Общероссийский математический портал

Э. Я. Рапопорт, В. Н. Митрошин, Д. И. Кретов, Оптимальное управление процессом охлаждения полимерной кабельной изоляции при ее наложении на экструзионной линии, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006, выпуск 43, 146–153

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu465>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 13:31:32

Математическое моделирование

УДК 681.5:621.315

Э. Я. Рапопорт, В. Н. Митрошин, Д. И. Кретов

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ОХЛАЖДЕНИЯ ПОЛИМЕРНОЙ КАБЕЛЬНОЙ ИЗОЛЯЦИИ ПРИ ЕЕ НАЛОЖЕНИИ НА ЭКСТРУЗИОННОЙ ЛИНИИ

Решена задача оптимизации по выбранному критерию качества процесса охлаждения полимерной кабельной изоляции при ее наложении на экструзионной линии при управлении по пространственному распределению температуры воды в охлаждающих ваннах, обеспечивающему в условиях заданных ограничений достижение требуемой точности приближения к заданному конечному распределению температуры изоляции.

Изолирование токопроводящих жил кабелей связи, как правило, осуществляется на экструзионных линиях. Охлаждение наложенной методом экструзии расплавленной пластмассовой изоляции происходит в процессе непрерывного движения кабельной жилы через водяные ванны охлаждения с заданной постоянной скоростью. При этом проблема оптимизации режима охлаждения изоляции сводится к выбору управления по граничным условиям за счет изменения температуры воды в ваннах охлаждения, обеспечивающего в условиях заданных ограничений получение требуемого распределения температуры изоляции на выходе из участка охлаждения с заданной точностью при экстремальном значении выбранного критерия качества [1]. Адекватные реальным условиям модели подобных процессов должны рассматриваться в классе задач управления с распределенными параметрами.

В линейном приближении двумерное температурное поле изоляции $\theta_2(x, l)$ и медного проводника $\theta_1(x, l)$ изолированной кабельной жилы, перемещающейся в охлаждающей ванне со скоростью V , для стационарного режима охлаждения описывается в относительных единицах системой уравнений в частных производных [2]:

$$\frac{\partial^2 \theta_1(x, l)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \theta_1(x, l)}{\partial x} - \gamma^2 \cdot \text{Pe}_1 \cdot \frac{\partial \theta_1(x, l)}{\partial l} = 0; \quad l \in [0, l^0]; \quad x \in [0, x_1]; \quad x_1 < 1; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2(x, l)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial \theta_2(x, l)}{\partial x} - \gamma^2 \cdot \text{Pe}_2 \cdot \frac{\partial \theta_2(x, l)}{\partial l} = 0; \quad l \in [0, l^0]; \quad x \in [x_1, 1] \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1(0, l)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \theta_2(1, l)}{\partial x} = -\text{Bi} \cdot [\theta_2(1, l) - \theta_v(l)]; \quad \theta_2(x_1, l) = \theta_1(x_1, l); \\ \frac{\partial \theta_2(x_1, l)}{\partial x} = \chi \cdot \frac{\partial \theta_1(x_1, l)}{\partial x}; \quad \chi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad \theta_1(x, 0) = \theta_2(x, 0) = \theta_1^0(x) = \theta_2^0(x) = \frac{T_p}{T^*}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\theta_2 = \frac{T_2}{T^*}$; $\theta_1 = \frac{T_1}{T^*}$; $l = \frac{z}{L}$; $x = \frac{r}{R_{\text{из}}}$; $\gamma = \frac{R_{\text{из}}}{L}$; $\text{Pe}_1 = \frac{V \cdot L}{a_1}$; $\text{Pe}_2 = \frac{V \cdot L}{a_2}$; $x_1 = \frac{r_0}{R_{\text{из}}}$; T_1 — тем-

пература проводника; T_2 — температура изоляции; T^* — температура приведения (плавления полимера); r — текущий радиус; z — продольная координата; x, l — безразмерные радиус и осевая координата соответственно; $l^0 = \frac{L_{\text{max}}}{L}$ — безразмерная длина ванн охлаждения; L_{max} — длина ванн охлаждения; L — общая длина участка охлаждения (от экструдера до тянущего устройства); r_0 — радиус внутреннего проводника; $R_{\text{из}}$ — радиус жилы по изоляции; x_1 — граница сопряжения двух неоднородных сред (изоляции и металлического проводника); V — скорость изолирования (вытяжки); Pe — число Пекле; a_1, a_2 — коэффициенты темпера-

туропроводности меди и полиэтилена низкой плотности (ПЭНП); $Bi = \frac{\alpha_n \cdot R_{из}}{\lambda_2}$ — критерий Био; α_n — коэффициента теплоотдачи на поверхности изоляции; λ_1, λ_2 — коэффициенты теплопроводности меди и ПЭНП соответственно; T_b — температура теплоносителя (воды); $\theta_B = \frac{T_b}{T^*}$ — относительная температура теплоносителя; $\theta_{10}(x), \theta_{20}(x)$ — заданные радиальные распределения температур изоляции и проводника на входе ванны охлаждения.

В качестве управляющего воздействия будем рассматривать неизменное во времени распределение температуры воды $\theta_e(l)$ вдоль участка охлаждения.

В соответствии с технологическими требованиями изготовления изолированных кабельных жил на выходе ванн охлаждения необходимо обеспечить заданную абсолютную точность ε_0 приближения результирующего радиального распределения температур $\theta_1(x, l^0); \theta_2(x, l^0)$ к требуемому состоянию $\theta_i^*(x) = \theta^* = \text{const} \quad (i = 1, 2)$:

$$\max_{x \in [0, 1]} |\theta(x, l^0) - \theta^*| \leq \varepsilon_0; \quad \theta(x, l^0) = \begin{cases} \theta_1(x, l^0), & x \in [0, x_1]; \\ \theta_2(x, l^0), & x \in [x_1, 1]. \end{cases} \quad (4)$$

Как отмечается в [3], температура изоляции на выходе последней ванны охлаждения не должна превышать 50°C , чтобы исключить возможность дальнейшей кристаллизации полимера и, соответственно, предотвратить образование деформации изоляции при намотке кабельной жилы на приемное устройство. Поэтому принимаем $\theta^* = 40^\circ\text{C}$; $\varepsilon_0 = 10^\circ\text{C}$.

Представим систему уравнений (1) и (2), описывающих соответственно температурное поле в изоляции и медном проводнике, в виде двух отдельных, формально независимых уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями. Фактически на границе $x = x_1$ идеального теплового контакта медного проводника и полимерной изоляции мы имеем граничные условия четвертого рода [4] в (3). Заменяем реальные граничные условия рассматриваемой краевой задачи в этой точке двумя различными граничными условиями: условиями второго рода для полимерной изоляции (5) и условиями первого рода для медного проводника (6):

$$\frac{\partial \theta_2(1, l)}{\partial x} = -Bi \cdot [\theta_2(1, l) - \theta_b(l)]; \quad \frac{\partial \theta_2(x_1, l)}{\partial x} = f_2(l); \quad (5)$$

$$\theta_1(x_1, l) = f_1(l), \quad (6)$$

где $f_2(l)$ и $f_1(l)$ считаются некоторыми произвольными функциями осевой координаты, которые, согласно (3), должны определяться равенствами

$$f_1(l) = \theta_2(x_1, l), \quad (7)$$

$$f_2(l) = \lambda \frac{\partial \theta_1(x_1, l)}{\partial x}, \quad (8)$$

автоматически обеспечивающими выполнение граничных условий в точке $x = x_1$ путем использования перекрестных обратных связей по выходам обоих независимых объектов [2].

Во многих случаях эффективным аппаратом исследования объектов с распределенными параметрами (ОРП) оказывается метод конечных интегральных преобразований [5].

Как отмечается в [5], моделирование ОРП краевой задачей вида (1)–(3) эквивалентно его модальному представлению бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, где в роли переменных состояния фигурируют пространственные моды по осевой координате — бесконечное число коэффициентов $z_n^{(1)}(\mu_n, l)$ и $z_n^{(2)}(\mu_n, l)$; $n = 1, 2, \dots$ разложения функций состояния объекта $\theta_1(x, l^0); \theta_2(x, l^0)$ по системе собственных функций $\varphi_n^{(1)}(\mu_n, x)$, $\varphi_n^{(2)}(\mu_n, x)$ соответствующих краевых задач (1), (6) и (2), (5). Здесь μ_n^2 — собственные числа.

При этом функции состояния объекта представляются в виде разложений в бесконечные ряды:

$$\theta_1(x, l) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)}(\mu_n, l) \varphi_n^{(1)}(\mu_n, x); \quad (9)$$

$$\theta_2(x, l) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(2)}(\mu_n, l) \phi_n^{(2)}(\mu_n, x). \quad (10)$$

Для типового линейного объекта с распределенными параметрами [6], описываемого краевой задачей:

$$A \frac{\partial^2 \theta(x, l)}{\partial l^2} + A_1 \frac{\partial \theta(x, l)}{\partial l} = C(x) \frac{\partial^2 \theta(x, l)}{\partial x^2} + B_1(x) \frac{\partial \theta(x, l)}{\partial x} + C_1(x) \theta(x, l) + f[x, l, u(x, l)],$$

$$x_{(0)} < x < x_{(1)}; \quad 0 < l < l^0; \quad (11)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0^{(0)}(x); \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial l} = \theta_0^{(1)}(x); \quad x_{(0)} \leq x \leq x_{(1)}; \quad (12)$$

$$\alpha_0 \theta(x_{(0)}, l) + \beta_0 \frac{\partial \theta(x_{(0)}, l)}{\partial x} = g_0[l, u_0(l)]; \quad 0 < l < l^0; \quad (13)$$

$$\alpha_1 \theta(x_{(1)}, l) + \beta_1 \frac{\partial \theta(x_{(1)}, l)}{\partial x} = g_1[l, u_1(l)]; \quad 0 < l < l^0; \quad (14)$$

с внутренним распределенным и граничными сосредоточенными управлениями $u(x, l)$ и $u_0(l)$, $u_1(l)$ соответственно, при постоянных $(A, A_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1)$ или координатно-зависимых $[C(x), C_1(x), B_1(x)]$ коэффициентах при использовании модального описания (9), (10), мы получаем в общем виде бесконечную систему уравнений [5]:

$$A \frac{d^2 z_n^{(i)}(\mu_n, l)}{dl^2} + A_1 \frac{dz_n^{(i)}(\mu_n, l)}{dl} = -\mu_n^2 z_n^{(i)}(\mu_n, l) + f_n^{(i)}(\mu_n, l) + R^{(i)}(\mu_n, l); \quad (15)$$

$$z_n^{(i)}(\mu_n, 0) = z_{n[0]}^{(i)}(\mu_n); \quad \frac{dz_n^{(i)}(\mu_n, 0)}{dl} = z_{n[1]}^{(i)}(\mu_n); \quad i = 1, 2; \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как в нашей задаче внутренние распределенные управления отсутствуют, то

$$f_n^{(i)}(\mu_n, l) = 0. \quad (16)$$

В роли управляющих воздействий в (15) выступают непосредственно граничные управления $u_0(l)$ и $u_1(l)$ в (13), (14), линейным образом включаемые в состав функций $R^{(i)}(\mu_n, l)$, согласно выражениям [5]

$$R^{(i)}(\mu_n, l) = R_1^{(i)}(\mu_n, l) - R_0^{(i)}(\mu_n, l);$$

$$R_j^{(i)}(\mu_n, l) = \frac{u_j(l)}{\beta_j} h(x_{(j)}) \phi_n^{(i)}(\mu_n, x_{(j)});$$

$$j = 0, 1; \quad \text{если } \beta_j \neq 0;$$

$$R_j^{(i)}(\mu_n, l) = -\frac{u_j(l)}{\alpha_j} h(x_{(j)}) \frac{d\phi_n^{(i)}(\mu_n, x_{(j)})}{dx};$$

$$j = 0, 1; \quad \text{если } \beta_j = 0; \alpha_j \neq 0;$$

$$h(x) = C(x)r(x); \quad i = 1, 2; \quad n = 0, 1, \dots$$
(17)

Здесь $C(x)$ — соответствующий коэффициент в уравнении (11) и $r(x)$ — весовая функция используемого интегрального преобразования. В данном случае для примененного преобразования Ханкеля $r(x) = x$ [4].

Теперь, обозначая коэффициенты при $u_0(l)$ и $u_1(l)$ в (17) через d_{0n} и d_{1n} , получим соответственно, что в рассматриваемых условиях

$$R^{(i)}(\mu_n, l) = d_{0n} u_0(l) + d_{1n} u_1(l), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (18)$$

$$d_{jn} = \begin{cases} (-1)^{j+1} \frac{h(x_{(j)})}{\beta_j} \varphi_n^{(i)}(\mu_n, x_{(j)}), & \text{если } \beta_j \neq 0; \\ (-1)^j \frac{h(x_{(j)})}{\alpha_j} \frac{d\varphi_n^{(j)}(\mu_n, x_{(j)})}{dx}, & \text{если } \beta_j = 0; \alpha_j \neq 0. \quad j=0,1; i=1,2. \end{cases} \quad (19)$$

Для соответствующей краевой задачи (2), (5) имеем:

$$A_1 = \gamma^2 \text{Pe}_2; \quad A = 0; \quad C = 1; \quad C_1 = 0; \quad B_1 = \frac{1}{x}; \quad \alpha_0 = \alpha_1 = 0; \quad \beta_0 = \beta_1 = 1. \quad (20)$$

Собственные функции однородной задачи для полого цилиндра с граничными условиями второго рода в соответствии [4] равны

$$\varphi_n^{(2)}(\mu_n, x) = Y_1(\mu_n) \cdot J_0\left(\mu_n, \frac{x}{x_1}\right) - J_1(\mu_n) \cdot Y_0\left(\mu_n, \frac{x}{x_1}\right), \quad (21)$$

где μ_n — положительные корни уравнения [4]

$$Y_1(\mu) \cdot J_1\left(\frac{\mu}{x_1}\right) - J_1(\mu) \cdot Y_1\left(\frac{\mu}{x_1}\right) = 0. \quad (22)$$

Здесь $J_0(\mu)$, $J_1(\mu)$ — функция Бесселя I рода нулевого порядка и ее первая производная соответственно; $Y_0(\mu)$, $Y_1(\mu)$ — функция Вебера и ее первая производная соответственно [7].

На основании (18) и (19) получаем

$$d_{0n} = -h(x_1) \cdot \varphi_n^{(2)}(\mu_n, x_1) = -x_1 [Y_1(\mu_n) \cdot J_0(\mu_n) - J_1(\mu_n) \cdot Y_0(\mu_n)]; \quad (23)$$

$$d_{1n} = h(1) \cdot \varphi_n^{(2)}(\mu_n, 1) = 1 \cdot [Y_1(\mu_n) \cdot J_0(\mu_n/x_1) - J_1(\mu_n) \cdot Y_0(\mu_n/x_1)]; \quad (24)$$

$$R^{(2)}(\mu_n, l) = -x_1 [Y_1(\mu_n) \cdot J_0(\mu_n) - J_1(\mu_n) \cdot Y_0(\mu_n)] \cdot \frac{\%}{2}(l) + \\ + \text{Bi} \cdot [Y_1(\mu_n) \cdot J_0(\mu_n/x_1) - J_1(\mu_n) \cdot Y_0(\mu_n/x_1)] \cdot \theta_b(l). \quad (25)$$

Поэтому для температурного поля изоляции, используя модальное представление ОРП, получаем в соответствии с (15) и (25) бесконечную систему описывающих его уравнений первого порядка:

$$\frac{dz_n^{(2)}(\mu_n, l)}{dl} = -\frac{\mu_n^2}{\gamma^2 \text{Pe}_2} \cdot z_n^{(2)}(\mu_n, l) - \frac{1}{\gamma^2 \text{Pe}_2} \cdot \{x_1 [Y_1(\mu_n) \cdot J_0(\mu_n) - J_1(\mu_n) \cdot Y_0(\mu_n)] \cdot \frac{\%}{2}(l) + \\ + \text{Bi} \cdot [Y_1(\mu_n) \cdot J_0(\mu_n/x_1) - J_1(\mu_n) \cdot Y_0(\mu_n/x_1)] \cdot \theta_b(l)\}; \\ z_{n[0]}^{(2)}(\mu_n, 0) = \theta_{2n}^0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Аналогично, для краевой задачи (1), (6) имеем

$$A_1 = \gamma^2 \text{Pe}_1; \quad A = 0; \quad C = 1; \quad C_1 = 0; \quad B_1 = \frac{1}{x}; \quad \alpha_0 = \alpha_1 = 1; \quad \beta_0 = \beta_1 = 0. \quad (27)$$

Собственные функции однородной задачи для сплошного цилиндра с граничными условиями первого рода в соответствии с [4] равны

$$\varphi_n^{(1)}(\mu_n, x) = J_0(\mu_n, x); \quad (28)$$

где μ_n — положительные корни уравнения [4]

$$J_1(\mu) = 0. \quad (29)$$

И в соответствии с (18) и (19) получаем

$$d_{0n} = 0; \quad d_{1n} = -h(x_1) \frac{d\varphi_n^{(1)}(\mu_n, x_1)}{dx} = -x_1 J_1(\mu_n, x_1); \quad (30)$$

$$R^{(1)}(\mu_n, l) = -x_1 J_1(\mu_n, x_1) \cdot \frac{\%}{1}(l). \quad (31)$$

Поэтому для температурного поля металлического проводника, используя модальное представление ОРП, получаем в соответствии с (17) и (26) бесконечную систему описывающих его уравнений:

$$\frac{dz_n^{(1)}(\mu_n, l)}{dl} = -\frac{\mu_n^2}{\gamma^2 \text{Pe}_1} \cdot z_n^{(1)}(\mu_n, l) - \frac{x_1 J_1(\mu_n, x_1)}{\gamma^2 \text{Pe}_1} \cdot \mathcal{J}_1^{(1)}(l); \quad z_{n[0]}^{(1)}(\mu_n, 0) = \theta_{1n}^0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Но в соответствии с граничным условиям (6) и с учетом (10) согласно (7) имеем

$$\mathcal{J}_1^{(1)}(l) = \theta_2(x_1, l) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(2)}(\mu_n, l) \phi_n^{(2)}(\mu_n, x_1). \quad (33)$$

Тогда бесконечная система уравнений (32) принимает вид

$$\frac{dz_n^{(1)}(\mu_n, l)}{dl} = -\frac{\mu_n^2}{\gamma^2 \text{Pe}_1} \cdot z_n^{(1)}(\mu_n, l) - \frac{x_1 J_1(\mu_n, x_1)}{\gamma^2 \text{Pe}_1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(2)}(\mu_n, l) \phi_n^{(2)}(\mu_n, x_1);$$

$$z_{n[0]}^{(1)}(\mu_n, 0) = \theta_{1n}^0; \quad n = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Аналогично, учитывая граничные условия (3) и (5) и принимая во внимание (8), (9), можно записать

$$\mathcal{J}_2^{(1)}(l) = \chi \cdot \frac{\partial \theta_1(x_1, l)}{\partial x} = \chi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)}(\mu_n, l) \frac{d\phi_n^{(1)}(\mu_n, x_1)}{dx}; \quad \chi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (35)$$

С учетом (35) выражение (34) принимает вид

$$\frac{dz_n^{(2)}(\mu_n, l)}{dl} = -\frac{\mu_n^2}{\gamma^2 \text{Pe}_2} \cdot z_n^{(2)}(\mu_n, l) - \frac{x_1 \cdot \chi}{\gamma^2 \text{Pe}_2} \cdot [Y_1(\mu_n) \cdot J_0(\mu_n) - J_1(\mu_n) \cdot Y_0(\mu_n)] \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)}(\mu_n, l) \frac{d\phi_n^{(1)}(\mu_n, x_1)}{dx} - \frac{\text{Bi}}{\gamma^2 \text{Pe}_2} \cdot [Y_1(\mu_n) \cdot J_0(\mu_n/x_1) - J_1(\mu_n) \cdot Y_0(\mu_n/x_1)] \cdot \theta_b(l);$$

$$z_{n[0]}^{(2)}(\mu_n, 0) = \theta_{2n}^0; \quad n = 1, 2, \dots; \quad \chi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (36)$$

Таким образом, мы получаем описание объекта управления в виде бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (34) и (36) для соответствующих коэффициентов $z_n^{(1)}(\mu_n, l)$ и $z_n^{(2)}(\mu_n, l)$; $n = 1, 2, \dots$ (пространственных мод) разложения функций состояния объекта $\theta_1(x, l^0)$; $\theta_2(x, l^0)$ по системе собственных функций.

Полученное описание рассматриваемого объекта управления с распределенными параметрами — охлаждаемой кабельной жилы, можно представить в общем виде:

$$\frac{dz_n^{(2)}(\mu_n, l)}{dl} = a_n^{(2)} z_n^{(2)}(\mu_n, l) + d_n^{(2)} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} z_k^{(1)}(\mu_k, l) + c_n^{(2)} u(l);$$

$$\frac{dz_n^{(1)}(\mu_n, l)}{dl} = a_n^{(1)} z_n^{(1)}(\mu_n, l) + d_n^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} z_k^{(2)}(\mu_k, l); \quad n = 1, 2, \dots \quad (37)$$

Здесь $u(l) = \theta_b(l)$ — управление, а соответствующие коэффициенты определяются как

$$a_n^{(2)} = -\frac{\mu_n^2}{\gamma^2 \text{Pe}_2}; \quad b_k^{(1)} = \frac{d\phi_k^{(1)}(\mu_k, x_1)}{dx};$$

$$d_n^{(2)} = -\frac{x_1 \cdot \chi}{\gamma^2 \text{Pe}_2} \cdot [Y_1(\mu_n) \cdot J_0(\mu_n) - J_1(\mu_n) \cdot Y_0(\mu_n)];$$

$$c_n^{(2)} = -\frac{\text{Bi}}{\gamma^2 \text{Pe}_2} \cdot [Y_1(\mu_n) \cdot J_0(\mu_n/x_1) - J_1(\mu_n) \cdot Y_0(\mu_n/x_1)];$$

$$a_n^{(1)} = -\frac{\mu_n^2}{\gamma^2 \text{Pe}_1}; \quad b_k^{(2)} = \phi_k^{(2)}(\mu_k, x_1); \quad d_n^{(1)} = -\frac{x_1 J_1(\mu_n, x_1)}{\gamma^2 \text{Pe}_1}.$$
(38)

Имея описание объекта управления в виде (37), можно перейти к оптимизации режима охлаждения накладываемой на экструзионной линии кабельной изоляции.

Задача оптимального управления рассматривается в следующей постановке. Требуется для объекта управления, описываемого краевой задачей (1)–(3), моделирующей температурное поле сопряженной системы неоднородных движущихся охлаждаемых тел цилиндрической фор-

мы, найти пространственно–распределенное по длине ванны управление $\theta_b(l)$, обеспечивающее достижение заданной абсолютной точности ε_0 приближения результирующего радиально–го распределения температур $\theta_1(x, l^0)$; $\theta_2(x, l^0)$ на выходе из ванны к их требуемой величине $\theta^* = \text{const}$ согласно соотношению (4) при минимально возможной длине ванны l^0 в условиях заданного ограничения (37) на предельно допустимую величину управляющего воздействия $\theta_b(l)$ и фазового ограничения (38) на максимум радиального температурного градиента, достигаемого на поверхности изоляции ($x = 1$):

$$\theta_{\text{в min}} \leq \theta_b \leq \theta_{\text{в max}}; \quad \theta_{\text{в min}} > 0; \quad \theta_{\text{в max}} > 0; \quad (39)$$

$$\frac{\partial \theta(1, l)}{\partial x} \leq \sigma_{\text{max}}, \quad (40)$$

где σ_{max} — его предельно допустимое значение.

Поставленная задача решается с помощью принципа максимума Понтрягина применительно к полученному в работе модальному представлению объекта управления (1), (2) бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (37) для коэффициентов разложения температурного поля $\theta_1(x, l)$ и $\theta_2(x, l)$ в ряд по собственным функциям краевой задачи (1)–(3).

Согласно принципа максимума Понтрягина, применение которого к задаче управления бесконечномерным объектом (37), аналогичной рассматриваемой, обосновано в [8], оптимальный алгоритм управления без учета фазового ограничения принимает следующий вид

$$\theta^* = \frac{\theta_{\text{в max}} + \theta_{\text{в min}}}{2} + \frac{\theta_{\text{в max}} - \theta_{\text{в min}}}{2} \text{sign} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^{(2)} c_n^{(2)}, \quad (41)$$

где сопряженные функции $\phi_n^{(1)}$ и $\phi_n^{(2)}$ описываются системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_j^{(2)} &= \frac{d\phi_j^{(2)}}{dl} = -\frac{\partial H}{\partial z_j^{(2)}} = -\phi_j^{(2)} a_j^{(2)} - b_j^{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^{(1)} d_n^{(1)}; \\ \dot{\phi}_j^{(1)} &= \frac{d\phi_j^{(1)}}{dl} = -\frac{\partial H}{\partial z_j^{(1)}} = -\phi_j^{(1)} a_j^{(1)} - b_j^{(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^{(2)} d_n^{(2)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Отсюда следует, что искомое оптимальное управление представляет собой релейную функцию осевой координаты, попеременно принимающую только свои предельно допустимые, согласно (39), значения. Следовательно, оптимальный по быстродействию процесс достижения заданной области конечных температурных состояний кабельной жилой состоит из ряда чередующихся интервалов охлаждения тела с максимальной интенсивностью при $\theta^* = \theta_{\text{в min}}$ и последующего выравнивания температур при $\theta^* = \theta_{\text{в max}}$. Тем самым алгоритм оптимального управления заведомо определяется в указанном классе функций с точностью до числа i и величин $\Delta_0^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots, i$), характеризующих его параметров, в роли которых фигурируют длительности этих интервалов постоянства $\theta_b^*(l)$, если учесть, что порядок их следования фиксируется очевидным условием выбора $\theta^* = \theta_{\text{в min}}$ на протяжении первого интервала в задачах охлаждения.

Дальнейшая задача вычисления этих параметров из условий выполнения требования (4) решается в работе альтернативным методом [1].

Вначале задача решается для заданной неравномерности ε_0 конечного распределения температур в кабельной жиле, совпадающей с ее минимально достижимым значением $\varepsilon_{\text{min}}^{(1)}$ в классе одноинтервальных управлений вида

$$\theta_b^*(l) = \theta_{\text{в min}}; \quad l \in [0, l^0], \quad (43)$$

где в роли единственного искомого параметра Δ_1 выступает длина ванны l^0 .

В этом случае предельно допустимое отклонение конечной температуры от заданной, равное $\varepsilon_{\min}^{(1)}$, достигается согласно альтернансному методу в двух точках по радиусу жилы, которыми при физически очевидной форме кривой радиального распределения температур на выходе из ванны оказываются центр жилы ($x=0$) и ее поверхность ($x=1$), где создаются соответственно максимальная и минимальная температуры (рис. 1).

Указанные свойства температурного поля жилы на выходе из ванны приводят к системе двух соотношений, которые можно рассматривать в качестве системы двух уравнений с двумя неизвестными: искомой минимально возможной длиной ванны охлаждения l^0 и минимакса $\varepsilon_{\min}^{(1)}$:

$$\theta^{(2)}(1, l^0) - \theta^* = -\varepsilon_{\min}^{(1)}; \quad \theta^{(1)}(0, l^0) - \theta^* = +\varepsilon_{\min}^{(1)}. \quad (44)$$

Решение этой системы при численном моделировании зависимостей $\theta^{(1)}(0, l^0)$ и $\theta^{(2)}(1, l^0)$ исчерпывают решение рассматриваемой задачи оптимального управления при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(1)}$ в (4).

И если найденная величина $\varepsilon_{\min}^{(1)}$ отвечает технологическим требованиям по точности приближения температуры жилы к заданной величине θ^* , то тем самым найденное решение является решением исходной задачи. В нашем случае $\varepsilon_{\min}^{(1)} = 9^\circ < 10^\circ = \varepsilon_0$ при максимальной длине

ванны охлаждения 0,78 от существующей длины ванны.

В противном случае согласно альтернансному методу можно обеспечить большую точность путем перехода к релейным уравнениям с большим числом интервалов постоянства.

Как показали расчеты температурного поля в изоляции с использованием пакета *Femlab 2.3*, при оптимальном (одноинтервальном) пространственном управлении её охлаждением на участке ванны охлаждения, составляющей около 0,45 её длины, радиальный температурный градиент $\partial\theta/\partial x$ превышает свое предельно допустимое значение, что приводит к необходимости учета фазового ограничения (40).

Поэтому соответствующий алгоритм оптимального управления состоит из участков стабилизации температурного градиента на поверхности жилы на предельно допустимом уровне $\sigma_{\max}$ с управлением $\theta_b^\sigma(l)$ и последующего участка поддержания управляющего воздействия на минимальном уровне:

$$\theta_b^*(l) = \begin{cases} \theta_b^\sigma(l), & l \in [0, l^*]; \\ \theta_{b\min}, & l \in (l^*, l). \end{cases} \quad (45)$$

Величина l^* определяется равенством $\theta_b^\sigma(l^*) = \theta_{b\min}$, а управление $\theta_b^\sigma(l)$ — непосредственно по своему определению кусочно-постоянной аппроксимацией его зависимости от пространственной координаты по условиям технической реализации.

На рис. 2 показано распределение температуры охлаждающей воды T_b по длине ванн охлаждения, соответствующее оптимальному управлению $\theta_b^*(l)$ с учетом фазовых ограничений.

Р и с. 1. Радиальное распределение температуры кабельной жилы на выходе ванны охлаждения при оптимальном (одноинтервальном) пространственном управлении

Р и с. 2. Оптимальное управление охлаждением кабельной жилы с учетом фазовых ограничений

Использование предложенной методики позволяет получить требуемое распределение температуры изоляции на выходе из участка охлаждения, одновременно позволив уменьшить длину ванны до 30% по сравнению с типовыми техническими решениями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рапопорт Э. Я. Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. — М.: Наука, 2000. — 336 с.
2. Митрошин В. Н. Структурное моделирование процесса охлаждения изолированной кабельной жилы при ее изготовлении на экструзионной линии // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: «Технические науки», 2006. — № 40. — С. 22–33.
3. Зиннатуллин Р. Р., Труфанова Н. М., Шилинг А. А. Исследование процессов теплопереноса и фазовых превращений при охлаждении провода с полимерной изоляцией // V Минский междунар. форум по тепло- и массообмену (24–28 мая 2004 г.): Тез. докл. и сообщ. — Т. 2. — Минск, 2004. — С. 130–131.
4. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — М.: Высш. шк., 2001. — 550 с.
5. Рапопорт Э. Я. Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. — М.: Высш. шк., 2003. — 299 с.
6. Рапопорт Э. Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. — М.: Высш. шк., 2005. — 292 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974. — 832 с.
8. Рапопорт Э. Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. — М.: Metallurgia, 1993. — 279 с.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 06-08-00041-а).

Поступила 26.10.2006 г.

УДК 519.246

В.Е. Зотеев

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

На основе численно-аналитических исследований проводится сравнительный анализ эффективности различных методов определения динамических характеристик диссипативной системы с линейно-вязким трением. Результаты исследований позволяют сделать вывод о высокой помехозащищенности численного метода, в основе которого лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели в форме стохастического разностного уравнения колебаний диссипативной системы.

Современный уровень развития средств вычислений и обработки информации позволяет коренным образом изменить методы моделирования, идентификации и диагностики в машиностроении, внедрить в практику исследований демпфирующих свойств машин и механизмов статистические методы анализа и тем самым существенно повысить качество и достоверность результатов обработки экспериментальных данных. В частности, проблема внедрения новых информационных технологий успешно решена в области автоматизированного исследования вибрационных сигналов машин на основе цифрового спектрального анализа [1]. Однако получение достоверной оценки технического состояния диссипативной механической системы на основе анализа характеристик рассеяния энергии колебаний в процессе ее эксплуатации или прочностных промышленных испытаний до сих пор остается важнейшей проблемой в машиностроении. Традиционные методы определения диссипативных характеристик обычно используют результаты нескольких измерений либо огибающей амплитуд колебаний, либо амплитудно-частотной характеристики в методе кривой резонанса [2, 3].

Одним из наиболее распространенных среди известных методов определения характеристик рассеяния колебательной энергии является метод затухающих колебаний [2]. Он заключается в записи виброграмм свободных затухающих колебаний механической системы, по которым определяется логарифмический декремент колебаний. При малой диссипации энергии колебаний для определения декремента колебаний виброграмма разбивается на ряд участков с числом циклов n , зависящим от интенсивности убывания амплитуд. Среднее значение декремента на участке вычисляется по формуле