Общероссийский математический портал

В. Н. Исуткина, А. Ю. Маргаритов, Сравнительный анализ решений стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы на основе методов малого параметра и Монте-Карло, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 116–123

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu461>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:29:56

тояния [2, 3], аналогичной (7)–(9). При этом величины $e_z^{\text{res}}(r, t)$, $p_z^{\text{res}}(r, t)$ и $e_z^p \text{res}(r, t)$ рассчитываются через напряжения $\sigma_z^{\text{res}}(r, t)$, $\sigma_\theta^{\text{res}}(r, t)$ и $\sigma_r^{\text{res}}(r, t)$ в поверхностном слое.

В качестве примера, на рис. 3 приведены результаты расчета кинетики осевой σ_z^{res} компоненты тензора остаточных напряжений на поверхности образца (упрочненного слоя) при $r = a$ ($h = 0$).

Анализ результатов расчёта позволяет сделать вывод о том, что циклическая компонента существенно влияет на процесс релаксации остаточных напряжений: происходит расслоение кривых релаксаций; увеличивается скорость процесса релаксации; из-за циклической составляющей происходит «флуктуация» упругих деформаций и напряжений в цилиндрическом образце, за счёт чего на фоне ползучести образца процесс релаксации становится «локально не монотонным» (см. рис. 3). Отметим, что при нагружении цилиндра происходит мгновенный скачок осевой компоненты остаточных напряжений σ_z^{res} на величину приложенного напряжения. Для окружной компоненты остаточных напряжений $\sigma_\theta^{\text{res}}$ кривые релаксации на поверхности упрочнённого слоя имеют аналогичный вид, что и для σ_z^{res} , но для неё в момент приложения нагрузки скачок отсутствует.

Все полученные результаты приведены для промежутка времени, в котором деформирование цилиндрического образца происходит в пределах двух первых стадий (без учёта повреждённости и разрушения от усталости).

Р и с. 3. Кривые релаксации осевой компоненты остаточных напряжений $\sigma_z^{\text{res}}(t)$ на поверхности упрочнённого слоя цилиндрического образца из материала ЭИ 698 при $T = 700^\circ\text{C}$ при растягивающей нагрузке $\sigma_0 = 450$ МПа с циклической компонентой: 1 — $\sigma_a = 0$; 2 — $\sigma_a = 30$ МПа; 3 — $\sigma_a = 45$ МПа; 4 — $\sigma_a = 60$ МПа

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Математические модели восстановления и релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочнённом слое цилиндрических элементах конструкций при ползучести / Изв. вузов. Машиностроение, 2004. — № 11. — С. 3–17.
2. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочнённых конструкциях. — М.: Машиностроение-1, 2005. — 226 с.
3. Радченко В. П., Ерёмин Ю. А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. — М.: Машиностроение-1, 2004. — 268 с.

Поступила 11.10.2006 г.

УДК 539.376

В. Н. Исуткина, А. Ю. Маргаритов

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ МАЛОГО ПАРАМЕТРА И МОНТЕ-КАРЛО

Выполнен сравнительный анализ аналитического решения краевой задачи установившейся ползучести, полученного по методу малого параметра с учетом четвертого приближения, и численного решения этой же задачи методом Монте-Карло. Проведено детальное исследование случайного поля скоростей деформаций в зависимости от степени неоднородности и показателя нелинейности материала. Установлено соответствие решений по обоим методам.

Одним из приближенных аналитических методов решения стохастических краевых задач как в упругой области, так и в условиях ползучести является метод малого параметра [1–7]. Однако вследствие существенных трудностей вычисления моментов второго и более высокого порядков случайной функции он позволяет найти решения краевых стохастических задач уста-

новившейся ползучести лишь для первых трех приближений [1, 3, 6, 7], при этом вопросы сходимости метода малого параметра в условиях ползучести практически не исследованы. Поэтому вопрос адекватности аналитического решения, полученного по методу малого параметра, остается открытым.

В данной работе приводится сравнение решений краевой задачи установившейся ползучести, полученных по методу малого параметра с учетом четвертого приближения и по методу Монте-Карло, для толстостенной трубы из стохастически неоднородного материала под действием внутреннего давления. Задача рассматривается в цилиндрических координатах для случая плоского деформированного состояния.

1. В [6] данная задача была решена с учетом третьего приближения, однако сходимость решения исследована не была. Поэтому одной из задач данной работы являлась оценка влияния четвертого приближения и корреляционных моментов восьмого порядка на приближенное аналитическое решение.

Краевая задача задается уравнением равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{\rho} = 0; \quad (1)$$

граничными условиями для напряжений на внешнем и внутреннем радиусах

$$\sigma_r(1) = -q, \quad \sigma_r(\beta) = 0; \quad (2)$$

уравнениями совместности деформаций

$$\rho \frac{d\mathcal{E}_r}{d\rho} + \mathcal{E}_\phi - \mathcal{E}_r = 0 \quad (3)$$

и определяющими соотношениями вязкого нелинейного течения для деформаций ε_r и ε_ϕ :

$$\mathcal{E}_r = -\frac{\sqrt{3}}{2} c (\sigma_\phi - \sigma_r)^n [1 + \alpha U(\rho)], \quad \mathcal{E}_\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} c (\sigma_\phi - \sigma_r)^n [1 + \alpha U(\rho)], \quad (4)$$

где σ_r , σ_ϕ — радиальное и тангенциальное напряжения; $U(\rho)$ — функция, описывающая стохастическую неоднородность материала оболочки трубы; α — коэффициент вариации механических свойств — малый параметр ($0 < \alpha < 1$); c , n — постоянные материала; $\rho = \frac{r}{a}$, $\beta = \frac{b}{a}$, a и b — внутренний и наружный радиусы трубы $1 < \rho < \beta$.

По методике, изложенной в [6], найдены скорости деформаций с учетом четвертого приближения, которые

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\phi = T \left(\frac{\beta}{\rho} \right)^2 & \left[1 + \alpha \frac{2}{n} H_1 + \alpha^2 \left(\frac{2(n+1)}{n^3} H_1^2 - \frac{n+1}{n^2} H_2 \right) + \alpha^3 \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{3n^3} H_3 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2(n+1)^2}{n^4} H_1 H_2 + \frac{4(n+1)(n+2)}{3n^5} H_1^3 \right) + \alpha^4 \left(-\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{12n^4} H_4 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2(n+1)^2(2n+1)}{3n^5} H_1 H_3 - \frac{2(n+1)^2(n+2)}{n^6} H_1^2 H_2 + \frac{(n+1)^3}{2n^5} H_2^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^7} H_1^4 \right) + o(\alpha^4) \right], \end{aligned}$$

где

$$T = \frac{(\sqrt{3})^{n-1} c A^n}{n^n}; \quad A = \frac{q}{\beta^n - 1}; \quad H_i = B I_i(\beta); \quad B = \frac{1}{1 - \beta^{-\frac{2}{n}}}; \quad I_i(\rho) = \int_1^\rho U^i(x) x^{-1-\frac{2}{n}} dx.$$

Дисперсии скоростей деформаций вычисляются в предположении, что функция $U(\rho)$, задающая поле возмущений механических свойств материала, распределена по нормальному закону ($\langle U \rangle = 0$, $\langle U^2 \rangle = 1$). В этом случае моменты нечетных порядков равны нулю, а центральные моменты четных порядков выражаются через моменты второго порядка.

Используя методику работы [6], для дисперсий скоростей деформаций ε_Φ можно получить следующие выражения:

с учетом первого приближения —

$$D[\varepsilon_\Phi] = T^2 \left(\frac{\beta}{\rho} \right)^4 \left[\alpha^2 \frac{4}{n^2} D[H_1] + o(\alpha^2) \right];$$

с учетом второго приближения —

$$D[\varepsilon_\Phi] = T^2 \left(\frac{\beta}{\rho} \right)^4 \left[\alpha^2 \frac{4}{n^2} D[H_1] + \alpha^4 \frac{4(n+1)^2}{n^6} D[H_1^2] + \alpha^4 \frac{(n+1)^2}{n^4} D[H_2] - \right. \\ \left. - \alpha^4 \frac{4(n+1)^2}{n^5} \left\langle H_1^2 H_2^0 \right\rangle + o(\alpha^4) \right];$$

с учетом третьего приближения —

$$D[\varepsilon_\Phi] = T^2 \left(\frac{\beta}{\rho} \right)^4 \left[\alpha^2 \frac{4}{n^2} D[H_1] + \alpha^4 \frac{4(n+1)^2}{n^6} D[H_1^2] + \alpha^4 \frac{(n+1)^2}{n^4} D[H_2] + \right. \\ + \alpha^6 \frac{(n+1)^2 (2n+1)^2}{9n^6} D[H_3] + \alpha^6 \frac{4(n+1)^4}{n^8} D[H_1 H_2] + \alpha^6 \frac{16(n+1)^2 (n+2)^2}{9n^{10}} D[H_1^3] - \\ - \alpha^4 \frac{8(n+1)^2}{n^5} \left\langle H_1^0 (H_1 H_2)^0 \right\rangle + \alpha^4 \frac{16(n+1)(n+2)}{3n^6} \left\langle H_1^0 H_1^3 \right\rangle - \alpha^4 \frac{4(n+1)^2}{n^5} \left\langle H_1^2 H_2^0 \right\rangle + \\ + \alpha^4 \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^4} \left\langle H_1^0 H_3^0 \right\rangle - \alpha^6 \frac{16(n+1)^3 (n+2)}{3n^9} \left\langle (H_1 H_2)^0 H_1^3 \right\rangle - \\ - \alpha^6 \frac{4(n+1)^3 (2n+1)}{3n^7} \left\langle H_3^0 (H_1 H_2)^0 \right\rangle + \alpha^6 \frac{8(n+1)^2 (2n+1)(n+2)}{9n^8} \left\langle H_3^0 H_1^3 \right\rangle + o(\alpha^6) \right];$$

с учетом четвертого приближения —

$$D[\varepsilon_\Phi] = T^2 \left(\frac{\beta}{\rho} \right)^4 \left[\alpha^2 \frac{4}{n^2} D[H_1] + \alpha^4 \frac{4(n+1)^2}{n^6} D[H_1^2] + \alpha^4 \frac{(n+1)^2}{n^4} D[H_2] + \right. \\ + \alpha^6 \frac{(n+1)^2 (2n+1)^2}{9n^6} D[H_3] + \alpha^6 \frac{4(n+1)^4}{n^8} D[H_1 H_2] + \alpha^6 \frac{16(n+1)^2 (n+2)^2}{9n^{10}} D[H_1^3] + \\ + \alpha^8 \frac{(n+1)^2 (2n+1)^2 (3n+1)^2}{144n^8} D[H_4] + \alpha^8 \frac{4(n+1)^4 (2n+1)^2}{9n^{10}} D[H_1 H_3] + \\ + \alpha^8 \frac{4(n+1)^4 (n+2)^2}{n^{12}} D[H_1^2 H_2] + \alpha^8 \frac{(n+1)^6}{4n^{10}} D[H_2^2] + \\ + \alpha^8 \frac{4(n+1)^2 (n+2)^2 (n+3)^2}{9n^{14}} D[H_1^4] + \alpha^4 \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^4} \left\langle H_1^0 H_3^0 \right\rangle - \\ - \alpha^4 \frac{8(n+1)^2}{n^5} \left\langle H_1^0 (H_1 H_2)^0 \right\rangle + \alpha^4 \frac{16(n+1)(n+2)}{3n^6} \left\langle H_1^0 H_1^3 \right\rangle - \alpha^4 \frac{4(n+1)^2}{n^5} \left\langle H_1^2 H_2^0 \right\rangle - \\ - \alpha^6 \frac{(n+1)^2 (2n+1)(3n+1)}{3n^7} \left\langle H_1^2 H_4^0 \right\rangle + \alpha^6 \frac{8(n+1)^3 (2n+1)}{3n^8} \left\langle H_1^2 (H_1 H_3)^0 \right\rangle - \\ - \alpha^6 \frac{8(n+1)^3 (n+2)}{n^9} \left\langle H_1^2 (H_1^2 H_2)^0 \right\rangle + \alpha^6 \frac{2(n+1)^4}{n^8} \left\langle H_1^2 H_2^2 \right\rangle + \\ + \alpha^6 \frac{8(n+1)^2 (n+2)(n+3)}{3n^{10}} \left\langle H_1^2 H_1^4 \right\rangle + \alpha^6 \frac{(n+1)^2 (2n+1)(3n+1)}{6n^6} \left\langle H_2^0 H_4^0 \right\rangle -$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha^6 \frac{4(n+1)^3(2n+1)}{3n^7} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_2 \end{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ H_1 H_3 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle + \alpha^6 \frac{4(n+1)^3(n+2)}{n^8} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_2 \end{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ H_1^2 H_2 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle - \\
& -\alpha^6 \frac{(n+1)^4}{n^7} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ H_2^2 \end{smallmatrix} \right\rangle - \alpha^6 \frac{4(n+1)^2(n+2)(n+3)}{3n^9} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1^4 \end{smallmatrix} \right\rangle - \\
& -\alpha^6 \frac{4(n+1)^3(2n+1)}{3n^7} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_3 \end{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ H_1 H_2 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle + \alpha^6 \frac{8(n+1)^2(2n+1)(n+2)}{9n^8} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1^3 \end{smallmatrix} \right\rangle - \\
& -\alpha^6 \frac{16(n+1)^3(n+2)}{3n^9} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1 H_2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1^3 \end{smallmatrix} \right\rangle - \alpha^8 \frac{(n+1)^3(2n+1)^2(3n+1)}{9n^9} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_4 \end{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ H_1 H_3 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle + \\
& + \alpha^8 \frac{(n+1)^3(2n+1)(3n+1)(n+2)}{3n^{10}} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_4 \end{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ H_1^2 H_2 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle - \alpha^8 \frac{(n+1)^4(2n+1)(3n+1)}{12n^9} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_4 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ H_2^2 \end{smallmatrix} \right\rangle - \\
& - \alpha^8 \frac{(n+1)^2(2n+1)(3n+1)(n+2)(n+3)}{9n^{11}} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_4 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1^4 \end{smallmatrix} \right\rangle - \\
& - \alpha^8 \frac{8(n+1)^4(2n+1)(n+2)}{3n^{11}} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1 H_3 \end{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ H_1^2 H_2 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle + \alpha^8 \frac{2(n+1)^5(2n+1)}{3n^{10}} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1 H_3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ H_2^2 \end{smallmatrix} \right\rangle + \\
& + \alpha^8 \frac{8(n+1)^3(2n+1)(n+2)(n+3)}{9n^{12}} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1 H_3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1^4 \end{smallmatrix} \right\rangle - \alpha^8 \frac{2(n+1)^5(n+2)}{n^{11}} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1^2 H_2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ H_2^2 \end{smallmatrix} \right\rangle - \\
& - \alpha^8 \frac{8(n+1)^3(n+2)^2(n+3)}{3n^{13}} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1^2 H_2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1^4 \end{smallmatrix} \right\rangle + \alpha^8 \frac{2(n+1)^4(n+2)(n+3)}{3n^{12}} \left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_2^2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1^4 \end{smallmatrix} \right\rangle + o(\alpha^8) \Big].
\end{aligned}$$

Все моменты вычисляются через моменты функции $I_k(\rho)$, которые могут быть выражены через корреляционную функцию $K(x_2 - x_1)$ однородного поля $U(\rho)$. Например, для $\langle I_1^2(\rho) \rangle$ имеем

$$\langle I_1^2(\rho) \rangle = \int_1^\beta \int_1^\beta \langle U(x_1) U(x_2) \rangle x_1^{-1-\frac{2}{n}} x_2^{-1-\frac{2}{n}} dx_1 dx_2 = \int_1^\beta \int_1^\beta K(x_2 - x_1) x_1^{-1-\frac{2}{n}} x_2^{-1-\frac{2}{n}} dx_1 dx_2,$$

а один из моментов восьмого порядка вычисляется по формуле

$$\left\langle \begin{smallmatrix} 0 \\ H_2^2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ H_1^4 \end{smallmatrix} \right\rangle = 48B^6 IK_1(n) IK_5(n) + 24B^6 IK_4^2(n) + 12nB^5 IK_1(n) IK_4(n),$$

$$\text{где } IK_1(n) = \int_1^\beta \int_1^\beta K(x_2 - x_1) x_1^{-1-\frac{2}{n}} x_2^{-1-\frac{2}{n}} dx_1 dx_2,$$

$$IK_4(n) = \int_1^\beta \int_1^\beta \int_1^\beta K(x_2 - x_1) K(x_3 - x_1) x_1^{-1-\frac{2}{n}} x_2^{-1-\frac{2}{n}} x_3^{-1-\frac{2}{n}} dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$IK_5(n) = \int_1^\beta \int_1^\beta \int_1^\beta \int_1^\beta K(x_2 - x_1) K(x_3 - x_1) K(x_4 - x_2) x_1^{-1-\frac{2}{n}} x_2^{-1-\frac{2}{n}} x_3^{-1-\frac{2}{n}} x_4^{-1-\frac{2}{n}} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

В настоящей работе по аналогии с [6] корреляционная функция аппроксимируется выражением

$$K(\rho) = e^{-\gamma|\rho|} \left(\cos(\beta\rho) + \frac{\gamma}{\beta} \sin(\beta|\rho|) \right), \quad (5)$$

где γ, β — постоянные величины.

Численные расчеты выполнены для дисперсий приведенных скоростей деформаций $D\left[\frac{\dot{\epsilon}_p}{cq^n}\right]$ в безразмерных величинах. Рассматривалась толстостенная труба с внутренним и наружным радиусами соответственно $a = 1$, $b = 2$.

Расчеты выполнялись при различных значениях γ, β . На рис. 1 изображены графики дисперсий приведенных скоростей деформаций $D\left[\frac{\dot{\epsilon}_p}{cq^n}\right]$ в зависимости от радиуса ρ , вычисленных с учетом первого, второго, третьего и четвертого приближений при $\gamma = 10$, $\beta = 30$, $\alpha = 0,3$ и $n = 5$.

На рис. 2 изображены графики дисперсий приведенных скоростей деформаций $D\left[\frac{\dot{\epsilon}_p}{cq^n}\right]$ в зависимости от параметра нелинейности установившейся ползучести n , вычисленных с учетом первого, второго, третьего и четвертого приближений при $\gamma = 10$, $\beta = 30$, $\alpha = 0,3$ и $\rho = 1,5$.

Как следует из представленных данных, четвертое приближение вносит несущественную поправку в аналитическое решение, и в практических расчетах достаточно ограничиваться лишь первыми тремя приближениями.

2. Помимо отмеченных выше приближенных аналитических методов, существующие численные подходы решения стохастических краевых задач ползучести базируются на методе статистических испытаний (Монте-Карло) и сводятся к многократному численному решению

Р и с. 1. Графики дисперсий приведенных скоростей деформаций $D\left[\frac{\dot{\epsilon}_p}{cq^n}\right]$ в зависимости от радиуса ρ при $\gamma = 10$, $\beta = 30$, $\alpha = 0,3$ и $n = 5$: 1 — с учетом первого приближения, 2 — с учетом второго приближения, 3 — с учетом третьего приближения, 4 — с учетом четвертого приближения

Р и с. 2. Графики дисперсий приведенных скоростей деформаций $D\left[\frac{\dot{\epsilon}_p}{cq^n}\right]$ в зависимости от параметра n при $\gamma = 10$, $\beta = 30$, $\alpha = 0,3$ и $\rho = 1,5$: 1 — с учетом первого приближения, 2 — с учетом второго приближения, 3 — с учетом третьего приближения, 4 — с учетом четвертого приближения

детерминированных краевых задач для сгенерированных случайных реализаций с последующей статистической обработкой результатов расчета напряженно-деформированного состояния [8–10].

Рассмотрим процедуру решения поставленной краевой задачи (1)–(4) на основе метода Монте-Карло.

Численный метод решения детерминированной краевой задачи ползучести для толстостенной трубы под действием внутреннего давления P приведен в [11, 12], согласно которому основные окончательные расчетные формулы для напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы при ползучести имеют вид:

$$\sigma_r^0(r, t) = \frac{P \cdot a^2}{b^2 - a^2} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \right] + \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \left[\int_a^r \frac{g(x, t)}{x} dx - \frac{b^2}{b^2 - a^2} \int_a^b \frac{g(x, t)}{x} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) dx \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E}{2(1-\nu^2)r^2} \times \left[\frac{a^2b^2}{b^2-a^2} \int_a^b \frac{g(x,t)}{x} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) dx - \int_a^r g(x,t) x dx \right]; \\
\sigma_\Theta^0(r,t) &= \frac{Pa^2}{b^2-a^2} \left[1 + \frac{b^2}{r^2} \right] - \frac{E}{2(1-\nu^2)} \cdot \frac{b^2}{b^2-a^2} \cdot \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \right] \int_a^b \frac{g(x,t)}{x} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) dx + \\
& + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r^2} \int_a^r g(x,t) x dx + \int_a^r \frac{g(x,t)}{x} dx \right]; \\
\varepsilon_z(t) &= \frac{2}{b^2-a^2} \left\{ \int_a^b \left[e_z^p(r,t) + p_z(r,t) \right] r dr - \frac{\nu}{E} \int_a^b \left[\sigma_\Theta^0(r,t) + \sigma_r^0(r,t) \right] r dr \right\}; \\
\sigma_z^0(r,t) &= \frac{1}{E} \left[\varepsilon_z(t) - e_z^p(r,t) - p_z(r,t) \right] + \nu (\sigma_\Theta^0 + \sigma_r^0); \\
\varepsilon_i(r,t) &= \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \sigma_i^0(r,t) - \nu J^0 \right\} + e_i^p(r,t) + p_i(r,t) \quad (i = r, \Theta), \tag{6}
\end{aligned}$$

где a и b — внутренний и внешний радиусы трубы; σ_r^0 , σ_Θ^0 , σ_z^0 — радиальное, окружное и осевое номинальные напряжения соответственно; ε_r , ε_Θ , ε_z — радиальная, окружная и осевая полные деформации; e_r^p , e_Θ^p , e_z^p — радиальная, окружная и осевая пластические деформации; p_r , p_Θ , p_z — радиальная, окружная и осевая деформации ползучести; $J^0 = \sigma_r^0 + \sigma_z^0 + \sigma_\Theta^0$; ν , E — коэффициент Пуассона и модуль Юнга;

$$g(r,t) = p_r - p_\Theta + e_r^p - e_\Theta^p - r \frac{d(e_\Theta^p + p_\Theta)}{dr} - r\nu \frac{d(e_z^p + p_z)}{dr}. \tag{7}$$

В рассматриваемом случае все компоненты пластических деформаций в (6), (7) равны нулю, а компоненты деформации ползучести удовлетворяют соотношениям нелинейно-вязкого течения (4).

Задача (6), (7) решается шагами по времени, при этом приращения деформации ползучести на шаге Δt рассчитываются по соотношениям (4) на основе метода Эйлера.

В силу постановки стохастической краевой задачи (1)–(4) силовые и геометрические характеристики предполагались детерминированными, а вся стохастичность заложена в материале трубы через случайную функцию $U(\rho)$ с корреляционной функцией вида (5) и параметром неоднородности материала α .

Численная реализация решения стохастической краевой задачи на основе метода Монте-Карло заключается в следующем. На первом этапе исходя из вида корреляционной функции (5) осуществляется генерация случайных реализаций $U(\rho)$ ($1 \leq \rho \leq \beta$). Затем для каждой реализации $U(\rho)$ решается численно соответствующая детерминированная краевая задача на основе реологической модели (6)–(7). Затем после N раз решения краевой задачи (N — объем выборки для генерации случайных величин) находятся статистические оценки для интересующих выходных параметров (перемещения, деформации, напряжения и т.п.).

Объем выборки для генерации случайной реализации $U(\rho)$ в расчетах составил величину $N = 40$.

Для численного исследования рассматривалась толстостенная труба теми же параметрами с $a = 1$ и $b = 2$. В качестве примера на рис. 3 приведена часть сгенерированных реализаций $U(r)$ для случая $\gamma = 10$, $\beta = 30$ (см. формулу (5)).

Целью дальнейших исследований являлся анализ величин показателя нелинейности установившейся ползучести n и коэффициента вариации α на величины дисперсий скоростей деформаций $\mathfrak{E}_r$ и $\mathfrak{E}_\Phi$.

Численные расчеты, выполненные для толстостенной трубы как методом малого параметра, так и методом статистических испытаний, показали что дисперсии приведенных скоростей деформаций $D\left[\frac{\mathfrak{E}_r}{cq^n}\right]$ и $D\left[\frac{\mathfrak{E}_\Phi}{cq^n}\right]$ с увеличением n увеличиваются, причем наибольшие значения дисперсий наблюдаются вблизи внутренней поверхности трубы, а наименьшие — в окрестности наружной поверхности трубы.

На рис. 4–6 и в таблицах 1 и 2 приведены типичные зависимости для дисперсии приведенных скоростей деформаций в зависимости от параметра нелинейности установившейся ползучести n , величины α , параметров γ и β в аппроксимации для корреляционной функции вида (5) и радиуса трубы r ($1 \leq r \leq 2$).

Р и с. 3. Сгенерированные реализации случайных функций $u(r)$ в зависимости от r для случая $\gamma=10, \beta=30$

Р и с. 4. Графики дисперсий приведенных скоростей деформаций $D \left[\frac{\dot{\epsilon}_0}{cq^n} \right]$ в зависимости от параметра n при $\gamma=10, \beta=30, a=0,3$ и $r=1,5$: 1— по методу малого параметра (с учетом четвертого приближения), 2— по методу Монте-Карло

Р и с. 5. Графики дисперсий приведенных скоростей деформации в зависимости от r при $\alpha=0,3$, рассчитанных по методу Монте-Карло (1) и по методу малого параметра (2) при $n=5, \gamma=10, \beta=30$

Р и с. 6. Графики дисперсий приведенных скоростей деформации в зависимости от r при $\alpha=0,3$, рассчитанных по методу Монте-Карло (1) и по методу малого параметра (2) при $n=5, \gamma=5, \beta=20$

Т а б л и ц а 1
Дисперсии приведенных скоростей деформаций D в зависимости от n при $\gamma=10, \beta=30, \alpha=0,3$ и $r=1,5$, полученные по методу Монте-Карло и методу малого параметра

n	1	3	5	7
D (метод Монте-Карло)	0,0029	0,0056	0,0129	0,0303
D (метод малого параметра)	0,0030	0,0052	0,0120	0,0290

Дисперсии приведенных скоростей деформаций D в зависимости от n при $\gamma = 5, \beta = 20$,
 $\alpha = 0,3$ и $g = 1,5$, полученные по методу Монте-Карло и методу малого параметра

n	1	3	5	7
D (метод Монте-Карло)	0,0032	0,0064	0,0149	0,0351
D (метод малого параметра)	0,0040	0,0068	0,0160	0,0370

Выполненный детальный анализ данных расчета методом малого параметра и статистических испытаний, частично проиллюстрированный зависимостями на рис. 4–6 и данными табл. 1 и 2, позволяет утверждать, что в рассматриваемом примере для слабонеоднородных материалов ($\alpha = 0,1 \div 0,3$) значения дисперсий скоростей деформаций, полученные по обоим методам, отличаются незначительно, а это в свою очередь свидетельствует, во-первых, об адекватности как метода статистических испытаний при решении стохастической краевой задачи (1)–(5), так и приближенного аналитического решения по методу малого параметра, во-вторых, при решении стохастической краевой задачи установившейся ползучести (1)–(5) методом малого параметра достаточно ограничиться четвертым приближением.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // ПМТФ, 1988. — Т. 47, № 1. — С. 159–164.
2. Кузнецов В. А. Ползучесть стохастически неоднородных сред в условиях плоского напряженного состояния // В сб. науч. тр.: Математическая физика — Куйбышев: КПИИ, 1977. — С. 69–74.
3. Попов Н. Н. Нелинейная стохастическая задача ползучести толстостенной сферической оболочки // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ.-мат. науки», 2000. — № 9. С. 186–190.
4. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // ПМТФ, 1985. — № 2. — С. 150–155.
5. Кунташев П. А., Немировский Ю. В. О сходимости метода возмущений в задачах теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ, 1985. — № 3. — С. 75–78.
6. Должковой А. А., Попов Н. Н., Радченко В. П. Решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра // ПМТФ, 2006. — Т. 47, № 1. — С. 161–171.
7. Радченко В. П., Попов Н. Н. Статистические характеристики полей напряжений и деформаций при установившейся ползучести стохастически неоднородной плоскости // Изв. вузов. Машиностроение, 2006. — № 2. — С. 3–11.
8. Радченко В. П., Симонов А. В., Дудкин С. А. Стохастический вариант одномерной теории ползучести и длительной прочности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ.-мат. науки», 2001. — № 12. — С. 73–85.
9. Радченко В. П., Симонов А. В., Кубышкина С. Н. Об одном подходе к решению стохастической краевой задачи для толстостенной трубы под действием внутреннего давления в условиях реологического деформирования и разрушения материалов // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. одиннадцатой межвуз. конф. — Ч. 1. — Самара: СамГТУ, 2001. — С. 152–156.
10. Радченко В. П., Симонов А. В. Практические аспекты применения метода статистических испытаний к решению краевых задач с учетом реологических свойств материалов // Обзорные прикладной и промышленной математики. Материалы 2 Всерос. симп. по промышленной и прикладной математике. — М.: Изд-во ТВП, 2001. — Т. 8, Вып. 1. — С. 299.
11. Радченко В. П., Еремин Ю. А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. — М.: Машиностроение-1, 2004. — 265 с.
12. Радченко В. П., Кубышкина С. Н. Математическая модель реологического деформирования и разрушения толстостенной трубы // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: «Физ.-мат. науки», 1998. — № 6. — С. 23–35.

Поступила 7.11.2006 г.