Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Герасимов, С. В. Жуйко, Плоские траектории в классической задаче двух неподвижных центров Эйлера, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 140–145

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu464>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:33:30

ПЛОСКИЕ ТРАЕКТОРИИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ ЭЙЛЕРА

Проведена классификация ограниченных траекторий в плоском варианте задачи двух неподвижных центров Эйлера. Показано, что всего существует 24 типа возможных траекторий.

Задача двух неподвижных центров была введена Л. Эйлером [1] в 1760 г. и до сих пор является одной из фундаментальных задач небесной механики. Рассмотрим ее постановку. Предположим, что на плоскости OXY находятся две неподвижные материальные точки (центры) P_1 и P_2 с массами m_1 и m_2 , под действием ньютоновского притяжения которых в этой же плоскости движется материальная точка P массы m . Длину отрезка $[P_1, P_2]$ будем считать равной $2c$ и для определенности положим, что $m_1 \geq m_2$.

Выберем прямоугольную систему координат OXY таким образом, чтобы центры P_1 и P_2 располагались на оси OX и были равноудалены от начала координат, т.е. их координаты были равны $(-c, 0)$ и $(c, 0)$, соответственно. Тогда величины r_1 и r_2 , определяемые формулами

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

будут представлять расстояния точки P от центров P_1 и P_2 (рис. 1).

Дифференциальные уравнения движения точки P , притягиваемой центрами P_1 и P_2 с силами, обратно пропорциональными квадратам расстояний, запишутся в следующем виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -fm_1 \frac{x+c}{r_1^3} - fm_2 \frac{x-c}{r_2^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -fm_1 \frac{y}{r_1^3} - fm_2 \frac{y}{r_2^3}, \quad (1)$$

где f — гравитационная постоянная; t — время.

Решение задачи двух неподвижных центров заключается в интегрировании этих уравнений, т.е. в нахождении координат (x, y) точки P как функций времени, удовлетворяющих уравнениям движения (1) с заданными начальными условиями.

После введения эллиптических координат $\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2}$, $\mu = \frac{r_1 - r_2}{2}$ и выбора системы единиц, в которой расстояние центров P_1 и P_2 до начала координат и величина гравитационной постоянной равнялись бы единицам, первые интегралы задачи можно записать в виде

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = L(\lambda), \quad \left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 = M(\mu). \quad (2)$$

Здесь дифференцирование производится по независимой переменной — собственному времени τ , задаваемому уравнением

$$dt = (\lambda^2 - \mu^2)d\tau.$$

Стоящие в правых частях многочлены $L(\lambda)$ и $M(\mu)$, называемые основными полиномами, имеют следующий вид [2]

$$L(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(g\lambda^2 + 2n_1\lambda - \gamma), \quad M(\mu) = (\mu^2 - 1)(g\mu^2 + 2n_2\mu - \gamma),$$

где $g = \frac{1}{2}h$, h — постоянная энергии и γ — постоянная интегрирования, а коэффициенты n_1 и n_2 определяются соотношениями $n_1 = m_1 + m_2$, $n_2 = m_1 - m_2$.

Согласно определению эллиптических координат выполняются неравенства

$$\lambda \geq 1 \geq \mu \geq -1, \quad (3)$$

и, кроме того, из уравнений (2) следует, что для действительных движений должны быть выполнены еще два неравенства

$$L(\lambda) \geq 0, \quad M(\mu) \geq 0. \quad (4)$$

Для того чтобы траектории точки P существовали в действительности, необходимо найти варианты расположений корней основных полиномов при одновременном выполнении нера-

венств (3) и (4). На этой идее построен весь дальнейший анализ проблемы, — задача построения классификации сведена к анализу расположения кратных корней полиномов $L(\lambda) = 0$, $M(\mu) = 0$ на плоскости постоянных интегрирования (g, γ) . Такой анализ проведен в работе [2], где установлено, что для траекторий, расположенных в одной плоскости, всего существует 47 вариантов расположения корней $L(\lambda)$ и $M(\mu)$, отвечающих реальным движениям точки P (41 вариант для случая неравных масс и 6 — для равных масс). В работе [3] проведен дополнительный анализ расположения кратных корней при неравных значениях масс притягивающих центров.

Рассмотрим правые части уравнений (2), описывающих скорости изменения эллиптических координат точки P . Бросается в глаза их схожесть. Действительно, если при $m \neq 1$ в полиноме $L(\lambda)$ поменять координату λ на μ и коэффициент n_1 на n_2 , то мы получим полином $M(\mu)$, равно как и наоборот: $L(\mu, n_2) = M(\mu)$, $M(\lambda, n_1) = L(\lambda)$.

Исходя из этого свойства основных полиномов и упрощая последующий анализ, введем такую вспомогательную изображающую точку P' , что производная от ее текущей координаты q по независимой переменной τ определится бы уравнением

$$\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 = R(q),$$

правая часть которого явилась бы полиномом четвертой степени. Тогда сопряженный координате q импульс p будет задаваться формулой $\frac{dq}{d\tau} = p$.

После несложных выкладок найдем скорость его изменения:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{d^2q}{d\tau^2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{R(q)}} \frac{dR(q)}{dq} \frac{dq}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{dR(q)}{dq},$$

и, образуя далее гамильтониан

$$H(q, p) = \frac{1}{2} [p^2 - R(q)], \quad (5)$$

мы можем составить каноническую систему, описывающую движение вспомогательной точки единичной массы в поле с потенциальной энергией $\frac{1}{2}R(q)$:

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (6)$$

Независимость гамильтониана от τ означает существование интеграла энергии $H(q, p) = \text{const}$. Таким образом, движение изображающей точки P' происходит на плоскости (q, p) по линиям постоянной энергии, т.е. по линиям уровня функции $H(q, p)$ (рис. 2).

Р и с. 2. Типы траекторий для изображающей точки

Таким образом, после анализа расположения кратных корней основных полиномов для заданных значений постоянных интегрирования, можно сгруппировать различные типы изменения координат λ и μ и представить характеристику траектории точки P в операторном виде $Z(\lambda, \mu) = (n, m)$, где n, m — целые числа, отвечающие соответствующему типу изменения λ и μ .

Результаты анализа представлены ниже в двух таблицах. Рассмотрим сначала классификацию вырожденных и асимптотических траекторий (табл. 1).

Первый столбец (1) указывает тип траектории по классификации данной работы, (2) — соответствующая область с номером N по классификации, предложенной в статье [3], (3) — характеристика траектории, представленная в операторном виде $Z(n, m)$, (4) — начальное значение координаты λ , (5) — начальное значение координаты μ . В последнем столбце (6) указан номер соответствующего рисунка.

Классификация вырожденных и асимптотических траекторий

Тип	N	$Z(n, m)$	Λ_0	M_0	Рис.
I	2	3	4	5	6
1	8	(1, 1)	1	x_L	3
2	8	(1, 3)	1	$(-1, x_L)$	3
3	8	(1, 3)	1	$(x_L, 1)$	3
4	7	(2, 2)	1	$(-1, \mu_1]$	4
5	7	(2, 2)	1	$[\mu_2, 1)$	4
6	1, 42	(2, 2)	$[\lambda_2, 1)$	-1	5
7	1, 42	(2, 2)	$[\lambda_2, 1)$	1	5
8	15, 16, 43	(2, 2)	$[\lambda_2, 1)$	$(-1, 1)$	6
9	20	(1, 2)	λ_2	$[-1, 1]$	6
10	9	(2, 1)	λ_2	M_1	7
11	9	(2, 3)	λ_2	$[-1, \mu_1)$	7
12	9	(2, 3)	λ_2	$(\mu_1, 1]$	7
13	4, 5	(2, 3)	$[\lambda_2, 1]$	$[-1, 1)$	8
14	12, 13, 17	(3, 2)	$[\lambda_2, 1]$	$[-1, 1]$	9

К первому типу траекторий точки P отнесем точку либрации x_L , находясь в которой и имея нулевую скорость, точка P будет оставаться в неподвижности, однако отметим неустойчивость этого решения. В последующих типах траекторий точки P она находится либо *слева* (тип 2), либо *справа* (тип 3) относительно x_L и асимптотически приближается к ней по оси OX , не достигая ее за конечный промежуток времени (рис. 3).

Типы 4 и 5 траекторий характеризуются тем, что движение точки P происходит по полуинтервалам оси OX — $(P_1, \mu_1]$ и $(P_2, \mu_1]$ соответственно (рис. 4). В случае типов 6 и 7 траекторий точка P движется по соответствующим полуинтервалам оси OX — $[\lambda_2, P_1]$ и $(P_2, \lambda_2]$ (рис. 5). Траектории, при которых точка P может двигаться по всему интервалу (P_1, P_2) , отнесем к типу 8. Случай, когда точка P может двигаться по эллипсу $\lambda = \lambda_2$, отнесем к типу 9 (рис. 6).

Р и с. 3
 $\lambda = \lambda_2$

Р и с. 4

Р и с. 5

Р и с. 6

Р и с. 7

Р и с. 8

В последующем 10-м типе траекторий точка P движется по отрезку гиперболы $\mu = \mu_1$, ограниченному эллипсом $\lambda = \lambda_2$. 11-ый тип характеризуется тем, что точка P совершает колебательные движения по «змееобразной» траектории внутри эллипса $\lambda = \lambda_2$ и асимптотически приближается *слева* к отрезку гиперболы $\mu = \mu_1$, не достигая его за конечный промежуток времени. Когда точка P точно таким же образом приближается *справа* к отрезку гиперболы $\mu = \mu_1$, то это — 12-ый тип движения (рис. 7). Тип 13 — точка P совершает «змееобразные» движения по обе стороны оси OX внутри эллипса $\lambda = \lambda_2$ и асимптотически приближается к отрезку $(P_2, \lambda_2]$, не достигая его за конечный промежуток времени (рис. 8). Тип 14 — траектория точки P ограничена эллипсом $\lambda = \lambda_2$ и асимптотически навивается на отрезок $[P_1, P_2]$, не достигая его за конечный промежуток времени (рис. 9).

Р и с. 9

Обратимся теперь к невырожденным траекториям точки P , характеристики которых с сохранением прежних обозначений представлены в табл. 2. Если в первом столбце тип траектории указан в скобках, то это означает, что отношение периодов (T_μ / T_λ) изменения координат λ и μ является числом иррациональным. Если тип траектории приведен без скобок, то эти периоды связаны соотношением $k_1 T_\lambda - k_2 T_\mu = 0$, где k_1 и k_2 — целые числа.

В этом случае траектория является замкнутой кривой, а движение по ней периодично, т.е. при изменении τ на величину $T = k_1 T_\lambda = k_2 T_\mu$, переменные λ и μ принимают прежние значения. В последнем столбце указан номер соответствующего рисунка.

Т а б л и ц а 2

Классификация невырожденных траекторий

Тип	N	$Z(n, m)$	λ_0	μ_0	Рис.
15 (16)	2, 3, 6	(2, 2)	$[\lambda_2, 1]$	$[-1, \mu_1 < 0]$	10
17 (18)	2, 3, 6	(2, 2)	$[\lambda_2, 1]$	$[-1, \mu_1 > 0]$	11
19 (20)	6	(2, 2)	$[\lambda_2, 1]$	$[\mu_1 > 0, 1]$	12
21 (22)	18, 19, 21	(2, 2)	$[\lambda_1, \lambda_2]$	$[-1, 1]$	13
23 (24)	10, 11	(2, 2)	$(1, \lambda_2]$	$[-1, 1]$	14

Траектории типов 15–20 размещаются в части плоскости, ограниченной эллипсом $\lambda = \lambda_2$ и гиперболой $\mu = \mu_1$. Причем для типов 15 и 16 текущее значение $\mu_1 < 0$ (рис. 10). Для типов 17 и 18 траекторий — $\mu_1 > 0$ (рис. 11). В случае типов 19 и 20 траекторий текущее значение $\mu_1 > 0$ (рис. 12). Как следует из приведенных ранее рассуждений об отношении периодов изменения координат λ и μ , типы траекторий 15, 17 и 19 являются замкнутыми, а типы 16, 18 и 20 траекторий характеризуют такое движение точки P , когда она всюду плотно заполняет область плоскости, в которой движение возможно (заштриховано).

Траектории типов 21 и 22 располагаются между эллипсами $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, вложенными один в другой (рис. 13, *а*), причем в первом случае траектории являются замкнутыми, а во втором — точка P всюду плотно заполняет доступную ей область плоскости (рис. 13, *б*). Аналогичное утверждение верно и для типов траекторий 23 и 24, которые размещаются в части плоскости, ограниченной эллипсом $\lambda = \lambda_2$ (рис. 14).

Р и с. 14

Таким образом, классифицированы 24 типа плоских ограниченных траекторий в задаче двух неподвижных центров Эйлера, другие движения математически невозможны. Отметим, что все исследование было построено только на качественном анализе первых интегралов без получения аналитического решения задачи. Такой подход может принести успех только при отрицательных значениях постоянной энергии h . Для проведения классификации неограниченных траекторий ($h > 0$) необходимо для пользы дела привлекать математический аппарат функций Вейерштрасса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Euler L. Probleme un corps étant attiré an raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver les cas o'u la courbe décrite par ce corps sera algébrique // *Histoire de L'Académie Royale des sciences et Belles-lettres*, (1760), 1767. — Vol. XVI. — P. 228–249.
2. Герасимов И. А., Винников Е. Л. Определение областей возможных движений в задаче двух неподвижных центров // *Тр. ГАИШ*, 2000. — Т. 68. — С. 31–85.
3. Герасимов И. А., Жуйко С. В. Исследование первых интегралов в задаче двух неподвижных центров Л. Эйлера. // *Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. Второй Всерос. научн. конф.* — Ч. 3. — Самара: СамГТУ, 2005. — С. 74–81.

Поступила 19.06.2006 г.