Общероссийский математический портал

Н. Н. Попов, С. А. Забелин, Решение нелинейной стохастической задачи ползучести методом малого параметра при плоском напряженном состоянии, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 106–112

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu459>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 14:59:48

15. Радченко В. П., Самарин Ю. П. Влияние ползучести на величину упругой деформации слоистого композита // Механика композитных материалов, 1983. — № 2. — С. 231–237.
16. Самарин Ю. П. О применении теории управления к исследованию ползучести конструкций / В сб.: Механика деформируемых сред. — Куйбышев: КуГУ, 1976. — С. 123–129.
17. Радченко В. П., Самарин Ю. П. Влияние ползучести на обратимость упругой деформации статистически определимой стержневой системы как целого / В сб.: Прочность и надежность конструкций. — Куйбышев: КуАИ, 1981. — С. 75–80.
18. Добелис М. А. Деформативные свойства деминерализованной компактной костной ткани человека при растяжении // Механика полимеров, 1978. — № 4. — С. 101–108.

Поступила 7.11.2006 г.

УДК 539.376

Н. Н. Попов, С. А. Забелин

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Разработан аналитический метод решения плоской нелинейной задачи установившейся ползучести стохастически неоднородной среды. Стохастичность введена в определяющее соотношение ползучести, взятое в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения. Применен метод разложения по малому параметру, при котором учитываются не только линейные, но и квадратичные члены. Вычислены дисперсии случайного поля напряжений. Произведено сравнение результатов, полученных в первом и во втором приближениях.

Аналитические методы решений стохастических краевых задач для структурно-неоднородных материалов хорошо разработаны для линейно упругих сред [1]. В условиях ползучести разработка аналитических методов решения стохастических задач сталкивается с серьезными трудностями, основными из которых являются физическая и статистическая нелинейность определяющих уравнений. Одним из основных методов решения стохастических задач является метод малого параметра, который относительно задач механики деформируемого твердого тела развивался в работах [1, 2]. Суть этого метода состоит в том, что, разлагая компоненты тензоров напряжений и деформаций в ряд по малому параметру, статистически нелинейную задачу можно свести к последовательности статистически линейных задач. Однако этот подход связан с трудностями вычислительного характера, поэтому при решении конкретных стохастических задач ползучести обычно ограничиваются первым приближением, которое справедливо для слабонеоднородных сред [3–6].

В данной работе на основе второго приближения метода малого параметра приводится решение задачи о нелинейной ползучести стохастически неоднородной плоскости при двухосном растяжении. При этом вводятся ограничения о малости упругих деформаций, и считается, что ими допустимо пренебречь. Среда считается стохастически неоднородной, так что тензоры напряжений и деформаций являются случайными функциями координат x_1, x_2 .

Пусть компоненты тензора напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2), \quad (1)$$

а компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ — условию

$$\Lambda_{ij} \Lambda_{kl} \dot{\epsilon}_{jk,il} = 0, \quad (2)$$

которое получается из уравнения совместности для деформаций путем дифференцирования по времени, Λ_{ij} — единичный антисимметричный псевдотензор

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

Уравнения (1) и (2) замыкаются определяющим соотношением, которое принимается в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения (установившейся ползучести) в стохастической форме [3]:

$$\mathcal{R}_{ij} = cs^{n-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{mm} \right) (1 + \alpha U(x_1, x_2)), \quad (3)$$

где s — интенсивность напряжений:

$$s^2 = \frac{1}{2} (3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj});$$

$U(x_1, x_2)$ — случайная однородная функция, описывающая реологические свойства материала, с математическим ожиданием $\langle U \rangle = 0$ и дисперсий $\langle U^2 \rangle = 1$; δ_{ij} — символ Кронекера; c , n , α — постоянные материала.

Соотношения (1)–(3) при соответствующих краевых условиях задают стохастическую задачу ползучести, которая в дальнейшем решается относительно напряжений σ_{ij} .

Поставленная задача является физически и статистически нелинейной, в связи с чем строится ее решение в окрестности детерминированного решения с точностью до второго приближения. Аналогичная задача в первом приближении для тонкой стохастически неоднородной пластинки рассматривалась в работах [3, 6].

Представим тензор напряжений в виде разложения по малому параметру α , ограничиваясь его членами второго порядка малости:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \alpha \sigma_{ij}^1 + \alpha^2 \sigma_{ij}^2, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0. \quad (4)$$

Аналогично (4) разложим тензор скоростей деформаций ползучести

$$\mathcal{R}_{ij} = \mathcal{R}_{ij}^0 + \alpha \mathcal{R}_{ij}^1 + \alpha^2 \mathcal{R}_{ij}^2, \quad \langle \mathcal{R}_{ij} \rangle = \mathcal{R}_{ij}^0. \quad (5)$$

Будем предполагать, что детерминированные нормальные напряжения σ_{11}^0 и σ_{22}^0 являются постоянными, а касательные напряжения $\sigma_{12}^0 = 0$.

Представим функцию s^{n-1} с помощью (4) в виде

$$s^{n-1} = (s_0^2 + s_*^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

где

$$\begin{aligned} s_0^2 &= (\sigma_{11}^0)^2 + (\sigma_{22}^0)^2 - \sigma_{11}^0 \sigma_{22}^0, \\ s_*^2 &= \alpha \left(\sigma_{11}^1 l_1 + \sigma_{22}^1 l_2 \right) + \alpha^2 \left[\sigma_{11}^2 l_1 + \sigma_{22}^2 l_2 + (\sigma_{11}^1)^2 + (\sigma_{22}^1)^2 - \sigma_{11}^0 \sigma_{22}^0 + 3(\sigma_{12}^1)^2 \right], \\ l_1 &= 2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0, \quad l_2 = 2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0. \end{aligned} \quad (6)$$

Произведем разложение функции (6) в ряд Тейлора и удержим в этом разложении линейные и квадратичные члены:

$$s^{n-1} \approx s_0^{n-1} + \frac{n-1}{2} s_0^{n-3} s_*^2 + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{4} s_0^{n-5} s_*^4, \quad (7)$$

где

$$s_*^4 = \alpha^2 (\sigma_{11}^1 l_1 + \sigma_{22}^1 l_2)^2.$$

Запишем скорости деформаций (3) в развернутом виде:

$$\mathcal{R}_{11} = \frac{Ac}{3} (2\sigma_{11} - \sigma_{22}), \quad \mathcal{R}_{22} = \frac{Ac}{3} (2\sigma_{22} - \sigma_{11}), \quad \mathcal{R}_{12} = Ac\sigma_{12}, \quad (8)$$

где A — случайная функция, определяемая соотношением

$$A = s^{n-1} (1 + \alpha U(x_1, x_2)).$$

Используя (6), (7), для величины A можно получить следующее выражение (все слагаемые, содержащие α^3 и более высокие степени α отброшены):

$$\begin{aligned} A = s_0^{n-1} \left[1 + \alpha \left((\sigma_{11}^1 l_1 + \sigma_{22}^1 l_2) k + U \right) + \alpha^2 k \left(\sigma_{11}^2 l_1 + \sigma_{22}^2 l_2 + (\sigma_{11}^1)^2 + (\sigma_{22}^1)^2 - \sigma_{11}^0 \sigma_{22}^0 + 3(\sigma_{12}^1)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\sigma_{11}^1 l_1 + \sigma_{22}^1 l_2) U + q (\sigma_{11}^1 l_1 + \sigma_{22}^1 l_2)^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где $k = \frac{n-1}{2s_0^2}$, $q = \frac{n-3}{4s_0^2}$.

Согласно (8), (9) скорости деформации ползучести $\dot{\mathbf{A}}_j$ в первом приближении будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{A}}_{11}^1 &= \frac{1}{3} c s_0^{n-1} \left(\sigma_{11}^1 (2 + k l_1^2) + \sigma_{22}^1 (-1 + k l_1 l_2) + l_1 U \right), \\ \dot{\mathbf{A}}_{22}^1 &= \frac{1}{3} c s_0^{n-1} \left(\sigma_{11}^1 (-1 + k l_1 l_2) + \sigma_{22}^1 (2 + k l_2^2) + l_2 U \right), \\ \dot{\mathbf{A}}_{12}^1 &= c s_0^{n-1} \sigma_{12}^1,\end{aligned}\quad (10)$$

а второе приближение будет иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{A}}_{11}^1 &= \frac{1}{3} c s_0^{n-1} \left(\sigma_{11}^1 (2 + k l_1^2) + \sigma_{22}^1 (-1 + k l_1 l_2) + r_{11}^1 \right), \\ \dot{\mathbf{A}}_{22}^1 &= \frac{1}{3} c s_0^{n-1} \left(\sigma_{11}^1 (-1 + k l_1 l_2) + \sigma_{22}^1 (2 + k l_2^2) + r_{22}^1 \right), \\ \dot{\mathbf{A}}_{12}^1 &= c s_0^{n-1} \left(\sigma_{12}^1 + r_{12}^1 \right),\end{aligned}\quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}r_{11}^1 &= k l_1 \left(3(\sigma_{11}^1)^2 + 3(\sigma_{12}^1)^2 + (\sigma_{22}^1)^2 - 2\sigma_{11}^1 \sigma_{22}^1 + (\sigma_{11}^1 l_1 + \sigma_{22}^1 l_2) U \right) + k l_1 q \left(\sigma_{11}^1 l_1 + \sigma_{22}^1 l_2 \right)^2 + \\ &\quad + \left(2\sigma_{11}^1 - \sigma_{22}^1 \right) \left(U + \sigma_{22}^1 l_2 \right), \\ r_{22}^1 &= k l_2 \left(3(\sigma_{22}^1)^2 + 3(\sigma_{12}^1)^2 + (\sigma_{11}^1)^2 - 2\sigma_{11}^1 \sigma_{22}^1 + (\sigma_{11}^1 l_1 + \sigma_{22}^1 l_2) U \right) + k l_2 q \left(\sigma_{11}^1 l_1 + \sigma_{22}^1 l_2 \right)^2 + \\ &\quad + \left(2\sigma_{22}^1 - \sigma_{11}^1 \right) \left(U + \sigma_{11}^1 l_1 \right), \\ r_{12}^1 &= k \sigma_{12}^1 \left(\sigma_{11}^1 l_1 + \sigma_{22}^1 l_2 \right) + \sigma_{12}^1 U.\end{aligned}$$

Если в уравнение совместности (2) подставить выражения (10) и (11), то можно получить следующие уравнения в частных производных относительно напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_{11,22}^1 (2 + k l_1^2) + \sigma_{22,22}^1 (k l_1 l_2 - 1) + \sigma_{11,11}^1 (k l_1 l_2 - 1) + \sigma_{22,11}^1 (2 + k l_2^2) - 6\sigma_{12,12}^1 = \\ = -(l_1 U_{,22} + l_2 U_{,11}),\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{11,22}^2 (2 + k l_1^2) + \sigma_{22,22}^2 (k l_1 l_2 - 1) + \sigma_{11,11}^2 (k l_1 l_2 - 1) + \sigma_{22,11}^2 (2 + k l_2^2) - 6\sigma_{12,12}^2 = \\ = -r_{11,22}^1 - r_{22,11}^1 + 6r_{12,12}^1.\end{aligned}\quad (13)$$

К полученным уравнениям необходимо присоединить уравнения равновесия для напряжений

$$\sigma_{ij,j}^k = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (14)$$

Если ввести функцию напряжений F такую, что

$$\sigma_{11} = F_{,22}, \quad \sigma_{22} = F_{,11}, \quad \sigma_{12} = -F_{,12}, \quad (15)$$

то вместо системы уравнений (12)-(14) получим два дифференциальных уравнения относительно приближений F^1 и F^2 :

$$F_{,1111}^1 (2 + k l_2^2) + 2F_{,1122}^1 (2 + k l_1 l_2) + F_{,2222}^1 (2 + k l_1^2) = -(l_1 U_{,22} + l_2 U_{,11}), \quad (16)$$

$$F_{,1111}^2 (2 + k l_2^2) + 2F_{,1122}^2 (2 + k l_1 l_2) + F_{,2222}^2 (2 + k l_1^2) = \varphi(F^1, U). \quad (17)$$

Правая часть $\varphi(F^1, U)$ уравнения (17) $\varphi(F^1, U)$ зависит от F^1 и U и их производных. После решения уравнения (16) она будет являться известной величиной.

Функцию $U(x_1, x_2)$, с помощью которой задается случайное поле возмущений реологических свойств материала, будем брать в виде [7]

$$U(x_1, x_2) = A \cos(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \varphi), \quad (18)$$

где A — центрированная случайная величины с дисперсией $D[A]$; φ — случайная величина, распределенная равномерно на интервале $(0, 2\pi)$; ω_1 и ω_2 — положительные неслучайные параметры. Причем случайные величины A и φ считаются независимыми. При этом [4]

$$\langle U^2 \rangle = \frac{1}{2} D[A]. \text{ Отсюда с учетом равенства } \langle U^2 \rangle = 1 \text{ следует, что } D[A] = 2.$$

Для удобства выкладок перейдем к комплексной форме записи вида:

$$\mathcal{U}(x_1, x_2) = \mathcal{A} e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)},$$

где $\mathcal{A} = A e^{i\varphi}$.

Решение уравнения (16), которое можно искать в виде

$$F^1 = f e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} \quad (f = \text{const}),$$

определяется формулой

$$F^1 = \frac{\mathcal{A}(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)} e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}. \quad (19)$$

Используя соотношение (15) между функцией напряжения и компонентами тензора напряжений, решение задачи (1)-(3) в первом приближении можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}^0 + \alpha \sigma_{11}^1 = \sigma_{11}^0 - \frac{\alpha \mathcal{A}(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1) \omega_2^2 e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2}, \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22}^0 + \alpha \sigma_{22}^1 = \sigma_{22}^0 - \frac{\alpha \mathcal{A}(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1) \omega_1^2 e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2}, \\ \sigma_{12} &= \sigma_{11}^0 + \alpha \sigma_{11}^1 = \sigma_{11}^0 - \frac{\alpha \mathcal{A}(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1) \omega_1 \omega_2 e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя полученное решение F^1 (см. (19)) в правую часть уравнения (17), получим

$$F_{,1111}^2 (2 + k l_2^2) + 2 F_{,1122}^2 (2 + k l_1 l_2) + F_{,2222}^2 (2 + k l_1^2) = \mathcal{A}^2 B Z e^{2i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)},$$

где

$$B = \frac{\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2},$$

$$Z = 12k B (\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1) (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + 4k q B (\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^3 - 4k (\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2 - 8 (\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2.$$

Решение полученного уравнения можно искать аналогично решению уравнения (16). В итоге функция напряжений F^2 во втором приближении имеет вид

$$F^2 = \frac{\mathcal{A}^2 B Z e^{2i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}}{16 (2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)},$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^2 &= - \frac{\mathcal{A}^2 B Z \omega_2^2 e^{2i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}}{4 (2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)}, \\ \sigma_{22}^2 &= - \frac{\mathcal{A}^2 B Z \omega_1^2 e^{2i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}}{4 (2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)}, \\ \sigma_{12}^2 &= \frac{\mathcal{A}^2 B Z \omega_1 \omega_2 e^{2i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}}{4 (2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Согласно формулам (4), (20), (21) решение задачи (1)-(3) во втором приближении определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}^0 - \frac{\mathcal{A} \alpha \omega_2^2 e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2} \left(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1 + \alpha \frac{\mathcal{A} B Z}{4} e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} \right), \\ \sigma_{22} &= \sigma_{22}^0 - \frac{\mathcal{A} \alpha \omega_1^2 e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2} \left(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1 + \alpha \frac{\mathcal{A} B Z}{4} e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} \right), \\ \sigma_{12} &= \frac{\mathcal{A} \alpha \omega_1 \omega_2 e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}}{2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2} \left(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1 + \alpha \frac{\mathcal{A} B Z}{4} e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Важнейшей характеристикой случайных напряжений являются их дисперсии $D_{ij} = \langle |\sigma_{ij}|^2 \rangle$. В дальнейшем при вычислении дисперсии будем считать, что случайная функция $U(x_1, x_2)$, описывающая возмущения реологических свойств материала, распределена по нормальному закону. Согласно формуле (18) (в силу линейности) случайная величина $\mathcal{A}$ также будет иметь нормальное распределение. Для нормального распределения все центральные моменты нечетных порядков равны нулю, а моменты четных порядков выражаются через моменты второго порядка. В частности, для момента четвертого порядка формула имеет вид [8]

$$\langle \mathcal{A}_1^2 \mathcal{A}_2^2 \mathcal{A}_3^2 \mathcal{A}_4^2 \rangle = k_{12}k_{34} + k_{13}k_{24} + k_{14}k_{23}, \quad (23)$$

где $\mathcal{A}_i$ — центрированные случайные величины; k_{ij} — моменты второго порядка.

Соответственно для $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ дисперсии в первом приближении, с учетом того, что, $D[\mathcal{A}] = 2$, определяется формулами

$$\begin{aligned} D_{11}^1 &= \frac{2\alpha^2(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2 \omega_2^4}{\left(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2\right)^2}, \\ D_{22}^1 &= \frac{2\alpha^2(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2 \omega_1^4}{\left(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2\right)^2}, \\ D_{12}^1 &= \frac{2\alpha^2(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2 \omega_1^2 \omega_2^2}{\left(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2\right)^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Дисперсии для второго приближения можно записать в виде

$$D_{ij}^2 = \alpha^2 D[\sigma_{ij}^1] + \alpha^4 D[\sigma_{ij}^2] + 2\alpha^3 \langle \sigma_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 \rangle,$$

причем последнее слагаемое обращается в ноль как момент третьего порядка. Во второе приближения σ_{ij} входит случайная величина $\mathcal{A}^2$, дисперсия которой $D[\mathcal{A}^2] = \langle \mathcal{A}^4 \rangle - (\langle \mathcal{A}^2 \rangle)^2$ согласно формуле (23) равна

$$D[\mathcal{A}^2] = 3\langle \mathcal{A}^4 \rangle - (\langle \mathcal{A}^2 \rangle)^2 = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2.$$

Таким образом, дисперсии напряжений во втором приближении определяются формулами

$$\begin{aligned} D_{11}^2 &= \frac{2\alpha^2(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2 \omega_2^4}{\left(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2\right)^2} + \frac{\alpha^4 B^2 Z^2 \omega_2^4}{8\left(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2\right)^2}, \\ D_{22}^2 &= \frac{2\alpha^2(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2 \omega_1^4}{\left(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2\right)^2} + \frac{\alpha^4 B^2 Z^2 \omega_1^4}{8\left(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2\right)^2}, \\ D_{12}^2 &= \frac{2\alpha^2(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2 \omega_1^2 \omega_2^2}{\left(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2\right)^2} + \frac{\alpha^4 B^2 Z^2 \omega_1^2 \omega_2^2}{8\left(2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k(\omega_1^2 l_2 + \omega_2^2 l_1)^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Анализ случайного поля напряжений был проведен при условии, что плоскость растягивается в двух взаимно ортогональных направлениях $\sigma_{11} = \sigma^0$, $\sigma_{22} = h\sigma^0$, где h — параметр ($h \in \mathbb{R}$). Для упрощения вычислений будем считать, что частоты флуктуаций микронеоднородностей относительно осей X_1 и X_2 равны между собой, т.е. $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. При этом условии случайное поле U , заданное формулой (18), можно считать приблизительно изотропным [1]. Дисперсии напряжений и в первом, и во втором приближениях будут равны между собой и не будут зависеть от ω .

Значения коэффициентов вариации $\frac{\sqrt{D_{11}^1}}{\sigma^0}$ и $\frac{\sqrt{D_{11}^2}}{\sigma^0}$ (в процентах), характеризующих относительную величину разброса напряжений, как функции переменных α и n приведены в табл. 1 ($h = 0,5$) и табл. 2 ($h = 4$). В столбце D^1 представлены значения коэффициента вариации, вычисленные по первому приближению, в столбце D^2 — по второму приближению. Как видно из табл. 2, для материалов с высоким показателем нелинейности ($n = 9$) коэффициент вариации

$\frac{\sqrt{D_{11}^2}}{\sigma^0}$ при $h = 4$ изменяется в пределах от 4,51% ($\alpha = 0,1$) до 23,29% ($\alpha = 0,5$). В случае низких показателей нелинейности, когда возможная полная линеаризация задачи ползучести ($n = 1$) разброс напряжений значительно больше. Здесь величина $\frac{\sqrt{D_{11}^2}}{\sigma^0}$ заключена в пределах от 8,88 до 49,41%.

В табл. 3 приведена относительная погрешность вычисления среднеквадратичного отклонения второго приближения относительно первого при $h = 4$ по формуле

$$\delta = \frac{\sqrt{D_{11}^2} - \sqrt{D_{11}^1}}{\sqrt{D_{11}^2}} \cdot 100\% .$$

Из табл. 3 видно, что для слабонеоднородных материалов ($\alpha = 0,1 \div 0,2$) погрешность δ незначительна. Для таких материалов первое (линейное) приближение вполне приемлемо для решения практических задач. Для материалов с большой степенью неоднородности ($\alpha = 0,4 \div 0,5$), особенно при малых n , члены второго порядка вносят значительный вклад в среднеквадратичное отклонение напряжения, здесь относительная ошибка δ больше 5%. Поэтому в рассматриваемом случае неучет членов второго порядка может привести к необоснованному завышению показателей прочности и надежности элементов конструкций.

Т а б л и ц а 1

Значения коэффициентов вариации (в процентах) $\frac{\sqrt{D_{11}^1}}{\sigma^0}$ и $\frac{\sqrt{D_{11}^2}}{\sigma^0}$ при $h = 0,5$

n	1		3		5		7		9	
α	D^1	D^2	D^1	D^2	D^1	D^2	D^1	D^2	D^1	D^2
0,1	2,652	2,665	1,928	1,933	1,515	1,518	1,248	1,250	1,061	1,061
0,2	5,303	5,408	3,857	3,895	3,030	3,051	2,496	2,510	2,121	2,121
0,3	7,955	8,305	5,785	5,912	4,546	4,616	3,744	3,791	3,182	3,182
0,4	10,607	11,424	7,714	8,013	6,061	6,226	4,991	5,103	4,243	4,243
0,5	13,258	14,823	9,642	10,220	7,576	7,895	6,239	6,457	5,303	5,305

Т а б л и ц а 2

Значения коэффициентов вариации (в процентах) $\frac{\sqrt{D_{11}^1}}{\sigma^0}$ и $\frac{\sqrt{D_{11}^2}}{\sigma^0}$ при $h = 4$

n	1		3		5		7		9	
α	D^1	D^2	D^1	D^2	D^1	D^2	D^1	D^2	D^1	D^2
0,1	8,839	8,883	7,126	7,147	5,969	5,981	5,135	5,144	4,506	4,510
0,2	17,678	18,028	14,252	14,418	11,938	12,037	10,271	10,339	9,012	9,046
0,3	26,517	27,684	21,378	21,934	17,907	18,239	15,406	15,635	13,518	13,644
0,4	35,355	38,079	28,504	29,810	23,876	24,658	20,542	21,080	18,024	18,360
0,5	44,194	49,411	35,629	38,151	29,845	31,358	25,677	26,722	22,530	23,287

Т а б л и ц а 3

Относительная погрешность вычисления среднеквадратичного отклонения для $h = 4$

$\alpha \backslash n$	1	3	5	7	9
0,1	0,496	0,292	0,207	0,166	0,089
0,2	1,942	1,152	0,821	0,658	0,376
0,3	4,217	2,538	1,820	1,462	0,921
0,4	7,152	4,384	3,168	2,556	1,829
0,5	10,557	6,609	4,823	3,910	3,247

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. — М.: Наука, 1970. — 137 с.
2. Ломакин В. А. Проблемы механики структурно-неоднородных тел // Изв. АН СССР. МТТ, 1978. — №6. — С. 45–52.

3. Кузнецов В. А. Ползучесть стохастически неоднородных сред в условиях плоского напряженного состояния // В сб.: Математическая физика. — Куйбышев: КнТИ, 1976. — С. 69–74.
4. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородных сред // ПМТФ, 1985. — № 2. — С. 150–155.
5. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // ПМТФ, 1988. — № 1. — С. 159–164.
6. Радченко В. П., Попов Н. Н. Статистические характеристики полей напряжений и деформаций при установившейся ползучести стохастически неоднородной плоскости // Изв. вузов. Машиностроение. — 2006. — № 2. — С. 3–11.
7. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории вероятностей. — М.: Радио и связь, 1983. — 416 с.
8. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Физматлит, 2002. — 496 с.

Поступила 23.10.2006 г.

УДК 539.376 + 621.787

М. Н. Саушкин, Е. А. Просвиркина, О. С. Афанасьева

РЕЛАКСАЦИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОВЕРХНОСТНО УПРОЧНЁННОМ СЛОЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ СТАТИЧЕСКИХ И ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗОК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Проведён анализ деформирования цилиндрического образца под действием нагрузки с циклической составляющей. Показано, что циклическая компонента интенсифицирует скорость деформации ползучести и приводит к более быстрому разрушению образца по сравнению с квазистатическим нагружением. Исследовано влияние циклической компоненты нагружения и на кинетику остаточных напряжений в поверхностно упрочнённом слое цилиндрического образца при ползучести. Показано, что циклическая компонента интенсифицирует процесс релаксации остаточных напряжений.

Введение. Большинство краевых задач механики сплошной среды о неупругом реологическом деформировании и разрушении элементов конструкций решается в квазистатической постановке, т. е. считается, что нагрузки, действующие на конструкцию постоянны во времени или изменяются согласно какому-то известному закону (заданной программе нагружения). Однако при эксплуатации большинства конструкций на статическую составляющую тензора напряжений накладываются циклические «флуктуации» нагрузок с малой амплитудной составляющей по отношению к квазистатической нагрузке, которые, на первый взгляд, не меняют общей картины процесса нагружения, поскольку средняя интегральная характеристика нагрузки в зависимости от времени не меняется. Подходы, использующие средние интегральные или эквивалентные напряжения, широко используются в теории ползучести и длительной прочности. Однако на самом деле влияние циклических нагрузок даже малой амплитуды может вызвать существенное увеличение деформации ползучести (без учёта усталостных эффектов!). В настоящей работе рассчитывается кинетика остаточных напряжений в поверхности упрочнённого слоя цилиндрического образца с учётом циклической компоненты нагружения. Расчёт производится по методике, изложенной в работах [1, 2]. Суть данной методики заключается в том, что производится декомпозиция задачи о кинетике остаточных напряжений в слое на две краевые задачи. В процессе решения первой краевой задачи определяется напряжённо-деформированное состояние цилиндрического образца при ползучести без учёта упрочнённого слоя. Во второй краевой задаче исследуется кинетика остаточных напряжений в упрочнённом слое в режиме «жёсткого» нагружения при заданных значениях компонент тензоров деформаций, которые определяются из решения первой краевой задачи.

Согласно данной методике рассматривается напряжённо-деформированное состояние цилиндрического образца в условиях ползучести при растягивающем напряжении, закон изменения которого имеет вид:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_a \sin \omega t, \quad (1)$$

где $\sigma_0 = \text{const}$ — статическая составляющая напряжения; $\sigma_a = \text{const}$ — амплитудное значение циклической компоненты; ω — частота нагружения ($\sigma_a < \sigma_0$).

1. Влияние циклической компоненты нагружения на развитие деформаций ползучести цилиндрического образца. Предположим (для простоты дальнейших выкладок), что материал стержня удовлетворяет закону установившейся ползучести

$$\dot{\epsilon} = a \sigma^n, \quad (2)$$