981. — С. 75–80.
18. Добелис М. А. Деформативные свойства деминерализованной компактной костной ткани человека при растяжении // Механика полимеров, 1978. — № 4. — С. 101–108.

Поступила 7.11.2006 г.

УДК 539.376

Н. Н. Попов, С. А. Забелин

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Разработан аналитический метод решения плоской нелинейной задачи установившейся ползучести стохастически неоднородной среды. Стохастичность введена в определяющее соотношение ползучести, взятое в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения. Применен метод разложения по малому параметру, при котором учитываются не только линейные, но и квадратичные члены. Вычислены дисперсии случайного поля напряжений. Произведено сравнение результатов, полученных в первом и во втором приближениях.

Аналитические методы решений стохастических краевых задач для структурно-неоднородных материалов хорошо разработаны для линейно упругих сред [1]. В условиях ползучести разработка аналитических методов решения стохастических задач сталкивается с серьезными трудностями, основными из которых являются физическая и статистическая нелинейность определяющих уравнений. Одним из основных методов решения стохастических задач является метод малого параметра, который относительно задач механики деформируемого твердого тела развивался в работах [1, 2]. Суть этого метода состоит в том, что, разлагая компоненты тензоров напряжений и деформаций в ряд по малому параметру, статистически нелинейную задачу можно свести к последовательности статистически линейных задач. Однако этот подход связан с трудностями вычислительного характера, поэтому при решении конкретных стохастических задач ползучести обычно ограничиваются первым приближением, которое справедливо для слабонеоднородных сред [3–6].

В данной работе на основе второго приближения метода малого параметра приводится решение задачи о нелинейной ползучести стохастически неоднородной плоскости при двухосном растяжении. При этом вводятся ограничения о малости упругих деформаций, и считается, что ими допустимо пренебречь. Среда считается стохастически неоднородной, так что тензоры напряжений и деформаций являются случайными функциями координат x_1, x_2 .

Пусть компоненты тензора напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2), \quad (1)$$

а компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ — условию

$$\Lambda_{ij} \Lambda_{kl} \dot{\epsilon}_{jk,il} = 0, \quad (2)$$

которое получается из уравнения совместности для деформаций путем дифференцирования по времени, Λ_{ij} — единичный антисимметричный псевдотензор

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

Уравнения (1) и (2) замыкаются определяющим соотношением, которое принимается в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения (установившейся ползучести) в стохастической форме [3]: