Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Степанова, Н. А. Хомутских, Собственные значения в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенным определяющим законом, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 124–131

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:37:42

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ТРЕЩИНЕ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА В МАТЕРИАЛЕ СО СТЕПЕННЫМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ ЗАКОНОМ

Приведено исследование собственных значений в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенным определяющим законом. Дано обобщение метода годографа для определения всего спектра собственных значений задачи. Показано, что собственные значения могут быть найдены также с помощью численного анализа и аналитически с помощью метода возмущений. Установлено, что все три метода приводят к одинаковым результатам. Приведены некоторые собственные числа для различных значений показателя степени определяющего закона.

В последнее время в современной механике разрушения особый интерес вызывает проблема исследования собственных значений в классической задаче нелинейной механики разрушения — задаче Хатчинсона–Райса–Розенгрена (HRR) [1–6]. Речь идет об исследовании напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в материале со степенным определяющим законом. Одним из широко распространенных подходов исследования является метод разложения по собственным функциям [7], приводящий к обыкновенным дифференциальным уравнениям, и затем — к задаче на собственные значения.

Необходимо отметить, что одно собственное значение, соответствующее задаче HRR [1, 2, 8–10], известно и определяется из дополнительного условия физического характера [8, 10]. Однако сейчас признана необходимость отыскания всего спектра собственных чисел задачи, и этой проблеме посвящается большое количество работ [3–6, 11]. К сожалению, до сих пор не найдена аналитическая зависимость собственного значения от показателя степени определяющего уравнения (и, например, от собственного значения, отвечающего линейной задаче) для трещин типов I и II. Имеются лишь отдельные результаты, носящие приближенный характер [3, 4, 6].

Целью настоящей работы является нахождение всего спектра собственных значений для трещины антиплоского сдвига с помощью разных подходов, а именно: посредством численного анализа, с помощью обобщения метода годографа и с помощью метода возмущений, а также сравнение полученных результатов. Проведенные исследования позволят пролить свет на решения более сложных (с математической точки зрения) задач о трещине нормального отрыва и поперечного сдвига.

1. Постановка задачи о трещине антиплоского сдвига в материале со степенным определяющим законом. В случае антиплоского сдвига перемещения происходят только в направлении, перпендикулярном плоскости, содержащей трещину. Предположим, что $u_1 = u_2 = 0$ и $u_3 = u_3(x_1, x_2)$. Тогда только касательные напряжения τ_{31}, τ_{32} и сдвиговые деформации

$$\gamma_{31} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \gamma_{32} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

будут отличны от нуля. Условие совместности деформаций имеет вид

$$\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{32}}{\partial x_1} = 0. \quad (1)$$

В данном случае должно удовлетворяться единственное уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что соотношение между интенсивностью касательных напряжений τ и интенсивностью деформаций сдвига γ , где

$$\tau = (\tau_{31}^2 + \tau_{32}^2)^{1/2}; \quad \gamma = (\gamma_{31}^2 + \gamma_{32}^2)^{1/2},$$

остается линейным вплоть до достижения предела текучести $\tau_0: \gamma(\tau) = \gamma_0(\tau/\tau_0)$ ($\tau \leq \tau_0$), а затем представляется изотропным нелинейным соотношением

$$\gamma(\tau) = \gamma_0(\tau/\tau_0)^n \quad (\tau > \tau_0), \quad (3)$$

в индексной записи

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_0} = \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{n-1} \frac{\tau_i}{\tau_0},$$

или соответственно $\tau(\gamma) = \tau_0(\gamma/\gamma_0)^{1/n}$ ($\gamma > \gamma_0$). Значение $n = \infty$ отвечает идеальной пластичности, а $n = 1$ — идеальной упругости.

Добавив к уравнениям (1) и (2) соотношение (3) между напряжением и деформацией, в общем случае получим нелинейные уравнения, которые должны быть решены с учетом соответствующих граничных условий, а именно, условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\tau_{32} = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 < 0$$

и условия симметрии на продолжении трещины

$$\tau_{31} = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 > 0.$$

2. Метод разложения по собственным функциям. Постановка задачи. В полярных координатах (r, θ) с полюсом в вершине трещины уравнение равновесия и условие совместности соответственно имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\gamma_{\theta z}) = \frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial \theta}. \quad (5)$$

Введем скалярную потенциальную функцию

$$\Phi(r, \theta) = r^\omega f(\theta), \quad (6)$$

такую, что

$$\tau_{rz}(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = r^{\omega-1} f'(\theta); \quad \tau_{\theta z}(r, \theta) = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\omega r^{\omega-1} f(\theta). \quad (7)$$

Тогда уравнение равновесия (4) выполняется тождественно, а условие совместности (5) постулирует единственное нелинейное уравнение для единственной неизвестной функции $\Phi(r, \theta)$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ -r \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\}. \quad (8)$$

Поскольку компоненты тензора деформаций согласно степенному определяющему закону (3) имеют вид

$$\gamma_{ij} = \frac{3}{2} \frac{f(\tau)}{\tau} \tau_{ij}; \quad f(\tau) = B\tau^n,$$

где $\tau = \sqrt{\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2} = r^\omega \sqrt{(f')^2 + \omega^2 f^2}$, получаем для γ_{rz} и $\gamma_{\theta z}$ следующие выражения компонент тензора деформаций:

$$\gamma_{rz} = \frac{3}{2} B r^{(\omega-1)n} \left[(f')^2 + \omega^2 f^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} f'; \quad \gamma_{\theta z} = \frac{3}{2} B r^{(\omega-1)n} \left[(f')^2 + \omega^2 f^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} (-\omega f).$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$f'' = \frac{-\omega[(\omega-1)n+1]f(f'^2 + \omega^2 f^2) - \omega^2(n-1)ff'^2}{(nf'^2 + \omega^2 f^2)}. \quad (9)$$

Граничные условия на берегах трещины есть условия отсутствия поверхностных усилий и следующие условия симметрии на продолжении трещины:

$$\text{при } \theta = \pi \quad \tau_{\theta z} = 0 \Rightarrow f(\pi) = 0, \quad (10)$$

$$\text{при } \theta = 0 \quad \tau_{rz} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0, \quad (11)$$

Таким образом, сформулирована двухточечная краевая задача (9)–(11) для функции $f(\theta)$.

Численный анализ задачи на собственные значения. Для отыскания численного решения перейдем к начальной задаче. Для этого в силу однородности обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения (9) можно поставить условие нормировки $f(0) = 1$. Таким образом, получена задача на собственные значения: необходимо найти нетривиальное решение

дифференциального уравнения (9) путем определения собственного значения ω , при котором искомая функция $f(\theta)$ удовлетворяет граничному условию (10) на верхнем берегу трещины.

Численно решая задачу Коши для уравнения (9) методом Рунге–Кутты–Фельберга, при помощи метода пристрелки определяем для различных n другие собственные значения (как меньшие, чем $n/(n+1)$, так и большие). В рассматриваемом случае метод пристрелки является однопараметрическим: необходимо найти собственное число ω , контролируя выполнение граничного условия (10). В ходе численного счета считалось, что данное граничное условие выполнено, если $|f(\pi)| \leq 10^{-6}$.

Результаты численного анализа приведены в таблице. Угловые распределения компонент тензора напряжений и интенсивности напряжений для различных значений показателя нелинейности и для различных собственных значений показаны на рис. 1 и 2.

Результаты численного анализа собственных чисел

№	ω_{-2}	ω_{-1}	$\omega_{HRR} = n/(n+1)$	ω_1	ω_2
1	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5
2	-0,941317015	-0,23029115	0,666666	1,360750117	2,099539015
3	-0,792823182	-0,183012702	0,75	1,303812609	1,947821963
4	-0,726928621	-0,164790209	0,8	1,271395576	1,865587005
5	-0,690099662	-0,155234318	0,833333	1,25	1,813321658
6	-0,6666666	-0,149366682	0,857142	1,23462682	1,776918956
7	-0,650471549	-0,145401687	0,875	1,222951453	1,75
8	-0,638619155	-0,142544449	0,888888	1,213730936	1,729232382
9	-0,629573341	-0,140388204	0,9	1,206234136	1,712695266
10	-0,622444719	-0,138703423	0,90909	1,2	1,699199179

Р и с. 1. Угловые распределения компонент тензора напряжений τ_{rz} , $\tau_{\theta z}$ и интенсивности напряжений τ для $\omega_0 = -1/2$: а — $n = 2$; б — $n = 6$; в — $n = 10$

Р и с. 2. Угловые распределения компонент тензора напряжений $\tilde{\gamma}_{rz}$, $\tilde{\gamma}_{\theta z}$ и интенсивности напряжений $\tilde{\gamma}$ для $\omega_0 = 3/2$: а — $n = 2$; б — $n = 6$; в — $n = 10$

3. Обобщение метода годографа. Классическая процедура метода годографа Нейбера–Райса. Решение Хатчинсона–Райса–Розенгрена. Нелинейные уравнения задач антиплоского сдвига приводятся к линейным уравнениям при переходе к плоскости годографа [7–9], при котором физические координаты рассматриваются как функции компонент тензора напряжений $x_1 = x_1(\tau_{31}, \tau_{32})$, $x_2 = x_2(\tau_{31}, \tau_{32})$, или, что эквивалентно, как функции компонент тензора деформаций $x_1 = x_1(\gamma_{31}, \gamma_{32})$, $x_2 = x_2(\gamma_{31}, \gamma_{32})$.

Подобные преобразования приводят уравнение равновесия и условие совместности к виду

$$\frac{\partial x_1}{\partial \tau_{31}} + \frac{\partial x_2}{\partial \tau_{32}} = 0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial \gamma_{32}} - \frac{\partial x_2}{\partial \gamma_{31}} = 0, \quad (12)$$

соответственно.

Условие совместности будет выполнено, если ввести функцию компонент тензора деформации $\Phi(\gamma_{31}, \gamma_{32})$ такую, что

$$x_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{31}}, \quad x_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{32}}. \quad (13)$$

Теперь необходимо совершить переход в уравнении равновесия от переменных τ_{31} , τ_{32} к независимым переменным γ_{31} , γ_{32} . Используя определяющие соотношения

$$\gamma_{31} = \frac{\gamma}{\tau(\gamma)} \tau_{31}, \quad \gamma_{32} = \frac{\gamma}{\tau(\gamma)} \tau_{32}$$

и соотношения (13), можно получить для Φ линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Это уравнение имеет наиболее простой вид в полярных координатах γ , φ на плоскости годографа:

$$\gamma e^{i\varphi} = \gamma_{32} - i\gamma_{31}, \quad \tau e^{i\varphi} = \tau_{32} - i\tau_{31},$$

где γ — интенсивность деформаций сдвига, φ — угол между направлением γ и осью γ_{32} .

В полярной системе координат соотношения (13) представляются в виде

$$x_1 = -\sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} - \frac{\cos \varphi}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad x_2 = \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} - \frac{\sin \varphi}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \quad (14)$$

Уравнение равновесия в полярной системе координат на плоскости годографа удовлетворяется, если

$$\frac{\tau(\gamma)}{\gamma\tau'(\gamma)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (15)$$

где $\tau'(\gamma) = d\tau/d\gamma$.

Таким образом, в плоскости годографа уравнения задачи становятся линейными. Если оказывается возможным переформулировать физические граничные условия на плоскость годографа, то решение можно будет получить аналитически.

Для того, чтобы получить аналитическую зависимость $\omega = \omega(n)$ для собственных чисел, представим решение уравнения (15) в виде

$$\Phi(\gamma, \varphi) = \gamma^\delta Z(\varphi). \quad (16)$$

Подставим (16) в (15), полагая, что $\tau(\gamma) = \gamma^{1/n}$. Для материала со степенным определяющим законом уравнение (15) в результате сводится к следующему дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$Z'' + \lambda^2 Z = 0, \quad (17)$$

где $\lambda^2 = n\delta(\delta-1) + \delta$.

Классическая процедура метода годографа осуществляет отображение поля деформаций для полубесконечной трещины на положительную полуплоскость деформации, когда угол φ на плоскости годографа изменяется в пределах: $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. В решении уравнения (17) $Z(\varphi) = A \sin(\lambda\varphi)$ величина λ определяется из граничных условий:

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = 0, \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{2}; \quad Z = 0, \quad \varphi = 0. \quad (18)$$

В этом случае $\lambda_k = 1 + 2k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \mathbf{K}$ Следовательно,

$$\delta_k = \frac{(n-1) \pm \sqrt{(n-1)^2 + 4n\lambda_k^2}}{2n}. \quad (19)$$

Имеем $\Phi(\gamma, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma^{\delta_k} Z_k(\varphi)$. Согласно (14) $r : \gamma^{\delta_k-1}$, следовательно, $\gamma : r^{1/(\delta_k-1)}$ и

$$\tau : \gamma^{1/n} : r^{\frac{1}{n(\delta_k-1)}}.$$

Таким образом, учитывая (7), получаем искомую аналитическую зависимость для ω :

$$\omega_k - 1 = \frac{1}{n(\delta_k - 1)} \quad (20)$$

или

$$\omega_k = 1 + \frac{2}{-n-1 \pm \sqrt{(n-1)^2 + 4n\lambda_k^2}}. \quad (21)$$

Обобщение метода годографа. Чтобы найти другие собственные числа, отличные от собственного числа $\omega = n/(n+1)$, соответствующего решению HRR, отобразим физическую плоскость на область (плоскости годографа), определяемую неравенствами

$$-\frac{3}{2}\pi \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi.$$

Тогда для уравнения (15) изменяются граничные условия на образах берегов трещины:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \pm \frac{3\pi}{2}.$$

Исследуя краевую задачу $Z'' + \lambda^2 Z = 0$, $\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = 0$ при $\varphi = \pm \frac{3\pi}{2}$, можно найти $Z_m(\varphi) = A_m \sin(\lambda_m \varphi)$ и $\lambda_m = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \mathbf{K}$,

$$\delta_{1,2} = \frac{(n-1) \pm \sqrt{(n-1)^2 + 4n \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}m \right)^2}}{2n}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \mathbf{K}. \quad (22)$$

Для асимптотики дальнего поля напряжений, когда $r \rightarrow \infty$, а $\gamma \rightarrow 0$, необходимо, чтобы в искомом асимптотическом разложении (16):

$$\Phi(\gamma, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma^{\delta_k} Z_k(\varphi) = \gamma^{\delta_1} Z_1 + \gamma^{\delta_2} Z_2 + \mathbf{K}$$

каждый следующий член разложения был более высокого порядка малости, чем предыдущий. Согласно (7) $\tau: r^{\omega-1}$, а $\gamma: r^{(\omega-1)n}$. С учетом (20) имеем

$$\gamma: r^{1/(\delta_m-1)}.$$

Следовательно, для $\gamma \rightarrow 0$ необходимо, чтобы $\delta_{m+1} > \delta_m > \delta_{m-1}$. Поэтому выберем собственные значения δ_m , удовлетворяющие этому условию, что соответствует знаку «+» в выражении (22) и асимптотике дальнего поля напряжений ($r \rightarrow \infty$):

$$\delta_m = \frac{(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 + 4n \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}m \right)^2}}{2n}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \mathbf{K}. \quad (23)$$

Если отобразим физическую плоскость на область $-5\pi/2 \leq \varphi \leq 5\pi/2$ плоскости годографа, получим аналогично

$$\lambda_m = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \mathbf{K}.$$

Таким образом, собственные значения на плоскости годографа δ_i и δ_{-i} ($i = 0, 1, 2, \mathbf{K}$) определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \delta_0 = \delta_{HRR} &= \frac{(n-1) - \sqrt{(n-1)^2 + 4n}}{2n} = -\frac{1}{n}, \quad \delta_1 = \frac{(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 + 36n}}{2n}; \\ \delta_{-1} &= \frac{(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 + 4n/9}}{2n}, \quad \delta_2 = \frac{(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 + 4n(25/9)}}{2n}; \\ \delta_{-2} &= \frac{(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 + 4n(9/25)}}{2n}, \quad \delta_3 = \frac{(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 + 4n(49/25)}}{2n}; \\ \delta_{-3} &= \frac{(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 + 4n(25/49)}}{2n}, \quad \delta_4 = \frac{(n-1) + \sqrt{(n-1)^2 + 4n(81/49)}}{2n}; \\ \delta_{-4} &= \mathbf{K}, \quad \delta_5 = \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (24)$$

Возвращаясь на физическую плоскость, согласно (20) получаем выражения для вычисления собственных чисел ω_i и ω_{-i} ($i = 0, 1, 2, \mathbf{K}$) соответственно:

$$\begin{aligned} \omega_{HRR} &= 1 + \frac{2}{-n-1-\sqrt{(n-1)^2 + 4n}} = \frac{n}{n+1}, \quad \omega_1 = 1 + \frac{2}{-n-1+\sqrt{(n-1)^2 + 36n}}; \\ \omega_{-1} &= 1 + \frac{2}{-n-1+\sqrt{(n-1)^2 + 4n/9}}, \quad \omega_2 = 1 + \frac{2}{-n-1+\sqrt{(n-1)^2 + 4n(25/9)}}; \\ \omega_{-2} &= 1 + \frac{2}{-n-1+\sqrt{(n-1)^2 + 4n(9/25)}}, \quad \omega_3 = 1 + \frac{2}{-n-1+\sqrt{(n-1)^2 + 4n(49/25)}}; \\ \omega_{-3} &= \mathbf{K}, \quad \omega_4 = \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (25)$$

Выбирая различные значения n , можно увидеть, что собственные числа совпадают с найденными ранее в ходе численного анализа.

4. Метод возмущений. Метод возмущений также дает возможность аналитического определения собственного числа ω как функции показателя степенного определяющего закона n и собственного числа ω_0 , отвечающего линейной задаче ($n = 1$). Впервые данный подход для

исследования собственных чисел в задаче о трещине антиплоского сдвига был применен в [11]. Его преимущество состоит в том, что он применим к более сложным (чем случай антиплоского сдвига) задачам.

Для того чтобы найти аналитическое выражение для собственных чисел нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (9), представим собственное число ω в форме

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon, \quad (26)$$

где ε — отклонение собственного значения ω для произвольного n от собственного значения ω_0 , отвечающего линейной задаче. Представим показатель упрочнения n и функцию $f(\theta)$, входящую в выражение (6), в виде

$$n(\varepsilon, \omega_0) = 1 + \varepsilon n_1(\omega_0) + \varepsilon^2 n_2(\omega_0) + \mathbf{K} + \varepsilon^k n_k(\omega_0) + \mathbf{K}, \quad (27)$$

$$f(\varepsilon, \theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \mathbf{K}, \quad (28)$$

где n_0 и $f_0(\theta)$ относятся к линейной задаче. Подставим (26), (27) и (28) в уравнение (9), удерживая в асимптотических разложениях $n(\varepsilon, \omega_0)$ и $f(\theta)$ слагаемые вплоть до ε^2 . Собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε , можно найти последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_0, f_1, f_2, \mathbf{K}$:

$$\varepsilon^0: f_0'' + \omega_0^2 f_0 = 0; \quad (29)$$

$$\varepsilon^1: f_1'' + \omega_0^2 f_1 = -f_0 \omega_0 (n_1(\omega_0 - 1) + 2); \quad (30)$$

$$\varepsilon^2: f_2'' + \omega_0^2 f_2 = -f_0 \left[\omega_0 (n_2(\omega_0 - 1) + n_1) - 1 \right] - 2\omega_0 n_1 \frac{f_0 f_0'^2}{f_0'^2 + \omega_0^2 f_0^2}. \quad (31)$$

Уравнение (29) описывает линейную задачу, решение которой, удовлетворяющее граничным условиям $f_0(\theta = 0) = 0$, $f_0'(\theta = \pi) = 0$, имеет вид

$$f_0(\theta) = A \cos(\omega_0 \theta). \quad (32)$$

Используя это решение, можно легко определить решения следующих уравнений, последовательно находя функции $f_1, f_2, \mathbf{K}$. Принимая обычное предположение, согласно которому секулярные слагаемые должны исчезать в решении, получаем последовательность условий для определения $n_1, n_2, \mathbf{K}$. В результате для случая, когда $\omega_0 \neq 1/2$, асимптотическое разложение (27) для показателя упрочнения принимает вид [11]

$$n(\varepsilon, \omega_0) = 1 + \frac{\omega_*}{\omega_0 - \omega_*} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\varepsilon}{\omega_0 - \omega_*} \right)^k - \frac{1}{\omega_0 - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\varepsilon}{\omega_0 - 1} \right)^k = \frac{\omega}{\omega - \omega_*} - \frac{\omega}{\omega - 1}, \quad (33)$$

$$\text{где } \omega_* = \frac{\omega_0^2}{2\omega_0 - 1}.$$

Разрешая (33) относительно ω , получаем следующую аналитическую зависимость:

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0^2(n+1) + (2\omega_0 - 1)(n-1)}{2n(2\omega_0 - 1)} \pm \frac{(\omega_0 - 1)\sqrt{\omega_0^2(n+1)^2 - (2\omega_0 - 1)(n-1)^2}}{2n(2\omega_0 - 1)}.$$

Непосредственная проверка корней ω_1 и ω_2 позволяет заключить, что искомая зависимость $\omega = \omega(n, \omega_0)$ имеет вид:

$$\omega = \frac{\omega_0^2(n+1) + (2\omega_0 - 1)(n-1)}{2n(2\omega_0 - 1)} + \frac{(\omega_0 - 1)\sqrt{\omega_0^2(n+1)^2 - (2\omega_0 - 1)(n-1)^2}}{2n(2\omega_0 - 1)}. \quad (34)$$

Для $\omega_0 = 1/2$ асимптотическое разложение показателя упрочнения принимает форму

$$n = 1 - \frac{1}{\omega_0 - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\varepsilon}{\omega_0 - 1} \right)^k = -\frac{\omega}{\omega - 1}, \quad (35)$$

что эквивалентно равенству $\omega = n/(n+1)$ и соответствует задаче HRR.

Необходимо отметить, что если указать значение ω_0 , то формула (34) приобретает тот же вид, что и выражение для вычисления ω , полученное при помощи метода годографа. Выбирая

различные значения n , также можно увидеть, что собственные числа совпадают с найденными ранее в ходе численного анализа и приведенными в таблице.

Выводы и обсуждение результатов. Таким образом, показано, что собственные значения в задаче о трещине антиплоского сдвига в материале со степенным определяющим законом могут быть найдены с помощью численного анализа полученной задачи на собственные значения, с помощью обобщенного метода годографа и метода возмущений.

Установлено, что все три метода приводят к одинаковым результатам, однако последние два подхода дают аналитические зависимости, связывающие искомое собственное значение и показатель нелинейности, тогда как численный анализ позволяет отыскать лишь числовые значения (см. таблицу).

Необходимо отметить, что к задачам о трещине типов I и II, по-видимому, применим лишь метод возмущений, поскольку численный анализ приведет к многопараметрическому методу пристрелки, результаты которого не являются надежными и требуют проверки и дополнительного обоснования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Hutchinson J. W.* Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material // *J. Mech. Phys. Solids*, 1968. — Vol. 16. — P. 13–31.
2. *Rice J. R., Rosengren G. F.* Plane strain deformation near a crack-tip in a power-law hardening material // *J. Mech. Phys. Solids*, 1968. — Vol. 16. — P. 1–12.
3. *Filippi S., Ciavarella M., Lazzarin P.* An approximate, analytical approach to the ‘HRR’-solution for sharp V-notches // *Int. J. of Fracture*, 2002. — Vol. 117. — P. 269–286.
4. *Chen D. H., Ushijima K.* Plastic stress singularity near the tip of a V-notch // *Int. J. of Fracture*, 2000. — Vol. 106. — P. 117–134.
5. *Hui C. Y., Ruina A.* Why K? High order singularities and small scale yielding // *Int. J. of Fracture*, 1995. — Vol. 72. — P. 97–120.
6. *Meng L., Lee S. B.* Eigenspectra and orders of singularity at a crack tip for power-law creeping medium // *Int. J. of Fracture*, 1998. — Vol. 92. — P. 55–70.
7. *Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В.* Нелинейная механика разрушения. — Самара: Сам. ун-т, 2001. — 632 с.
8. *Райс Дж.* Математические методы в механике разрушения / В кн.: Разрушение. Т.2. Математические основы теории разрушения / Под ред. Либовица. — М.: Мир, 1975. — С. 204–335.
9. *Райс Дж.* Напряжения, обусловленные острым вырезом в упрочняющемся упруго-пластическом материале при продольном сдвиге. // Труды американского общества инженеров-механиков. Серия E: Прикладная механика, 1967. — № 2. — С. 32–46.
10. *Хеллан К.* Введение в механику разрушения. — М.: Мир, 1988. — 364 с.
11. *Anheuser M., Gross D.* Higher order fields at crack and notch tips in power-law materials under longitudinal shear // *Arch. of Appl. Mech.*, 1994. — No. 64. — P. 509–518.

Поступила 28.04.2006 г.